

超导约瑟夫森结直流 $I-V$ 曲线的数值计算

贺庆丽, 张军琴, 林 涛, 姚合宝, 周引穗, 万 云

(西北大学 物理学系, 陕西 西安 710069)

摘要: 基于超导约瑟夫森结的 RCSJ 模型的解析式为一非线性的二阶微分方程, 对于该微分方程直接求解解析解比较困难, 故采用四阶龙格库塔法进行数值计算求解。经反复调用龙格库塔函数可得出约瑟夫森结的 $I-V$ 曲线。并且, 对这一求解过程及其关键部分进行了阐述, 数值计算结果定性地解释了实验结果。

关键词: 约瑟夫森结; RCSJ 模型; 龙格库塔法; 回滞效应

中图分类号: O511+.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-274 X (2003)01-0013-03

超导约瑟夫森效应是指两块弱耦合的超导体之间存在着相位相关的隧道电流的物理性质。自 1962 年英国的约瑟夫森从理论上预言该效应以来, 超导约瑟夫森结已发展了多种形式的弱耦合结构 (SIS, SNS, 微桥结、点接触结、双晶结、台阶结等)。为了计算方便, 常常忽略结电阻的电压波动及桥区涡流随机起伏造成的热噪声电流, 而将各种约瑟夫森结均等效为一超流源、交流电容和结电阻并联电路模型 (RCSJ 模型)。该模型的电路方程为

$$I(t) = I_c \sin \psi + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt},$$

对这一方程选取不同的参数, 可化简为不同形式。若选用以下参数

$$i(\tau) = \frac{I(t)}{I_c},$$

$$\tau = \omega_0 t = \sqrt{\frac{2eI_c R}{h}} t,$$

$$G = \sqrt{\frac{h}{2eI_c C R^2}}.$$

电路方程化简为

$$i(\tau) = \frac{d^2 \psi}{a \tau^2} + G \frac{d\psi}{d\tau} + \sin \psi. \quad (1)$$

对于该微分方程直接求解解析解比较困难, 因而产生了机械模拟法^[1]、电路模拟法^[2]、相平面法^[3]等间接解法。但是, 在计算机高度发达的今天, 数值计

算方法以其简便、快速、准确、易行的优点, 得到更为广泛的应用。该方法的进一步扩展也会使得许多基于约瑟夫森效应的高性能超导电子器件有更为可靠的理论依据。

四阶龙格库塔法在求解微分方程时既可保证一定的计算精确度(截断误差为 $O(h^5)$), 又不影响计算时间复杂度和空间复杂度。基于以上优点, 我们采用四阶龙格库塔法求解这一方程, 并借助阻尼复摆振动模型中的一些概念、原理对计算结果进行了一些机理分析。

1 龙格库塔法简介

对于 n 阶微分方程的数值求解, 通常是将该 n 阶方程先转换为 n 个一阶微分方程的方程组, 再选用适当的解法进行求解。一阶微分方程的数值解法较多, 欧拉法简单、快速, 但精确度不高; 其他一些方法, 如线性多步法, 精度高, 在一些大型计算中有其独特的优点但其编程复杂、硬件要求高。为了既能保证计算精确度又能提高效率, 我们选用四阶龙格库塔法。

龙格库塔方法的基本思想是利用函数 $f(x, y)$ 在某些点处的值的线性组合, 来构造一类计算公式, 将其按泰勒展开与初值问题的解的泰勒展开式比较, 以确定其中的参数。四阶龙格库塔法的形式不是惟

收稿日期: 2001-12-13

基金项目: 陕西省教育厅专项基金资助项目(98JK128)

作者简介: 贺庆丽(1960-), 女, 陕西韩城人, 西北大学副教授, 从事薄膜材料及超导物理学研究。

一的,我们采用标准的四阶龙格库塔法进行求解。

对于如下的二阶微分方程,求解如下

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (2)$$

引入 $z = y'$ 后,式(2)化为一阶微分方程组,可得

$$\begin{cases} y' = z, y(x_0) = y_0, \\ z' = f(x, y, z), z(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (3)$$

