云南大学学报（自然科学版），2008，30（2）：109～112　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

限制的星划分问题*

张同全[1]，李伟东[2]，李建平[2]
（1.云南大学 物理科学技术学院非线性中心，云南 昆明　650091；
2.云南大学 数学与统计学院数学系，云南 昆明　650091）

摘要： 研究了边赋权图上 2 类具有权重限制 L 的最小基数星划分问题－最小基数 $S(L)$ 划分问题和最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的困难性．得到如下结果：① 证明了一般图上最小基数 $S(L)$ 划分问题的 NP－完全性；② 证明了一般图上最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的 NP－完全性，并证明了对于任意小的正数 ε，一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题不存在 $(3/2-\varepsilon)$－近似算法，除非 $P=NP$．

关键词： 最小基数；$S(L)$ 划分问题；$S_{\sum}(L)$ 划分问题；NP－完全性；近似算法
中图分类号： O 157.5　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0258－7971(2008)02－0109－04

给定一个边赋权图 $G=(V,E;w)$ 以及正整数 L，这里 V 为顶点集合，E 为边集合，$w:E\to Z^{+}$ 为边赋权函数．求图 G 的一个划分 $S_1,S_2,\cdots,S_k$，使得对于 $i=1,2,\cdots,k$，都有 S_i 是一个星，其顶点集合 $V(S_i)\subseteq V$，边集合 $E(S_i)\subseteq E$，并且 $\bigcup_{i=1}^{k}V(S_i)=V$．此时，星的定义为：如果图 S 满足 $|V(S)|=1$ 或者 $|V(S)|\geqslant 2$，并且有一个顶点 v 的度（即与 v 相连的边的数目）为 $\deg(v)=|V(S)|-1$，而其它任何点 $u\in V(S)-\{v\}$ 的度 $\deg(u)=1$，则称图 S 为一个（颗）星．于是，最小基数 $S(L)$ 划分问题和最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题可以用下面的定义分别给出．

定义 1　最小基数 $S(L)$ 划分问题： 给定一个边赋权图 $G=(V,E;w)$ 以及正整数 L，求图 G 的一个满足对于任意 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$，任意边 $e\in E(S_i)$，都有 $w(e)\leqslant L$ 的星划分 $S_1,S_2,\cdots,S_k$，目标函数为使得星的个（颗）数 k 达到最小．

定义 2　最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题： 给定一个边赋权图 $G=(V,E;w)$ 以及正整数 L，求图 G 的一个满足对于任意 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$，都有 $w(E(S_i))=\sum_{e\in E(S_i)}w(e)\leqslant L$ 成立，并且 $V(S_i)\cap V(S_j)\neq\emptyset$ 的充要条件为 $i=j$ 的星划分 $S_1,S_2,\cdots,S_k$，目标函数为使得星的个（颗）数 k 达到最小．

如果星划分 $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ 使其在满足相应条件下的目标函数值达到最小，则称该划分为图 G 上相应的最小基数划分问题的一个最优划分．

蔡延光等研究了边赋权图 G 上最小基数 ω－路划分问题，即把图 $G=(V,E;w)$ 划分成满足对于任意 $i=1,2,\cdots,k$，都有顶点集合 $V(P_i)\subseteq V$，边集合 $E(P_i)\subseteq E$，并且 $\bigcup_{i=1}^{k}V(P_i)=V$，对于任意的 $1\leqslant i,j\leqslant k$，$V(P_i)\cap V(P_j)\neq\emptyset$ 的充分必要条件为 $i=j$ 的路集合 $\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$，使得对于任意 $i=1,2,\cdots,k$，都有 $w(P_i)=\sum_{e\in E(P_i)}\leqslant\omega$，而路的条数 k 达到最小．他们给出了该问题在一般图上的 NP－完全性的证明，并设计出了边赋权路、树、森林上该问题的线性时间算法[1]．对于一般图上最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的 NP－完全性可以由最小基数 ω－路划分问题的 NP－完全性证明，在这里只要适当修改要构造

---

* **收稿日期：** 2007－04－02
基金项目： 国家自然科学研究基金资助项目（10561009）；云南省教育厅科学研究基金项目（06J011A）．
作者简介： 张同全（1979－　），男，山东人，博士生，主要从事可计算性与计算复杂性理论方面的研究．
通讯作者： 李建平（1965－　），男，云南人，博士生导师，教授，主要从事组合最优化理论、理论计算机科学等方面的研究．

的实例的边的权重即可.

