云南大学学报（自然科学版），2008，30（5）：437～442　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

具有非线性传染率的传染病模型分析※

李群宏[1]，宋自根[1,2]，朱　亮[1]
（1.广西大学 数学与信息科学学院，广西 南宁　530004；2.同济大学 航空航天与力学学院，上海　200092）

摘要：建立了一类具有非线性传染率函数的 SIS 型传染病模型，考虑因病死亡、人口的输入和输出、出生率与自然死亡率等因素，分析了系统无病平衡点和地方病平衡点的存在性及其局部稳定性，得到了系统可能存在的周期运动，并利用全局分支方法研究了模型的 BT 分支，找到了系统所具有的鞍结点分支曲线、Hopf 分支曲线和同宿轨分支曲线，再现了退化平衡点附近的轨线变化规律.

关键词：传染病模型；非线性传染率；稳定性；分支；同宿轨
中图分类号：O 179　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2008)05－0437－06

利用数学模型分析和预测传染病的传播和发展，进而预防和控制传染病的流行，已经得到了许多有用的结果[1～15]. 在经典的传染病模型中，通常不考虑人口的出生、死亡等种群动力因素，人口总量保持为一个固定的常数，并且大量使用双线性传染率 βIS 和标准传染率 $\beta SI/N$[2～5]，这里 β 是易感者 S 和感染者 I 的有效接触率，N 表示种群的个体总数.

对于传染病模型的分支问题，Liu 等[6,7]研究了传染率为 $\beta I^p S^q$ 的 SEIRS 和 SIRS 模型的余维 1 分支，Lizana 和 Rivero[8]，Glendinning 和 Perry[9] 及 Derrick 和 Driessche[10] 研究了具有 $\beta I^p S^q$ 型传染率的 SIRS 和 SIR 模型的鞍结分支，Hopf 分支及 BT 分支. Ruan 和 Wang[11] 研究了传染率函数为 $kI^2S/(1+\beta I^2)$ 的 SIRS 模型当种群个体总数处于平衡状态时的鞍结分支，Hopf 分支及 BT 分支. 而 Jin 等[12]，Zhou 等[13] 分别采用 $\beta I(1+vI)S$ 和 $kSI/(1+\beta I+\alpha I^2)$ 为传染率函数研究了 SIRS 模型的 Hopf 分支和 BT 分支.

本文采用文献[11]中 $kI^2S/(1+\beta I^2)$ 为传染率函数，其中 β 是非负数并且 k 是正常数. 假设易感者一旦被传染就成为患病者，且患病者恢复后不具有免疫力，即一旦恢复就又成为易感者. 这种情形的传播形式主要适应于由细菌传播而引起的传染病，比如脑炎、淋病等，它对应的数学模型习惯上称为 SIS 传染病模型，并且假设患病者除自然死亡外，也会由于患病而导致因病死亡，以 α_1 表示为自然死亡率系数，d 表示为因病死亡率系数，考虑人口的常数输入，其输入率为 A，γ 为恢复率系数，并且 $\alpha_1>0, d>0, \gamma>0$. 为此，我们记 $\alpha_1+d+\gamma=\alpha_2$，则易知 $\alpha_2>\alpha_1>0$.

考虑下面的 SIS 型模型

$$\begin{cases} \dot{S} = A - \alpha_1 S + \gamma I - \dfrac{KI^2 S}{1+\beta I^2}, \\ \dot{I} = \dfrac{KI^2 S}{1+\beta I^2} - \alpha_2 I. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S(t)$ 表示 t 时刻的易感种群的个体总数，$I(t)$ 表示 t 时刻患病种群的个体总数.

下面，我们首先将分析系统无病平衡点和地方病平衡点的存在性及其局部稳定性；其次，我们将研究系统可能存在的周期运动；最后，利用全局分支方法研究模型的 BT 分支.

※ **收稿日期**：2007－08－22
基金项目：广西壮族自治区自然科学基金资助项目(0640002)；广西研究生教育创新项目资助(2006105930701M16).
作者简介：李群宏(1964－　)，男，广西人，教授，博士，主要从事微分方程分支理论及应用方面的研究.

1 定态的存在性及其局部稳定性分析

首先我们来研究系统(1) 无病平衡点,易知其始终有 1 个无病平衡点(A/α_1,0),且有:

定理 1 系统(1) 的无病平衡点(A/α_1,0) 为一个局部稳定的结点.

