2002 年 12 月
第 32 卷第 6 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Dec. 2002
Vol. 32 No. 6

关于偏序集拟阵与闭包算子的关系

毛　华,刘三阳

(西安电子科技大学 应用数学系,陕西 西安　710071)

摘要:给出了偏序集拟阵的闭包算子和闭集的定义,并讨论了其相关性质,推广了拟阵理论中的有关结果,同时指出闭包算子和闭集在偏序集拟阵理论与拟阵理论中的区别和联系。

关　键　词:偏序集拟阵;闭包算子;闭集

中图分类号:O157;O153.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-274X(2002)06-0604-03

偏序集拟阵理论是拟阵理论在底集为偏序集时的推广[1,2]。由文献[3,4]可知,拟阵的闭包算子与闭集在拟阵理论的研究中起着重要作用。然而,至今未看到关于偏序集拟阵的闭包算子和闭集的讨论。本文给出偏序集拟阵的闭包算子和闭集的定义,得出其相关的性质,将拟阵理论中的有关结果推广到了偏序集拟阵的情形,这应是偏序集拟阵理论的一个重要组成部分。

下面先给出本文所需的预备理论。

定义 1　设 P 是一个集合,其上定义了一个二元关系"$\leqslant$",如果对任何 $x,y,z\in P$ 有:$(p1)\,x\leqslant x$;$(p2)$ 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$,则 $x=y$;$(p3)$ 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$,必有 $x\leqslant z$,则称 P 是一个偏序集。

若偏序集 L 满足对于任何 $x,y\in L$,在 L 中均有最小上界(记为 $x\vee y$)和最大下界(记为 $x\wedge y$),则称 L 是一个格。若格 L 的每个子集 X 是 L 内有最大下界 $\inf X$ 和最小上界 $\sup X$,则称 L 是完备格。

定义 2[1,2]　设 P 是一个偏序集,如果 $A\subseteq P$ 满足 $x,y\in P$,$y\leqslant x$ 且 $y\in A$,必有 $x\in A$ 成立,则称 A 为 P 的一个滤子,将 P 的滤子全体记为 $Inc(P)$。

若 $\mathscr{B}\subseteq Inc(P)$ 满足:$(b0)\,\mathscr{B}\neq\varnothing$;$(b1)$ 任何 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$,均有 $B_1\not\subset B_2$;$(b2)$ 对 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$、$X,Y\in Inc(P)$,当 $X\subseteq B_1,B_2\subseteq Y,X\subseteq Y$ 时,必有 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $X\subseteq B\subseteq Y$ 成立;则称 $\mathscr{B}$ 为 P 上的一个偏序集拟阵。如果 $X\in Inc(P)$ 且存在 $B\in\mathscr{B}$ 使 $X\subseteq B$,则称 X 为 $\mathscr{B}$ 的一个独立集。否则称为相关集,极小相关集称为圈。

先介绍几个记号:$A\subseteq P$,$\max(A)=\{x\,|\,x$ 为 A 中的极大元$\}$;2^S 表示集合 S 的子集全体。

引理 1[1]　设 $\mathscr{S}$ 为定义在偏序集 P 上的偏序集拟阵 $\mathscr{B}$ 的独立集全体,则下面结论成立:

① $\mathscr{S}\neq\varnothing$;② 若 $X,Y\in Inc(P)$,$Y\in\mathscr{S}$,$X\subseteq Y$,则 $X\in\mathscr{S}$;③ 若 $X,Y\in\mathscr{S}$,且 $|X|<|Y|$,则存在 $y\in\max(Y\backslash X)$ 使得 $X\cup y\in\mathscr{S}$。

反之,若在 $I\subseteq Inc(P)$ 满足 ①～③,则 $\mathscr{B}:=\{I\in I,I$ 为 I 中的极大元$\}$ 为一个偏序集拟阵。

引理 2　① 若 $X\in Inc(P)$,$x\in\max(P/X)$,则 $X\cup x\in Inc(P)$。② 若 $X_\alpha\in Inc(P)(\alpha\in\mathscr{A})$,则 $\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha\in Inc(P)$,$\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha\in Inc(P)$。