本文考虑了边赋权图上最小基数 $S(L)$ 划分问题和最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题,容易发现这2类问题都比文献[2]中所研究的 $K_{1,m}$ 划分问题所受到的束缚更少,这里的结果告诉我们,束缚减少了,而难度没有降低:利用控制集问题的 NP – 完全性证明了一般图上最小基数 $S(L)$ 划分问题的 NP – 完全性.还分别利用3 – 划分问题和2 – 划分问题的 NP – 完全性证明了一般图上最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的 NP – 完全性和$(3/2-\varepsilon)$ 不可近似性.

本文所用到的其他记号和定义都可在文献[3 ~ 7]中找到.

1 最小基数 $S(L)$ 划分问题

首先利用控制集问题的 NP – 完全性来证明一般图上的最小基数 $S(L)$ 划分问题的 NP – 完全性.

定理1 一般图上的最小基数 $S(L)$ 划分问题是 NP – 完全的.

我们把一般图上的控制集问题的任何一个实例多项式地归结到一般图上的最小基数 $S(L)$ 划分问题.考虑控制集问题的一个实例 I:给定了图 $G=(V,E)$,正整数 $K\leqslant|V|$.是否存在一个点集合 $V'\subseteq V$,满足 $|V'|\leqslant K$,使得对于所有的点 $u\in V-V'$ 都存在一个点 $v\in V'$,使得$\{u,v\}\in E$.

构造最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 如下:

构造图 $G'=(V',E';w)$,其中 $V'=V,E'=E$,对于任意 $e\in E'$ 都有 $w(e)=1$,令 $L=1$.

下面我们将证明论断:控制集问题的实例 I 有解的充分必要条件是最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 有目标函数值为 K' 且 $K'\leqslant K$ 的最优解.

(1) 假设控制集问题有解为:V'',则 $|V''|\leqslant K$.

下面构造最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 的可行解.

取 V'' 中的所有点为星的中心点,由控制集的定义可知道对于所有的点 $u\in V-V''$ 都存在一个点 $v\in V''$,使得$\{u,v\}\in E$.对于每一个 $u\in V-V''$,我们只选取一条这样的$\{u,v\}$,则得到 $|V''|$ 个星,并且每条选取边的权重都为1.

由于 $L=1$,所以对于任意的边 $e\in S_i,i=1,2,\cdots,|V''|$,都有 $w(e)\leqslant L$ 成立.又由于 $|V''|\leqslant K$.于是,得到了最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 的一个目标函数值为K'' 且$K''\leqslant K$ 的可行解,设最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 的最优解的目标函数值为K',则必有 $K'\leqslant K''\leqslant K$.因此,若控制集问题的实例 I 有解,则最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 有目标函数值为K' 且$K'\leqslant K$ 的最优解.

(2) 假设最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 有目标函数值为K' 且$K'\leqslant K$ 的最优解为$\{S_i\}$,并且星 S_i 的中心为$v(i)$,由于 $\bigcup\limits_{i=1}^{K'}S_i=V$,并且 $L=1$,对于所有的点 $u\in V-\{v(i)\mid i=1,2,\cdots,K'\}$ 都存在一个点 $v\in\{v(i)\mid i=1,2,\cdots,K'\}$,使得$\{u,v\}\in E,i=1,2,\cdots,K'$.于是,得到了图 G 的一个控制集 $V'=\{v(i)\mid i=1,2,\cdots,K'\}$.由于 $K'\leqslant K$,且 $V'=K'$,则 $V'\leqslant K$.因此,若最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 有目标函数值为K' 且$K'\leqslant K$ 的最优解,则控制集(判定性)问题有解.

由于控制集问题是 NP – 完全的[8],说明最小基数 $S(L)$ 划分问题的实例 I' 是NP – 完全的.因此,一般图上的最小基数 $S(L)$ 划分问题是 NP – 完全的.证毕.

定理1告诉我们了一个事实:我们不可能在多项式时间内解决一般图上的最小基数 $S(L)$划分问题.

2 最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题

下面我们用3 – 划分问题来研究一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的 NP – 完全性.

定理2 一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题是 NP – 完全的.

证明 我们把3 – 划分问题的任何一个实例多项式归结到边赋权图上最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的一个实例.