我们记 $R_0 = \dfrac{A^2k^2}{4\alpha_1\alpha_2(k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)}$,则有下面的引理 1.

引理 1 (i) 当 $R_0 > 1$ 时,系统(1) 有 2 个正的地方病平衡点(S_1,I_1),(S_2,I_2),其中

$$S_1 = \frac{\alpha_2(1 + \beta I_1^2)}{kI_1},\ I_1 = \frac{Ak + \sqrt{\Delta}}{2(k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)},$$
$$S_2 = \frac{\alpha_2(1 + \beta I_2^2)}{kI_2},\ I_2 = \frac{Ak - \sqrt{\Delta}}{2(k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)},$$
$$\Delta = A^2k^2 - 4\alpha_1\alpha_2(k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma).$$

(ii) 当 $R_0 < 1$ 时,系统(1) 无地方病平衡点.

(iii) 当 $R_0 = 1$ 时,系统(1) 存在 1 个正的地方病平衡点(S^*,I^*),其中

$$S^* = \frac{A^2k^2 + 4\beta\alpha_1^2\alpha_2^2}{2Ak^2\alpha_1}, I^* = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{Ak}.$$

我们对系统(1) 在点(S_i,I_i)($i = 1,2$) 处作坐标平移变换(为方便起见,仍记为(S,I)),其雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \dfrac{kI^2}{1 + \beta I^2} & \gamma - \dfrac{2kIS}{(1 + \beta I^2)^2} \\ \dfrac{kI^2}{1 + \beta I^2} & \dfrac{2kIS}{(1 + \beta I^2)^2} - \alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

从而得

$$\det(J) = \frac{(k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)I^2 - \alpha_1\alpha_2}{1 + \beta I^2}, \tag{3}$$

因此 $\det(J)$ 的符号由下式决定

$$l_1 = (k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)I^2 - \alpha_1\alpha_2. \tag{4}$$

我们记 $m = k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma$,则有:

引理 2 地方病平衡点 I_1,I_2 满足下面的不等式

$$0 < \frac{2\alpha_1\alpha_2}{Ak} < \frac{Ak}{2m} < I_1 < \frac{Ak}{m},\ 0 < \frac{\alpha_1\alpha_2}{Ak} < I_2 < \frac{2\alpha_1\alpha_2}{Ak} < \frac{Ak}{2m}.$$

由引理 2 我们可得下面的定理 2.

定理 2 对于系统(1),若存在 2 个正的实定态(S_1,I_1) 和(S_2,I_2),则(S_1,I_1) 为 1 个结点、焦点或中心,(S_2,I_2) 是 1 个鞍点.

为了进一步研究(S_1,I_1) 的性态,我们考察 I_1 处的迹

$$\mathrm{tr}(J_1) = -\frac{(k + \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2)I_1^2 + \alpha_1 - \alpha_2}{1 + \beta I_1^2}. \tag{5}$$

从而 $\mathrm{tr}(J_1)$ 的符号由下式决定

$$l_2 = (\beta^2\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + k\beta)I_1^4 + (k + 2\beta\alpha_1)I_1^2 + \alpha_1 - \alpha_2. \tag{6}$$

注意到 $\xi = (k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)I_1^2 - AkI_1 + \alpha_1\alpha_2 = 0$,$l_2$ 可以表示成 $l_2 = q_0\xi - q_1s_2$.其中 q_0 为 I_1 的多项式,$q_1 = (k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)^{-3} > 0$,$s_2 = AI_1(x_1A^2 + x_2) + x_3A^2 + x_4$,且 $x_1 = -k^3\beta(k + \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2)$,$x_2 = k(k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)(k^2\gamma - k^2\alpha_2 + \beta\alpha_1(2k\gamma - k\alpha_2 + 2\beta\alpha_2^2))$,$x_3 = k^2\beta\alpha_1\alpha_2(k + \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2)$;$x_4 = k(\alpha_2 - \gamma)(k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma)(k\gamma\alpha_1 - k\gamma\alpha_2 + k\alpha_2^2 + 2\beta\alpha_1\alpha_2^2)$.