证　明　由定义 2 易得 ① 成立。

设 $x\in\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha$,$x\leqslant y\in P$,那么,至少存在 $\alpha0\in\mathscr{A}$ 使得 $x\in x_{\alpha0}$,又 $x_{\alpha0}\in Inc(P)$,故 $y\in x_{\alpha0}\subseteq V_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha$,即 $\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}X_X\in Inc(P)$。如果 $X\in\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha$,$x\leqslant y\in P$,则由 $x\in X_\alpha\in Inc(P)(\forall\alpha\in\mathscr{A})$,有 $y\in X_\alpha(\forall_\alpha\in\mathscr{A})$,即 $y\in\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha$,所以 $\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha\in Inc(P)$。

由引理 2 及 $P\in Inc(P)$ 可知:对于 $X\in 2^P$,P 中必有包含 X 的最小滤子。

1　闭包算子

类似于文献[3,4]中拟阵的闭包算子,对任意集合 S 上的闭包算子定义如下:

收稿日期:2001-02-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(69972036);陕西省自然科学基金资助项目(2000SL03)

作者简介:毛　华(1963-),女,四川渠县人,西安电子科技大学博士生,从事代数组合和格论方面的研究。

定义3 设S为任意一个集合,任取$X,Y\in 2^S$和$x,y,z\in S$,如果映射$f:2^S\to 2^S$满足:① $X\subseteq f(X)$;② $Y\subseteq X$,则$f(Y)\subseteq f(X)$;③ $f(f(X))=f(X)$;④ $y\in f(X\cup z)\backslash f(X)\Rightarrow z\in f(X\cup y)$。则称$f$为$S$上的一个闭包算子。

偏序集上的闭包算子定义如下:

定义4 P为一个偏序集。任取$X,Y\in 2^P$和$x,y\in P$,设X'为P中包含X的最小滤子,$z\in\max(P\backslash X')$。如果映射$f:2^P\to 2^P$满足定义3中①~④,则称f为P上的一个闭包算子。

如果取P为当然的序(即对于任何$x,y\in P$,x与y不可比),则显然定义3与定义4等介,也就是说,满足定义3的映射f必满足定义4。

设P为任给的一个偏序集。本节探讨P上的偏序集拟阵与P上的闭包算子之间是否存在互为一一确定的关系。

定理1 设$\mathscr{B}$为P上的一个偏序集拟阵,定义$\sigma:2^P\to 2^P$如下:当$X\in Inc(P)$时,$\sigma(X)=X\cup(\bigcup_{j\in\mathscr{J}}Y_j)$,其中$Y_j\in Inc(P)$,且存在圈$C_j$使$Y_j\subseteq C_j\subseteq X\cup Y_j$;当$X\in 2^P\backslash Inc(P)$时,$\sigma(X)=\sigma(X')$,其中$X'$为$P$中包含$X$的最小滤子;则$\sigma$为$P$上的闭包算子。

证 明 **Step 1** 定义3中①显然成立。

Step 2 任取$X,Y\in Inc(P)$且$X\subseteq Y$。若$x\in\sigma(X)\backslash X$,则存在$j_0\in\mathscr{J}$及圈$C_{j_0}$使$x\in Y_{j_0}\subseteq C_{j_0}\subseteq X\cup Y_{j_0}\subseteq Y\cup Y_{j_0}$,故$\sigma(X)\subseteq\sigma(Y)$。

任取$X_1,Y_1\in 2^P$且$X_1\subseteq Y_1$;设X'_1,Y'_1分别为P中包含X_1,Y_1的最小滤子,显然$X'_1\subseteq Y'_1$,于是由上可得$\sigma(X_1)=\sigma(X'_1)\subseteq\sigma(Y'_1)=\sigma(Y_1)$。所以,定义3中的②成立。