考虑3 – 划分问题的一个实例 I:给定了一个由 $3N$ 个正整数组成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{3N}\}$,正整

数 B,并且$\frac{B}{4} < a_i < \frac{B}{2}(1 \leqslant i \leqslant 3N)$,$\sum_{i=1}^{3N} = NB$.是否存在 A 的一个划分$A_1, A_2, \cdots, A_N$,使得对于任意的 $i = 1,2,\cdots,N$ 都有 $\sum_{a \in A_i} a = B$?

构造最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 如下:

构造图 $G = (V, E; w)$,其中 $V = \{s_1, s_2, \cdots, s_N; v_1, v_2, \cdots, v_{3N}\}$,$E = \{s_i v_j \mid i = 1,2,\cdots,N; j = 1,2,\cdots,3N\}$,$w(s_i v_j) = a_j$,$L = B$.记 $V_1 = \{s_1, s_2, \cdots, s_N\}$;$V_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_{3N}\}$.

下面我们将证明论断:3 - 划分问题的实例 I 有解当且仅当最小基数$S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 有目标函数值为 N 的最优解.

(1) 设 3 - 划分问题的实例 I 有解为

$A_1 = \{a_{1_1}, a_{1_2}, a_{1_3}\}, A_2 = \{a_{2_1}, a_{2_2}, a_{2_3}\}, \cdots, A_N = \{a_{N_1}, a_{N_2}, a_{N_3}\}$.

下面构造 I' 的可行解 $S_1, S_2, \cdots, S_N$.

取 $V(S_i) = \{s_i, v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}\} \mid i = 1,2,\cdots,N\}$.

易知,诱导子图 $G[S_i]$ 的边集合为 $E_i = \{s_i v_{i_j} \mid i = 1,2,\cdots,N; j = 1,2,3\}$,则 $G[S_i]$ 是一颗星,并且对于 $i = 1,2,\cdots,N$,有

$w(E[S_i]) = w(s_i v_{i_1}) + w(s_i v_{i_2}) + w(s_i v_{i_3}) = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} = B \leqslant L = B$.

于是 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 是最小基数$S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 的目标函数值为N 的一个可行解.假设最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 的最优解的目标函数值为N',则必有 $N' \leqslant N$.

又由于每一个 $v_j(j = 1,2,\cdots,3N)$ 都要被最优划分所覆盖,并且最优划分的每一个连通分支 $S_i'(i = 1,2,\cdots,N')$ 都满足 $w(E(S'_i)) \leqslant B$,则有$\sum_{j=1}^{3N} a_j = NB = \sum_{i=1}^{N'} w(E(S_i')) \leqslant N'B$ 成立,于是可得 $N \leqslant N'$,再由上面的不等式得 $N = N'$.

以上说明 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 是I' 的目标函数值为N 的一个最优解.

(2) 设 I' 有目标函数值为N 的最优解$S_1, S_2, \cdots, S_N$,使得

$$w(E[S_i]) \leqslant B = L, i = 1,2,\cdots,N.$$

则每个分支必恰好为由 3 个 V_2 中的点和 1 个 V_1 中的点所组成的连通星图.因此不妨设

$$V(S_1) = \{s_{\pi(1)}, v_{1_1}, v_{1_2}, v_{1_3}\},$$
$$V(S_2) = \{s_{\pi(2)}, v_{2_1}, v_{2_2}, v_{2_3}\},$$
$$\cdots$$
$$V(S_N) = \{s_{\pi(N)}, v_{N_1}, v_{N_2}, v_{N_3}\},$$

其中 $\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(N)$ 是 $1,2,\cdots,N$ 的一个排列.

由于最小基数为 N,则 $NB = \sum_{i=1}^{N} w(E[S_i]) \leqslant NL = NB$.因此,对于任意 $i = 1,2,\cdots,N$,都有

$w(E[S_i]) = w(s_{\pi(i)} v_{i_1}) + w(s_{\pi(i)} v_{i_2}) + w(s_{\pi(i)} v_{i_3}) = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3}\} = B$.

取 $A_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$,则 $\sum_{a \in A_i} a = B$.说明 3 - 划分问题有解.

由于 3 - 划分问题是 NP - 完全的[8],说明最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 也是NP - 完全的.因此,一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题是 NP - 完全的.

证毕.

