云南大学学报（自然科学版），2007，30（2）：119～123　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

具有限传播的热传导模型经典解的生命跨度*

刘法贵
（华北水利水电学院 数学系，河南 郑州　450011）

摘要：考虑具有限传播热传导方程组，在合理的假设下，利用分析的方法讨论解的奇性形成，并给出了经典解的生命跨度.

关键词：Cauchy 问题；经典解；奇性；生命跨度
中图分类号：O 175.27　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2008)02－0119－05

考虑一维无源热传播问题[1~10]

$$e_t + q_x = 0, \tag{1}$$

其中 q 表示 x 方向热分量，e 表示内能. 通常 q 符合 Fourier 定律

$$q + k(\theta)\theta_x = 0, \tag{2}$$

e 满足

$$e = e(\theta), \text{且 } e_t = c_0(\theta)\theta_t, \tag{3}$$

这里 θ 表示温度，$k(\theta)$ 和 $c_0(\theta) \triangleq e'(\theta)$ 为由材料确定的正值函数.

假设 q 满足 Cattaneo 律[2]

$$\tau(\theta)q_t + q = k(\theta)\theta_x, \tag{4}$$

这里 $\tau(\theta) > 0$ 为延迟时间.

本文考虑下列 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \theta_t + q_x = 0, \\ q_t + \alpha k(\theta)\theta_x + \alpha q = 0, \end{cases} \tag{5}$$

及

$$t = 0: \theta = \theta_0(x), q = q_0(x), \tag{6}$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数，$k(\theta) \in C^1(R^+)$ 满足

$$k(\theta) > 0, k'(\theta) > 0, \ \forall \theta > 0.$$

若 $q_0(x), \theta_0(x) \in H^2(R)$，且 $\| q_0(x) \|_{H^2(R)} + \| \theta_0(x) \|_{H^2(R)}$ 充分小，D. R. Coleman 等[2,3] 证明了 Cauchy 问题(5)，(6) 经典解的存在性，M. R. Salim[4] 证明了如果在 $H^2(R)$ 内存在“大”的 $\theta_0(x)$ 和 $q_0(x)$，则 Cauchy 问题的经典解$(\theta, q)(t, x)$ 在有限时间内破裂.

本文将给出 Cauchy 问题(5)，(6) 的经典解产生奇性的充分条件，并给出了经典解生命跨度估计式.

设

$$r = q - \int_{\theta_*}^{\theta} \lambda(y)\mathrm{d}y, \ s = q + \int_{\theta_*}^{\theta} \lambda(y)\mathrm{d}y, \tag{7}$$

---

* **收稿日期**：2007－03－12
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10571024)；河南省基础研究资助课题(2008－2010).
作者简介：刘法贵(1965－　)，男，河南人，教授，博士，主要从事偏微分方程方面的研究.

其中

$$\lambda(\theta) = \sqrt{\alpha k(\theta)} > 0,\ \forall\, \theta > 0. \tag{8}$$

因此,问题(5),(6) 可化为

$$\begin{cases} D^- r = -\dfrac{\alpha}{2}(r+s), \\ D^+ s = -\dfrac{\alpha}{2}(r+s), \end{cases} \tag{9}$$

$$t = 0:(r,s) = (r_0(x), s_0(x)), \tag{10}$$

这里

$$D^- = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial x},\ D^+ = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x},$$

$$(r_0(x), s_0(x)) = \left(q_0(x) - \int_{\theta_*}^{\theta_0(x)} \lambda(y)\mathrm{d}y, q_0(x) + \int_{\theta_*}^{\theta_0(x)} \lambda(y)\mathrm{d}y\right).$$

令

$$q_0(x) = \varepsilon\varphi(x), \theta_0(x) = \theta_* + \varepsilon\psi(x), \tag{11}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是小参数,$\varphi(x), \psi(x) \in C^1(R)$,且具有有界的 C^1 模.