Step 3 对于任何$X\in Inc(P)$,由引理2知$\sigma(X)\in Inc(P)$,因此$\sigma(\sigma(X))=\sigma(X)\cup(\bigcup_{a\in\mathscr{A}}K_a)$,其中$K_a\in Inc(P)$,且存在圈$C_a$使$K_a\subseteq C_a\subseteq\sigma(X)\cup K_a$,$(\forall a\in\mathscr{A})$。由$K_a\subseteq C_a\subseteq\sigma(X)\cup K_a)=X\cup(\bigcup_{j\in\mathscr{J}}Y_j)$有$K_a\subseteq K_a\cup((\bigcup_{j\in\mathscr{J}}Y_j)\subseteq C_a\subseteq X\cup(((\bigcup_{j\in\mathscr{J}}Y_j)\cap C_a)\cup K_a)$。由引理2有$K_a\subseteq K_a\cup((\bigcup_{j\in\mathscr{J}}Y_j)\cap C_a)\subseteq\sigma(X)$,也就是说$\sigma(\sigma(X))=\sigma(X)$。

一般地,任取$X_1\in 2^P$,X_1'为P中包含X_1的最小滤子,则有$\sigma(\sigma(X_1))=\sigma(\sigma(X_1'))=\sigma(X_1')=\sigma(X_1)$。所以定义3中的③成立。

Step 4 任取$y,z\in P$,当$y=z$时定义3中的④显然成立。下面讨论$y\neq z$。对于任何$X\in 2^P$。如果$y\in\sigma(X\cup z)\backslash\sigma(X)$,其中$z\in\max(P\backslash X')$,$X'$为$P$中包含$X$的最小滤子。

当$X\in Inc(P)$时,有$X=X'$。此时$y\notin\sigma(X)$表明$y\notin X$且对任何$Y_y\in Inc(P)$和圈C_y,若满足$Y_y\subseteq C_y\subseteq X\cup Y_y$时,必有$y\notin Y_y$成立。另外由定义2,$X\cup z\in Inc(P)$,所以$y\in\sigma(X\cup z)=X\cup z\cup(\bigcup_{t\in\mathscr{T}}H_t)$表明存在$t_0\in\mathscr{T}$使滤子$H_{t0}$和圈$C_{t0}$满足$y\in H_{t0}\subseteq C_{t0}\subseteq X\cup z\cup H_{t0}$。若$z\notin C_{t0}$必导出$y\in H_{t0}\subseteq C_{t0}\subseteq X\cup H_{t0}$矛盾,故$z\in C_{t0}$。由$y\in H_{t0}\subseteq C_{t0}$有$X\cup H_{t0}=(X\cup y)\cup H_{t0}\subseteq(X\cup y)\cup C_{t0}$,进而有$z\in C_{t0}\subseteq C_{t0}\subseteq X\cup H_{t0}\cup z\subseteq(X\cup y)\cup C_{t0}$得$z\in\sigma(X\cup y)$。

当$X\notin Inc(P)$时,取X''为包含$X\cup z$的最小滤子,由引理2,$X'\cup z\in Inc(P)$,因此$X''\subseteq X'\cup z$。又由于$X\subseteq X\cup z\subseteq X''$有$X'\subseteq X''$,进一步$X'\cup z\subseteq X''$。故$X''=X'\cup z$。这样$y\notin\sigma(X)=\sigma(X')$,$y\in\sigma(X\cup z)=\sigma(X'\cup z)$。由上讨论有$z=\sigma(X'\cup y)$。设$Y,Y'$分别为$P$中包含$X\cup y,X'\cup y$的最小滤子。由$X\subseteq X\cup y\subseteq Y$有$X'\cup y\subseteq Y$,进而$Y'\subseteq Y$。再由$X\cup y\subseteq X'\cup y\subseteq Y'$得到$Y\subseteq Y'$,故$Y=Y'$。从此$z\in\sigma(X'\cup y)=\sigma(Y')=\sigma(Y)=\sigma(X\cup y)$。所以④成立。