同理,ξ 可以记作 $\xi = q_2s_2 + q_3s_3s_4$,其中 q_2 为 I_1 的多项式,$q_3 > 0$,$s_3 > 0$,

$$s_4 = k^2(\alpha_2-\alpha_1)(k+\beta\alpha_1+\beta\alpha_2)A^2-(k\gamma\alpha_1-k\gamma\alpha_2+k\alpha_2^2+2\beta\alpha_1\alpha_2^2)^2=0. \tag{7}$$

从而有

$$s_4=0 \Leftrightarrow A^2=\frac{(k\gamma\alpha_1-k\gamma\alpha_2+k\alpha_2^2+2\beta\alpha_1\alpha_2^2)^2}{k^2(\alpha_2-\alpha_1)(k+\beta\alpha_1+\beta\alpha_2)} \triangleq A_c^2. \tag{8}$$

故若 $A^2\neq A_c^2$,则(S_1,I_1)不改变其稳定性.

显然,若 $A^2>A_c^2$,易知当 $A\to+\infty$ 时 $s_2\to-\infty$,故 $l_2\to+\infty$,得 $\mathrm{tr}(J_1)<0$.

若$\frac{4m\alpha_1\alpha_2}{k^2}<A^2<A_c^2$,易知当 $A\to\frac{4m\alpha_1\alpha_2}{k^2}$ 时,$I_1\to\frac{\alpha_1\alpha_2}{Ak}$,此时 s_2 的符号即由下式决定

$$r=k^2\alpha_2(\alpha_2-\gamma)^2+k\alpha_1(\alpha_2-\gamma)(k\gamma-k\alpha_2+2\beta\alpha_2^2)+\beta\alpha_1^2\alpha_2(2k\gamma-k\alpha_2+2\beta\alpha_2^2). \tag{9}$$

显然 $r>0$.

此时,我们有下面的定理 3.

定理 3　对于系统(1),若正的实定态(S_1,I_1)存在,只要 $A^2\neq A_c^2$,则不管轨线是一个结点、焦点或中心,它都是局部稳定的.

下面研究极限环的不存在性.由于(S_1,I_1)为一个局部稳定的结点、焦点或中心,而(S_2,I_2)是1个鞍点,故系统(1)的极限环必须包围(S_1,I_1),但不能包围(S_2,I_2),我们取 Dulac 函数 $D=\frac{1+\beta I^2}{kI^2}$,由 Bendixson – Dulac 判别法得:

定理 4　若 $I^2>\frac{\alpha_2-\alpha_1}{k+\beta\alpha_1+\beta\alpha_2}$,则系统(1)没有极限环.

2　周期解的存在性分析

本节我们讨论周期轨道的存在性及其稳定性.对于系统(1),由上面的分析,我们已经知道(S_2,I_2)只要存在就是1个鞍点,故该点附近不可能出现周期轨道.又由于当 $I=0$ 时,$I'(t)=0$,故系统的轨线不可能穿过 S 轴,也就是说不可能存在包含$(A/\alpha_1,0)$的周期轨道.因而,我们只要讨论系统在(S_1,I_1)处出现的周期轨道即可.

为计算方便起见,我们考虑与系统(1)等价的系统

$$\begin{cases}\dot{S}=(A-\alpha_1S+\gamma I)(1+\beta I^2)-kI^2S,\\ \dot{I}=kI^2S-\alpha_2I(1+\beta I^2).\end{cases} \tag{10}$$

作坐标变换 $x=S-S_1,y=I-I_1$,把(S_1,I_1)移至原点,则有

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1x+a_2y+f_1(x,y),\\ \dot{y}=a_3x+a_4y+f_2(x,y).\end{cases} \tag{11}$$

其中 $a_1=-kI_1^2-(1+\beta I_1^2)\alpha_1$,$a_2=\gamma+\beta(2AI_1+3\gamma I_1^2)-\frac{2(1+\beta I_1^2)(k+\beta\alpha_1)\alpha_2}{k}$,$a_3=kI_1^2$,$a_4=\alpha_2(1-\beta I_1^2)$,$f_1(x,y)=b_1xy+b_2y^2-(k+\beta\alpha_1)xy^2+\beta\gamma y^3$,$f_2(x,y)=b_3xy+b_4y^2+kxy^2-\beta\alpha_2y^3$,$b_1=-2I_1(k+\beta\alpha_1)$,$b_2=\beta(A+3\gamma I_1)-\frac{(1+\beta I_1^2)(k+\beta\alpha_1)\alpha_2}{kI_1}$,$b_3=2kI_1$,$b_4=\frac{(1+\beta I_1^2)\alpha_2}{I_1}-3\beta\alpha_2I_1$.