其中标准四阶龙格库塔迭代公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \times z_n + \frac{h}{6}(l_1 + l_2 + l_3), \\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \\ l_1 = hf(x_n, y_n, z_n), \\ l_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h \times z_n}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}), \\ l_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h \times z_n}{2} + \frac{h \times l_1}{4}, z_n + \frac{l_2}{2}), \\ l_4 = hf(x_n + h, y_n + h \times z_n + \frac{h \times l_2}{2}, z_n + l_3). \end{cases} \quad (4)$$

将式(1)化为一阶方程组后为

$$\begin{cases} y' = z, y(\tau_0) = y_0, \\ z' = \rho - G \times z - \sin y, z(\tau_0) = y'_0. \end{cases} \quad (5)$$

利用迭代公式(4)便可对该方程组求解。

2 程序的流程图

程序流程图如图 1 所示。

在程序设计当中,对于每一给定的 $I(t)$ 值调用龙格库塔解法函数,求出每一 $I(t)$ 值所对应的 $\theta - \tau$ 和 $\frac{d\theta}{d\tau} - \tau$ 函数值,并可从任一点 $(\theta_n, \frac{d\theta_n}{d\tau}, \tau_n)$ 得出下一点 $(\theta_{n+1}, \frac{d\theta_{n+1}}{d\tau}, \tau_{n+1})$ 处的情况。程序的求解过程中初值的选取决定计算结果的准确性,计算中对于最初给定的 $I(t)$ 值,选取初值 $\frac{d\theta_{n_0}}{d\tau} = \theta_0 = 0^{[4]}$ 。一般

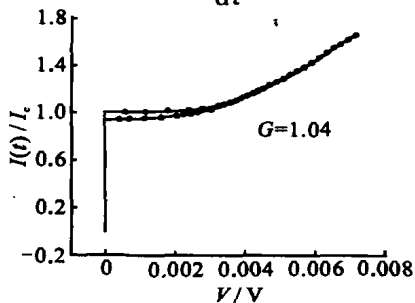


图 2 不同 G 值时的约瑟夫森结的直流 $I-V$ 曲线

Fig. 2 The direct current curves of Josephson junctions when G varies

情况下,约瑟夫森结的各参数为:临界电流 I_c 约为几十 μA 到几 mA ,电容为皮法量级,电阻为几 Ω 到几十 Ω ,由此得出约瑟夫森结的高频电磁波的振荡频率 $\frac{2eV}{h}$ 远大于 τ ,所以当 $\tau \leq 100$ 时,便可以满足 $\theta, \frac{d\theta}{d\tau}$ 有足够多的振荡周期来保证计算精确度,而这样选取 τ 也容易使得龙格库塔算法中的步长 h 小于 1 且不会增加计算量(只有 h 小于 1 才能保持算法的收敛性)。

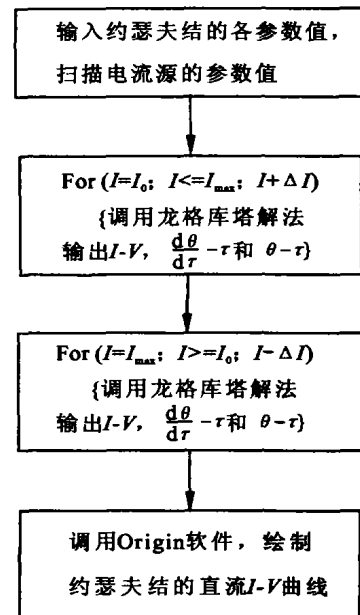
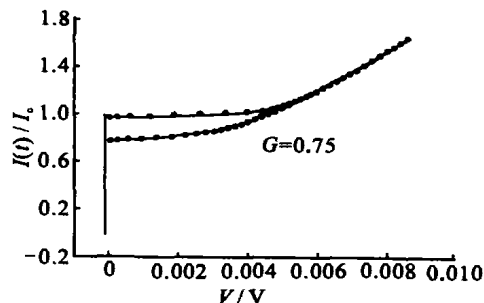


图 1 程序流程图

Fig. 1 Flow chart of the program

3 结果分析

根据不同约瑟夫森结的参数不同,得出一系列的 G 值,分别进行数值计算后,它们对应的直流 $I-V$ 曲线如图 2 所示。



当 G 大于等于 1 时,可由图中看出 $I-V$ 曲线没有明显的回滞现象。

当 G 小于 1 时,开始出现一些明显的回滞现象,并且随着 G 的减小对应的回滞电流变小;随着 G 趋于零,回滞电流 I_h (I_h 为回滞处对应的电流) 也趋于零,由图中还可看出回滞时电压的水平跳跃并非是连续的。