一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题不仅是 NP - 完全的,还是$(3/2 - \varepsilon)$ 不可近似的,即对于任意小的正数 ε,不存在任何多项式算法,使得算法的输出解与最优解的比率 r 满足$r \leqslant (3/2 - \varepsilon)$,除非 $P = NP$.下面以定理的形式给出这一性质.

定理 3　对于任意小的正数 ε,一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题不存在近似值为$(3/2 - \varepsilon)$ 的多

项式时间算法,除非 $P = NP$.

证明 反证,假设存在这样的算法 $\mathscr{A}$,我们将要证明这样的一个算法 $\mathscr{A}$ 可以在多项式时间内解决 2 − 划分问题.

把 2 − 划分问题的任何一个实例多项式归结到最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的一个实例.考虑 2 − 划分问题的一个实例 I:给定了 n 个数的集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.是否存在 A 的一个划分 A_1, A_2 使得

$$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{b \in A_2} b?$$

构造最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 如下:

构造图 $G = (V, E; c)$,其中 $V = \{s_1, s_2, s_3; v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $E = \{s_i v_j \mid i = 1,2,3; j = 1,2,\cdots,n\}$, $w(s_i v_j) = a_j$, $L = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j$.其中:$S = \{s_1, s_2, s_3\}$.

显然,$S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 有解.这一多项式归结满足以下条件:

(1) 如果 2 − 划分问题有解,则 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 有目标函数值为 2 的最优解,由于算法 $\mathscr{A}$ 是一个 $(3/2 - \varepsilon)$ 近似算法,所以其输出解 OUT 应满足 OUT < 3.

(2) 如果 2 − 划分问题无解,则 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的实例 I' 有目标函数值大于 2 的最优解,由于算法 $\mathscr{A}$ 是一个近似值为 $(3/2 - \varepsilon)$ 近似算法,所以其输出解 OUT 应满足 OUT $\geqslant 3$.

在情形(1),当在实例 I' 上运行时,$(3/2 - \varepsilon)$ 近似算法 $\mathscr{A}$ 一定给出了一个最优解 2,这是由于基数的整数性.因此,利用算法 $\mathscr{A}$ 可以区分出 2 − 划分问题的 2 种可能,因此解决了 2 − 划分问题.

而 2 − 划分问题是 NP − 完全的[8],因此,一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题不存在近似值为 $(3/2 - \varepsilon)$ 的多项式时间算法,除非 $P = NP$.

证毕.

这 2 个定理将启发研究者去努力寻求一般图上的最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的 k − 近似算法,其中 $k \geqslant \dfrac{3}{2}$.

3 结 论

本文主要研究了边赋权图上 2 类具有权重限制 L 的最小基数星划分问题 − 最小基数 $S(L)$ 划分问题和最小基数 $S_{\sum}(L)$ 划分问题的困难性,即分析了这 2 类问题的可计算性与计算复杂性,为以后的相关研究工作提供了启示,同时也为下一步的研究工作提出了问题,就是寻求这 2 类问题在特殊情形下的最优算法或者相应的近似算法.

参考文献:

[1] 蔡延光,张新政,钱积新,等.边赋权森林 ω-路划分的 $O(n)$ 算法[J].软件学报,2003,14(5):897-903.

[2] 张同全,李建平.二部图上的 $K_{1,m}$-划分问题[J].云南大学学报:自然科学版,2005,27(4):277-279.

[3] Takuro Fukunaga,Hiroshi Nagamochi. Approximation algorithms for the b-edge dominating set problem and its related problems[C]//Lecture Notes in Computer Science (LNCS)3595,Berlin,Heidelberg:Springer-Verlag,2005.

[4] 田丰,马仲蕃.图与网络流理论[M].北京:科学出版社,1987.

[5] VAZIRANI V V. Approximation algorithms[M]. Hongkong:Springer,2001.

[6] PPAPADIMITRIOU C H,STEIGLITZ K. Combinatorial optimization:algorithms and complexity[M].刘振宏,蔡茂诚,译.北京:清华大学出版社,1987.

[7] Ingo Wegener. Complexity theory[M]. Berlin Heidelberg:Springer-Verlag,2005.

[8] NGAREY M R,JOHNSON D S. Computer and intractability:a guide to the theory of NP-completeness[M]. San Francisco:W H Freeman and Company,1979.

(下转第 147 页)