由 $A^2=A_c^2$ 和 $\xi=0$ 化简上式系数得 $a_1=\frac{-(k+2\beta\alpha_1)\alpha_2}{\rho}$,$a_2=-2\alpha_2+\frac{\gamma(k+2\beta\alpha_2)}{\rho}$,

$a_3=\frac{k(\alpha_2-\alpha_1)}{\rho}$,$a_4=\frac{(k+2\beta\alpha_1)\alpha_2}{\rho}$,$b_1=\frac{-2(k+\beta\alpha_1)[k\gamma(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_2^2(k+2\beta\alpha_1)]}{Ak\rho}$,

$b_2=\frac{-Ak[\beta\alpha_1(2\gamma+\alpha_2)+\alpha_2(k-2\beta\gamma+\beta\alpha_2)]}{\delta}$,$b_3=\frac{2[k\gamma(\alpha_1-\alpha_2)+k\alpha_2^2+2\beta\alpha_1\alpha_2^2]}{A\rho}$,

$b_4=\frac{Ak\alpha_2(k+3\beta\alpha_1-\beta\alpha_2)}{\delta}$,$\rho=k+\beta\alpha_1+\beta\alpha_2$,$\delta=k\gamma(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_2^2(k+2\beta\alpha_1)$.

作变换 $X = x, Y = a_1x + a_2y$,则系统(11)可化为

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + f_1\left(X, \dfrac{Y - a_1X}{a_2}\right), \\ \dot{Y} = -LX + a_1f_1\left(X, \dfrac{Y - a_1X}{a_2}\right) + a_2f_2\left(X, \dfrac{Y - a_1X}{a_2}\right). \end{cases} \tag{12}$$

其中 $L = a_1a_4 - a_2a_3$,化简得

$$L = \frac{(k + 2\beta\alpha_2)(k\alpha_2^2 - (k\gamma + 2k\alpha_1 + 2\beta\alpha_1^2)\alpha_2 + k\gamma\alpha_1)}{(k + \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2)^2}. \tag{13}$$

进一步我们可以假设 $L > 0$.

作变换 $u = -X, v = Y/\sqrt{L}$,则系统(12)可化为

$$\begin{cases} \dot{u} = -\sqrt{L}v + F_1(u, v), \\ \dot{v} = \sqrt{L}u + F_2(u, v). \end{cases} \tag{14}$$

其中 $F_1(u,v) = -f_1(-u, (v\sqrt{L} + a_1u)/a_2)$, $F_2(u,v) = [a_1f_1(-u, (v\sqrt{L} + a_1u)/a_2) + a_2f_2(-u, (v\sqrt{L} + a_1u)/a_2)]/\sqrt{L}$. 从而系统(14)就是求 Hopf 分支的标准形,其 Liapunov 系数为

$$\sigma = -[a_1a_2^3b_3^2 + b_2(b_1 + 2b_4)(L + a_1^2)^2 + a_2^2(2kLa_1 - Lb_3b_4 - 3a_1^2b_3b_4) - \\ a_1a_2(L + a_1^2)(b_1^2 + b_2b_3 + b_1b_4 - 2b_4^2) + \frac{La_2(L + a_1^2)(k + \beta\alpha_1 + 3\beta\alpha_2)}{8La_2^3}. \tag{15}$$

由 σ 的符号可以确定周期解的稳定性.

定理 5 设 $A^2 = A_c^2$ 成立. 如果 $\sigma < 0$,则当 A^2 从 A_c^2 减少时,系统(1)存在稳定的周期轨道;如果 $\sigma > 0$,则当 A^2 从 A_c^2 增加时,系统(1)存在不稳定的周期轨道;如果 $\sigma = 0$,则在合适的扰动下系统(1)至少有 2 个极限环.