定理 1[3]　假设对任意的 $x \in R$,

$$k^{1/4}(\theta_0(x)) r'_0(x) + \frac{\alpha}{2}\int_{\theta_*}^{\theta_0(x)} k^{1/4}(y)\mathrm{d}y \geqslant -\frac{A}{2}, \tag{12}$$

$$k^{1/4}(\theta_0(x)) s'_0(x) + \frac{\alpha}{2}\int_{\theta_*}^{\theta_0(x)} k^{1/4}(y)\mathrm{d}y \geqslant -\frac{A}{2}, \tag{13}$$

这里

$$A = \frac{2\alpha k^{5/4}(\theta_*)}{k'(\theta_*)}.$$

如果 $\varepsilon > 0$ 充分小,则 Cauchy 问题(5),(6) 在 $t \geqslant 0$ 上存在惟一的整体经典解,且对 $t \geqslant 0, x \in R, \theta(t,x)$ 满足

$$\theta(t,x) > 0. \tag{14}$$

注 1　定理 1 改进了文献[2] 中的结果.

定理 2　假设存在点 $x_0 \in R$,使得

$$k^{1/4}(\theta_0(x_0)) r'_0(x_0) + \frac{\alpha}{2}\int_{\theta_*}^{\theta_0(x_0)} k^{1/4}(y)\mathrm{d}y < -2A, \tag{15}$$

或

$$k^{1/4}(\theta_0(x_0)) s'_0(x_0) + \frac{\alpha}{2}\int_{\theta_*}^{\theta_0(x_0)} k^{1/4}(y)\mathrm{d}y < -2A. \tag{16}$$

则 Cauchy 问题(5),(6) 的经典解的一阶微商一定在有限时间内破裂.

进一步,如果

$$0 < \alpha = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \tag{17}$$

则经典解的生命跨度满足

$$c\varepsilon^{-1} \leqslant T(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{-1}, \tag{18}$$

表示为

$$T(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-1}, \tag{19}$$

其中 $c > 0$ 和 $C > 0$ 表示不依赖于 $\varepsilon > 0$ 的常数.

注 2　定理 1 和定理 2 表明对小的延迟时间 $\tau > 0$,Cauchy 问题(5),(6) 的经典解整体存在.但对大的

延迟时间,经典解要在有限时间内产生奇性,且在该情形 Cattaneo 律不再成立.

引理 1　在假设(H) 之下,对 Cauchy 问题(5),(6),在经典解存在区域上,成立

$$|r(r,x)| \leqslant C_1\varepsilon,\ |s(t,x)| \leqslant C_1\varepsilon, \tag{20}$$

其中 C_1 为不依赖于 ε 的正常数.

推论 1　在假设(H) 之下,对 Cauchy 问题(5),(6),在经典解存在区域上,成立

$$|q(t,x)| \leqslant C_2\varepsilon,\ |\theta(t,x) - \theta_*| \leqslant C_2\sqrt{\varepsilon}, \tag{21}$$

其中 C_2 为不依赖于 ε 的正常数.

注 3　式(21) 表明如果 $\varepsilon > 0$ 充分小,则在 Cauchy 问题经典解存在区域上,成立

$$\theta(t,x) > 0,\ \forall t \geqslant 0, x \in R. \tag{22}$$

定理 2 的证明　对式(9) 关于 x 求导,得

$$\begin{cases} D^- r_x = -\dfrac{k'(\theta)}{4k(\theta)} r_x^2 + \dfrac{k'(\theta)}{4k(\theta)} s_x r_x - \dfrac{\alpha}{2}(r_x + s_x), \\ D^+ s_x = -\dfrac{k'(\theta)}{4k(\theta)} s_x^2 + \dfrac{k'(\theta)}{4k(\theta)} s_x r_x - \dfrac{\alpha}{2}(r_x + s_x). \end{cases} \tag{23}$$

定义

$$h = \frac{1}{4}\ln k(\theta),\ g = \frac{\alpha}{2}\int_{\theta_*}^{\theta} e^{h(y)} \mathrm{d}y, \tag{24}$$

则由式(5),(7) 和(24),有

$$\begin{cases} D^- w = -aw^2 + \left(2ag \dfrac{\alpha}{2}\right) w - ag^2 + \dfrac{\alpha}{2} g, \\ D^+ z = -az^2 + \left(2ag \dfrac{\alpha}{2}\right) z - ag^2 + \dfrac{\alpha}{2} g, \end{cases} \tag{25}$$