由定义4知σ为P上的一个闭包算子。

将定理1的σ称为$\mathscr{B}$的闭包算子。

下面将通过实例说明P上的闭包算子之集合与P上偏序集拟阵所成集合之间并无双射关系。关于拟阵理论中相应的内容可参见文献[3,4]。

引理3 ① 设$\tau:2^P\to 2^P$为$\tau(X)=X$,$X\in 2^P$,则τ为P上的一个闭包算子。② $\mathscr{L}=\{X|X\in Inc(P)$且$x\in X$必有$x\notin\tau(X\backslash x)\}$确定$P$上的一个偏序集拟阵$\mathscr{B}$。记此处$\mathscr{B}$的闭包算子为$\sigma_{\mathscr{B}}$。

证 明 ① τ显然满足定义3中的①~③。设$y,z\in P$,$X\in 2^P$满足$y\in\tau(X\cup z)/\tau(X)$。由于$\tau(X)=X$有$y\notin X$。另外$y\in\tau(X\cup z)=X\cup z$。因此$y=z$,显然$z=\tau(X\cup y)$。即定义3中的④成立。故$\tau$为$P$上的闭包算子。

② 任取$X\in Inc(P)$和$x\in X$。由$\tau(X\backslash x)=X\backslash x$有$x\notin\tau(X\backslash x)$,从而$\mathscr{L}=Inc(P)$。又$P\in Inc(P)$得到$\mathscr{L}\neq\varnothing$,而$\mathscr{L}$显然满足引理1中的②。任取$X,Y\in\mathscr{L}$满足$|X|<|Y|$。利用定义2和引理2有:对于$y\in\max(Y\backslash X)$均有$X\cup y\in Inc(P)=\mathscr{L}$。再由引理1,$\mathscr{L}$确定$P$上的一个偏序集拟阵$\mathscr{B}$。

例 令$P=\{a,b,c\}$满足$x\leqslant x(\forall x\in P)$,$a\leqslant b$,但$b\leqslant a$不成立;$a,b$与$c$不可比。由定义1,$P$显然为一个偏序集。取$X=\{a\}$,$X'=\{a,b\}$。由定义

2, $X' \in Inc(P)$, $X \notin Inc(P)$, 且 X' 为包含 X 的最小滤子。由定理 1, 引理 3 及定义 4 有 $\tau(X') = X' \subseteq \sigma_{\mathscr{B}}(X') = \sigma_{\mathscr{B}}(X)$, $\tau(X) = X = \{a\}$。这样 $\tau(X) \neq \sigma_{\mathscr{B}}(X)$, 即 $\tau \neq \sigma\beta$。故对于同一个偏序集拟阵 $\mathscr{B}$ 有两个不同的闭包算子与其对应。

2 闭 集

尽管 P 上偏序集拟阵与 P 上的闭包算子之间无双射关系(这一点与拟阵理论不同), 但是偏序集拟阵的闭集却有着有趣的特性。本节就偏序集拟阵闭集的性质进行讨论。

定义 5 设 $\mathscr{B}$ 为 P 上的下偏序集拟阵, σ 为其闭包算子。如果 $X \in Inc(P)$ 满足 $\sigma(X) = X$, 则称 X 为 $\mathscr{B}$ 的一个闭集。$\mathscr{B}$ 的闭集的全体记为 $F(\beta)$。

性质 1 ① 若 $X \in 2^P$, 则 $\sigma(X)$ 是包含 X 的最小闭集。② 若 $X, Y \in F(\mathscr{B})$, 则 $X \cap Y \in F(\mathscr{B})$。

证　明 ① 当 $X \in Inc(P)$ 时, 由定理 1, 引理 2, 定义 4 及定义 5 有 $\sigma(X) \in F(\mathscr{B})$。任取 $Z \in F(\mathscr{B})$ 且 $X \subseteq Z$, 从定义 3 中的 ② 得 $\sigma(X) \subseteq \sigma(Z) = Z$, 所以 $\sigma(X)$ 为包含 X 的最小闭集。

当 $X \in 2^P \backslash Inc(P)$ 时, 设 X' 为包含 X 的最小滤子, 由定理 1 有 $\sigma(X) = \sigma(X')$。任取 $Z \in F(\mathscr{B})$ 且 $X \subseteq Z$, 则有 $X' \subseteq Z$, 进而 $\sigma(X') \subseteq \sigma(Z) = Z$, 即 $\sigma(X)$ 是包含 X 的最小闭集。