3 系统的 BT 分支分析

现在,我们讨论系统(1)的 BT 分支,为方便起见,记为如下形式

$$\begin{cases} \dot{I} = \dfrac{kI^2S}{1 + \beta I^2} - \alpha_2 I, \\ \dot{S} = A - \alpha_1 S + \gamma I - \dfrac{kI^2S}{1 + \beta I^2}. \end{cases} \tag{16}$$

我们假设

$$(\mathrm{H}_1): k\alpha_2 + \beta\alpha_1\alpha_2 - k\gamma = \frac{A^2k^2}{4\alpha_1\alpha_2}; \quad (\mathrm{H}_2): \beta = \frac{A^2k^2(\alpha_2 - \alpha_1) - 4k\alpha_1^2\alpha_2^2}{4\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

则对系统(16)作坐标平移变换 $\xi = I - I^*, \eta = S - S^*$,可得

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{10}\xi + a_{01}\eta + a_{20}\xi^2 + a_{11}\xi\eta + f_1(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} = b_{10}\xi + b_{01}\eta + b_{20}\xi^2 + b_{11}\xi\eta + f_2(\xi, \eta). \end{cases} \tag{17}$$

其中 $a_{10} = -b_{01} = \dfrac{\alpha_1(A^2k + 2\alpha_1\alpha_2^2)}{A^2k - 2\alpha_1^2\alpha_2}$, $a_{01} = \dfrac{2\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{A^2k - 2\alpha_1^2\alpha_2}$,

$a_{20} = -b_{20} = \dfrac{A^3k^2(\alpha_1 + \alpha_2)(2A^2k\alpha_1 - A^2k\alpha_2 + 6\alpha_1^2\alpha_2^2)}{4\alpha_1\alpha_2^2(A^2k - 2\alpha_1^2\alpha_2^2)^2}$, $a_{11} = -b_{11} = \dfrac{A^3k^2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{\alpha_2(A^2k - 2\alpha_1^2\alpha_2)^2}$,

$b_{10} = \dfrac{A^2k(\gamma - \alpha_1) - (A^2k + 2\gamma\alpha_1^2)\alpha_2}{A^2k - 2\alpha_1^2\alpha_2}$, $f_1(\xi, \eta), f_2(\xi, \eta)$ 至少为 ξ, η 的 3 次项. 显然系统(17)的线性部分组成的矩阵具有 2 重零特征值.

设 $X = \xi, Y = a_{10}\xi + a_{01}\eta$,则系统(17)可化为

$$\begin{cases}\dot{X}=Y+C_1X^2+C_2XY+\bar{f}_1(X,Y),\\ \dot{Y}=C_3X^2+C_4XY+\bar{f}_2(X,Y).\end{cases}\tag{18}$$

其中 $C_1=\dfrac{-A^3k^2(\alpha_1+\alpha_2)}{4\alpha_1\alpha_2(A^2k-2\alpha_2^2\alpha_2)}$，$C_2=\dfrac{A^3k^2(\alpha_1+\alpha_2)}{2\alpha_1\alpha_2^2(A^2k-2\alpha_1^2\alpha_2)}$，$C_3=\dfrac{-A^3k^2(\alpha_1+\alpha_2)}{4\alpha_2(A^2k-2\alpha_1^2\alpha_2)}$，$C_4=\dfrac{A^3k^2(\alpha_1+\alpha_2)}{2\alpha_2^2(A^2k-2\alpha_1^2\alpha_2)}$.

为了得到标准型,作变量变换 $U=X-C_2X^2/2,V=Y+C_1X^2$,代入系统(18)得

$$\begin{cases}\dot{U}=V+R_1(U,V),\\ \dot{V}=C_3U^2+(C_4-2C_1)UV+R_2(U,V).\end{cases}\tag{19}$$

其中 R_1,R_2 至少为 U,V 的 3 次项,且易知 $C_3<0,C_4-2C_1>0$.我们有:

定理 6　设(H_1)和(H_2)成立,则原系统的平衡点(I^*,S^*)是一个余维 2 的尖点,也就是说,它具有 BT 奇异性.