这里

$$w = k^{\frac{1}{4}}(\theta) r_x + g,\ z = k^{\frac{1}{4}}(\theta) s_x + g, \tag{26}$$

$$a = \frac{k'(\theta)}{4k^{\frac{5}{4}}(\theta)} > 0. \tag{27}$$

设

$$\begin{cases} w(0,x) = w_0(x) \equiv k^{\frac{1}{4}}(\theta_0(x)) r'_0(x) + g_0(x), \\ z(0,x) = z_0(x) \equiv k^{\frac{1}{4}}(\theta_0(x)) s'_0(x) + g_0(x), \end{cases} \tag{28}$$

其中

$$g_0(x) = \frac{\alpha}{2}\int_{\theta_*}^{\theta_0(x)} e^{h(y)} \mathrm{d}y. \tag{29}$$

Cauchy 问题(5),(6) 经典解破裂的证明可参见文献[3].这里仅给出(18) 式的证明.

由式(11),(17),(25) ~ (29) 和推论 1,有

$$|w_0(x)| \leqslant C_1\varepsilon,\ |z_0(x)| \leqslant C_1\varepsilon, \tag{30}$$

$$\left(2ag - \frac{\alpha}{2}\right)^2 \leqslant C_2\varepsilon^3,\ \left|ag^2 + \frac{\alpha}{2} g\right| \leqslant C_2\varepsilon^3, \tag{31}$$

$$C_3 \leqslant a \leqslant C_4, \tag{32}$$

这里及以后 $C_i(i = 1,2,\cdots)$ 表示不依赖于 ε 的正常数.由此,在经典解存在区域

$$D(T) = \{(x,t) | x \in R, t \in [0,T], T > 0\}$$

上,由式(26),(31),(32),得

$$\begin{cases} y'(t) \leqslant C_5 y^2(t) + C_6 \varepsilon^3, \\ y(0) = C_1 \varepsilon, \end{cases} \tag{33}$$

这里

$$y(t) = \max\{\sup_x |w(t,x)|, \sup_x |z(t,x)|\}. \tag{34}$$

这样由式(33),当

$$0 \leqslant t \leqslant \min\left[\frac{1}{\sqrt{C_5^{-1} C_6 \varepsilon^3}} \arctan \frac{\sqrt{C_5 C_6 \varepsilon^3}}{C_1 \varepsilon}, T\right] \tag{35}$$

时,有

$$y(t) \leqslant \frac{C_1 \varepsilon + \sqrt{C_5^{-1} C_6 \varepsilon^3} \tan \sqrt{C_5 C_6 \varepsilon^3}\, t}{1 - \dfrac{C_1 \varepsilon}{\sqrt{C_5^{-1} C_6 \varepsilon^3}} \tan \sqrt{C_5 C_6 \varepsilon^3}\, t}. \tag{36}$$

因此,对

$$0 \leqslant t \leqslant \min(C_7 \varepsilon^{-1}, T), \tag{37}$$

有

$$y(t) \leqslant 2 C_1 \varepsilon. \tag{38}$$

式(38) 表明

$$T(\varepsilon) \geqslant C_8 \varepsilon^{-1}. \tag{39}$$

事实上,如果 $T(\varepsilon) < C_8 \varepsilon^{-1}$,由推论 1 和式(39),对任何给定的经典解存在区域 $D(T_0)(T_0 \in (0, T(\varepsilon))$,有

$$\| q(t,x) \|_{C^1} \leqslant C_9 \varepsilon, \quad \| \theta(t,x) - \theta_* \|_{C^1} \leqslant C_9 \sqrt{\varepsilon}. \tag{40}$$

这样,利用经典解的局部理论,Cauchy 问题(5),(6) 在 $D(T(\varepsilon) + \eta)$ 上存在惟一经典解,这里 $\eta > 0$ 为适当小的常数.这与 $T(\varepsilon)$ 的定义矛盾.至此,(18) 式左端获证.

下面证明(18) 式右端部分.