② 因 $X \cap Y \subseteq \sigma(X \cap Y) \subseteq \sigma(X) \cap \sigma(Y) = X \cap Y$ 以及引理 2 和定义 5 有 $\sigma(X \cap Y) = X \cap Y \in F(\mathscr{B})$。

定理 2 $F(\mathscr{B})$ 关于集合的包含关系"$\subseteq$"所成之集构成一个完备格。

证　明 由定义 1, $(F(\mathscr{B}), \subseteq)$ 显然是偏序集。

设 $X, Y \in F(\mathscr{B})$。对于 $Z \in F(\mathscr{B})$ 满足 $Z \subseteq X$, $Z \subseteq Y$, 则有 $Z \subseteq X \cap Y$。再由性质 1 得到 $X \cap Y$ 是 X, Y 在 $F(\mathscr{B})$ 中的最大下界, 即 $X \wedge Y = X \cap Y$。任取 $A \in F(\mathscr{B})$ 满足 $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$, 由定义 3 中 ① ～ ② 得 $X \cup Y \subseteq \sigma(X \cup Y) \subseteq \sigma(A) = A$。再由引理 2 和性质 1 有 $\sigma(X \cup Y)$ 是 X, Y 在 $F(\mathscr{B})$ 中的最小上界, 即 $X \vee Y = \sigma(X \cup Y)$, 故由定义 1, $(F(\mathscr{B}), \vee, \wedge)$ 是一个格。

任取 $\mathscr{H} = \{X_\alpha | X_\alpha \in F(\mathscr{B}), \alpha \in \mathscr{A}\}$, 则 $\mathscr{H} \subseteq F(\beta)$。因为 $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} \sigma X_\alpha \subseteq \sigma(\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} (X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha$, 再考虑到引理 2 得 $\sigma \in (\bigcap_{\alpha \mathscr{A}} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha \in F(\beta)$。任取 $H \in F(\mathscr{B})$ 满足 $H \subseteq X_\alpha (\forall \alpha \in \mathscr{A})$, 则 $H \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha$, 即 $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha$ 为 $\mathscr{H}$ 在 $F(\mathscr{B})$ 中的最大下界 $\inf \mathscr{H}$。任取 $K \in F(\mathscr{B})$ 满足 $X_\alpha \subseteq K (\forall \alpha \in \mathscr{A})$, 则 $\sigma(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha) \subseteq \sigma(K) = K$, 再由引理 2、定义 5 及性质 1 可知 $\sigma(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha)$ 是 $\mathscr{H}$ 在 $F(\mathscr{B})$ 中的最小上界 $\sup \mathscr{H}$。

综合而知, $(F(\mathscr{B}), \vee, \wedge)$ 是一个完备格。

由文献[3]中几何格的定义知, 一般地, $F(\mathscr{B})$ 不是几何格(这一点与拟阵理论不同, 拟阵理论的相关内容见文献[3])。

参考文献:

[1] BARNABEI M, NICOLETTI G, PEZZOLI L. Matroids on partially ordered set[J]. Adv in Appl Math, 1998, 21: 78-112.

[2] BARNABEI M, NICOLETTI G, PEZZOLI L. The symmetric exchange property for poset matroids[J]. Adv in Math, 1993, 102: 230-239.

[3] WELSH D J A. Matroid Theory[M]. London: Acad Press Inc Ltd, 1976.

[4] 刘桂真, 陈庆华. 拟阵[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995.

(编　辑　曹大刚)

On the relations between poset matroids and closure operators

MAO Hua, LIU San-yang

(Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The definitions of the closure operator and closed set of a poset matroid are given at first, followed by the discussion of their relative properties. Some results of matroid theory are generalized. Meanwhile, the differences and connections between poset matroids and matroids are revealed about closure operators and closed sets.

Key words: poset matroid; closure operator; closed set