下面,我们来求解分支曲线的近似表达式.取 k 和 β 为分支参数,使 $\bar{A},\bar{k},\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\gamma,\bar{\beta}$ 满足(H_1)和(H_2)(为方便起见,仍记为 $A,k,\alpha_1,\alpha_2,\gamma,\beta$),设 $k\to k+\varepsilon_1,\beta\to\beta+\varepsilon_2$.对系统(16)作坐标变换 $\xi=I-I^*,\eta=S-S^*$,我们得

$$\begin{cases}\dot{\xi}=a_0+c_{10}\xi+c_{01}\eta+c_{20}\xi^2+c_{11}\xi\eta+g_1(\xi,\eta,\varepsilon_1,\varepsilon_2),\\ \dot{\eta}=b_0+d_{10}\xi+d_{01}\eta+d_{20}\xi^2+d_{11}\xi\eta+g_2(\xi,\eta,\varepsilon_1,\varepsilon_2).\end{cases}\tag{20}$$

其中 $a_0=\dfrac{2\alpha_1\alpha_2^2}{Ak^2}\varepsilon_1-\dfrac{8\alpha_1^3\alpha_2^4}{A^3k^3+4Ak\beta\alpha_1^2\alpha_2^2}\varepsilon_2$，$c_{10}=a_{10}+2A^2k\alpha_2\Omega^{-1}\varepsilon_1-16A^2k^2\alpha_1^2\alpha_2^3\Omega^{-2}\varepsilon_2$，$c_{01}=a_{01}+4\alpha_1^2\alpha_2^2\Omega^{-1}\varepsilon_1-16k\alpha_1^4\alpha_2^4\Omega^{-2}\varepsilon_2$，$c_{20}=a_{20}+\dfrac{1}{2}A^3k^2(A^2k^2-12\beta\alpha_1^2\alpha_2^2)\alpha_1^{-1}\Omega^{-2}\varepsilon_1-12A^3k^3\alpha_1(A^2k^2\alpha_2^2-4\beta\alpha_1^2\alpha_2^4)\Omega^{-3}\varepsilon_2$，$c_{11}=a_{11}+4A^3k^3\alpha_1\alpha_2\Omega^{-2}\varepsilon_1-32A^3k^4\alpha_1^3\alpha_2^3\Omega^{-3}\varepsilon_2$，$d_{10}=b_{10}-2A^2k\alpha_2\Omega^{-1}\varepsilon_1+16A^2k^2\alpha_1^2\alpha_2^3\Omega^{-2}\varepsilon_2$，$d_{01}=b_{01}-4\alpha_1^2\alpha_2^2\Omega^{-1}\varepsilon_1+16k\alpha_1^4\alpha_2^4\Omega^{-2}\varepsilon_2$，$b_0=-a_0,d_{20}=-c_{20},d_{11}=-c_{11},g_1,g_2$ 至少为 ξ,η 的 3 次项或 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的 2 次项,式中 $\Omega=A^2k^2+4\beta\alpha_1^2\alpha_2^2$.

令

$$\begin{cases}\xi=X,\\ \eta=e_1+e_2X+e_3Y+e_4X^2+e_5XY.\end{cases}\tag{21}$$

其中 $e_1=\dfrac{-a_0}{c_{01}}$，$e_2=\dfrac{c_{11}a_0-c_{10}c_{01}}{c_{01}^2}$，$e_3=\dfrac{1}{c_{01}}$，$e_4=-\dfrac{c_{20}+\dfrac{c_{11}(c_{11}a_0-c_{10}c_{01})}{c_{01}^2}}{c_{01}}$，$e_5=-\dfrac{c_{11}}{c_{01}^2}$.从而系统(20)可化为

$$\begin{cases}\dot{X}=Y,\\ \dot{Y}=q_0+q_1X+q_2Y+q_3X^2+q_4XY+q_5Y^2+\text{h.o.t.}\end{cases}\tag{21}$$

其中 $q_0=\dfrac{b_0+d_{01}e_1}{e_3}$，$q_1=\dfrac{d_{10}+d_{01}e_2+d_{11}e_1}{e_3}-\dfrac{e_5(b_0+d_{01}e_1)}{e_3^2}$，$q_2=\dfrac{d_{01}e_3-e_2}{e_3}$，$q_3=\dfrac{d_{01}e_4+d_{20}+d_{11}e_2}{e_3}-\dfrac{e_5(d_{10}+d_{01}e_2+d_{11}e_1)}{e_3^2}$，$q_4=\dfrac{d_{01}e_5+d_{11}e_3-2e_4}{e_3}-\dfrac{e_5(d_{01}d_3-e_2)}{e_3^2}$，$q_5=-\dfrac{e_5}{e_3}$.