令

$$\hat{w}(t,x) = - w(t,x). \tag{41}$$

假设(15) 式成立.则由式(11),(17) 和(28) ~ (30),对充分小的 $\varepsilon_0 > 0$,有

$$\hat{w}(0, x_0) = - w_0(x_0) > 0, r'_0(x_0) < 0. \tag{42}$$

进一步,有

$$0 < \hat{w}(0, x_0) \in \left[\frac{1}{2} \varepsilon f(x_0), \frac{3}{2} \varepsilon f(x_0)\right], \tag{43}$$

其中 $f(x_0)(> 0)$ 仅依赖于 $\varphi(x_0)$ 和 $\psi(x_0)$.

设 $x = x_1(t, x_0)$ 为过点$(0, x_0)$ 的第 1 特征,则由式(25) 和(31),(32),在存在区域 $D(T)$ 上,有

$$\begin{cases} D^- \hat{w} \geqslant \dfrac{2}{3} C_{10} \hat{w}^2 - C_{11} \varepsilon^3, \ t \in [0, T], \\ t = 0 : \hat{w} = \hat{w}(0, x_0). \end{cases} \tag{44}$$

当 $t = 0$ 时,由式(43),可得式(44) 右端为正.因此 $\hat{w}(t, x_1(t, x_0))$ 在 $t = 0$ 的邻域内关于 t 严格单调增加.故在 $D(T)$ 上,$\hat{w}(t, x_1(t, x_0))$ 关于 t 严格单调增加.这样,得

$$\hat{w}(t, x_1(t, x_0)) \geqslant \frac{1}{2} \varepsilon f(x_0) > 0, \ \forall\, t \in [0, T]. \tag{45}$$

从而由式(44),(45),得

$$\begin{cases} D^- \hat{w} \geqslant \dfrac{2}{3} C_7 \hat{w}^2, \ t \in [0, T], \\ t = 0 : \hat{w} = \dfrac{1}{2} \varepsilon f(x_0). \end{cases} \tag{46}$$

根据式(46),当

$$t \to \frac{4}{C_7 f(x_0)} \varepsilon^{-1} \tag{47}$$

时,有

$$\hat{w}(t, x_1(t, x_0)) = -w(t, x_1(x_0)) \to \infty. \tag{48}$$

因此,有

$$T(\varepsilon) \leqslant C_{10} \varepsilon^{-1}. \tag{49}$$

定理 2 证毕.

参考文献:

[1] CATANEO C. Sulta conduzione del[J]. Atti Sem Math Fis Univ Modena, 1948, 3(1): 83-101.

[2] COLEMAN D R, HRUSA W R, OWEN D R. Stability of equilibriumof nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound insolids[J]. Arch Rat Mech Anal, 1986, 94(3): 267-289.

[3] LIU Fa-gui, XIANG Min-sen, LI Cai-zhong. Classical solutions to heat conduction with finite ofpropagation guided by second sound[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2001, 38(6): 793-798.

[4] SLAIM M A. Formation of singularites in heat propagation guided by second sound[J]. J D E, 1996, 130(1): 92-99.

[5] 孙文华,杨汉春.一类耦合双曲系统 Cauchy 问题[J].云南大学学报:自然科学版,2004,26(1):6-10.

[6] LI Tatsien, YU Wen-ci. Boundary value problems for quasilinear yperbolic systems[M]. Duke: Duke University Mathematics Series 5, 1985.

[7] LI Tatsien, LIU Fa-gui. Singularities caused byeigenvectors for quasilinear hyperbolic systems[J]. Comm in PDE, 2003, 28(3): 477-503.

[8] 刘法贵,李才中.具张弛的 P 系统[J].云南大学学报:自然科学版,2007,29(1):1-4.

[9] LIU Fa-gui. Cauchy problem for quasilinear hyperbolic systems[M].郑州:黄河水利出版社,2006.

[10] 刘法贵,葛云飞,李才中.具间断系数线性双曲型方程组[J].数学物理学报,2007,27(1):184-192.

Life span for classical solutions to heat conduction with finite of propagation

LIU Fa-gui

(Department of Mathematics, North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou 450011, China)

Abstract: It is presented that heat conduction with finite of propagation guided by second sound. Under certain hypotheses, the formation of singularities and the life span of the classical solution are obtained.

Key words: Cauchy problem; classical solution; singularity; life span