再令 $x=X+\dfrac{q_2}{q_4},y=Y$,代入系统(21)得

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=h_0+h_1x+q_3x^2+q_4xy+q_5y^2+\text{h.o.t.}\end{cases}\tag{22}$$

其中 $h_0 = q_0 - \frac{q_1 q_2}{q_4} + \frac{q_2^2 q_3}{q_4^2}$, $h_1 = q_1 - \frac{2q_2 q_3}{q_4}$.

引入新的时间变量 τ,满足 $\mathrm{d}t = (1 - q_5 x)\mathrm{d}\tau$,仍记 τ 为 t,令 $x_1 = x, y_1 = y(1 - q_5 x)$,则得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = \lambda_1 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_1^2 + \lambda_4 x_1 y_1 + \mathrm{h.o.t.} \end{cases} \tag{23}$$

其中 $\lambda_1 = h_0, \lambda_2 = h_1 - 2h_0 q_5, \lambda_3 = h_0 q_5^2 - 2h_1 q_5 + q_3, \lambda_4 = q_4$.

最后令 $\xi_1 = \frac{\lambda_4^2}{\lambda_3} x_1, \xi_2 = \frac{\lambda_4^3}{\lambda_3^2} y_1, \tau = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} t$,得

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \tau_1 + \tau_2 \xi_1 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \mathrm{h.o.t.} \end{cases} \tag{24}$$

其中 $\tau_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_4^4}{\lambda_3^3}, \tau_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_4^2}{\lambda_3^2}$.

最后,根据 Kuznetsov[14] 中的定理,我们可以得到在原点附近分支曲线的表达式.

定理 7 设(H_1),(H_2) 成立,则系统(1) 拥有下列分支特性:

(1) 有鞍结点分支曲线 $SN = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid 4\lambda_1\lambda_3 = \lambda_2^2\}$;

(2) 有 Hopf 分支曲线 $H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0\}$;

(3) 有同宿环分支曲线 $HL = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid 25\lambda_1\lambda_3 + 6\lambda_2^2 = 0 + o(\| \varepsilon \|)^2\}$.

4 结 论

本文建立了一类具有非线性传染率函数的 SIS 型传染病模型,考虑自然死亡率和因病死亡率、人口的常数输入等种群动力学因素,分析了系统无病平衡点和地方病平衡点的存在性及其局部稳定性,利用 Dulac 函数和 Hopf 分支理论得到系统不存在周期运动以及系统存在周期运动的条件,并利用全局分支理论研究了模型的 BT 分支,找到了系统所具有的鞍结点分支曲线、Hopf 分支曲线和同宿轨分支曲线,再现了退化平衡点附近的轨线变化规律.

参考文献:

[1] CAPPASSO V. Mathematical structures of epidemic systems[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

[2] BRAUER F, DRIESSCHE P V D. Models for translation of disease with immigration of infectives[J]. Math Biosci, 2001, 171: 143-154.

[3] WU L I, FENG Z L. Homoclinic bifurcation in an SIQR model for childhood diseases[J]. J Diff Equat, 2000, 168: 150-167.

[4] COOKE K, DRIESSCHE P V D, ZOU X. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models[J]. J Math Biol, 1999, 39: 332-352.

[5] HETHCOTE H W. The mathematics of infectious disease[J]. SIAM Review, 2000, 42(2): 599-653.

[6] LIU W M, HETHCOTS H W, LEVIN S A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates [J]. J Math Biol, 1987, 25: 359-380.

[7] LIU W M, LEVIN S A, IWASA Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models [J]. J Math Biol, 1986, 23: 187-204.

[8] LIZANA M, RIVERO H. Multi-parametric bifurcations for a model in epidemiology[J]. J Math Biol, 1996, 35: 21-36.

[9] GLENDINNING P, PERRY L P. Melnikov analysis of chaos in a simple epidemiological model[J]. J Math Biol, 1997, 35: 359-373.

[10] DERRICK W R, DRIESSCHE P V D. Homoclinic orbits in a disease transmission model with nonlinear incidence and non-constant population [J]. Disc and Conti, 2003(3): 299-309.

[11] RUAN S G, WANG W D. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. J Diff Equa, 2003, 188: 135-163.

(下转第 447 页)