对于回滞情况,同一 V 值对应两个不同的 I 值, I 的具体取值取决于它的历史。 I 增加时对应于结两端电压为零(超流情况), I 减小时对应于另一种情况,这样随着外界电流的变化,便出现了回滞的 $I-V$ 曲线。这一过程已有详细描述^[3]。

由于约瑟夫森结电路方程和阻尼复摆振动方程类似,因而 W. C. Stewart 等用复摆振动模型对回滞现象进行了定性分析^[5];复摆旋转时,只有当外力矩所做的功大于等于阻尼力所消耗的能量时,才会使复摆不断地旋转,此时才有旋转解,即

$$\int_{-\pi}^{\pi} i(\tau) d\psi \geq \int_{-\pi}^{\pi} G \frac{d\psi}{d\tau} d\psi.$$

采用一次近似,用无阻尼无外源复摆振动模型来求

解 $i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G \frac{d\psi}{d\tau} d\psi$ 中的 $\frac{d\psi}{d\tau}$ 。

无阻尼无外源复摆振动情形

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \sin\psi = 0,$$

一次积分后为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 - \cos\psi = \text{常数},$$

因为当常数大于 1 时才会有旋转解,所以

$$\left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 = 2(1 + \cos\psi),$$

代入 $i(\tau)$ 的表达式可得

$$i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G \sqrt{2(1 + \cos\psi)} d\psi = \frac{4G}{\pi}.$$

即当 $\frac{I}{I_c} = \frac{4}{\pi} G$ 时,两块弱连接超导体之间的相位重新锁定,形成超流。由数值计算得到的回滞处的电流大小是和这样的理论计算完全符合的。

实验中,对制作在以角度差为 24° 的、YSZ 为衬底的 YBCO 薄膜上的双晶结和制作在 YSZ 为衬底的 GBCO 膜上的 2×4 微桥阵列分别进行了直流 $I-V$ 曲线测试。双晶结的 $I-V$ 曲线近似于 $G=1$ 所得

出的 RSJ 模型的计算结果,而在 2×4 微桥阵列中观测到了典型的回滞效应。虽然,对于在这一阵列微桥结中出现回滞效应的具体机理尚不能确论,但可以肯定的是,它的 G 值一定由于某种原因而偏小。通过实验结果和计算结果的比较我们近似得出 2×4 微桥阵列 $G=0.6$ 。

4 结 论

虽然超导约瑟夫森结的应用已不再是什么新奇的东西,但这一应用的理论依据却仍不很完善。许多基于约瑟夫森效应的超导器件的制作仅是靠电路模拟、实验测量、经验定取来获得。文中采用数值计算方法对最基本的约瑟夫森结进行了分析计算,计算结果定性地吻合实验结果。通过数值计算,不仅得到约瑟夫森结的 $I-V$ 曲线,还可得出 $\theta-\tau$ 和 $\frac{d\theta}{d\tau}-\tau$ 关系,若再考虑外界电磁波所引起的约瑟夫森结两端电压项的改变,我们还得出约瑟夫森结对电磁辐射的响应特性。将数值计算结果和物理分析结合起来,不仅免去纯数字的呆板无力,还可使约瑟夫森结的特性更为直观、形象。如今,超导数字电路、超导计算机研究和应用的迅速崛起,使得约瑟夫森结这一基础课题的研究变得更为迫切,而数值计算的介入将使通向这一坚垒的坎坷变成坦途。

参考文献:

- [1] 西北大学低温物理科研组. 超导隧道效应及其应用 [M]. 西安:西北大学出版社,1981.
- [2] FAN M H, WU P H. Interpretation of some experimental observations on a YBCO weak link in terms of series grain boundary junctions [J]. J Appl Phys, 1989,66(8):3 698-3 702.
- [3] 吴培亨. 约瑟夫森结电路的相平面解法 [J]. 物理, 1979,8(3):211-216.
- [4] 王其俊. 超导量子干涉器 [M]. 西安:西北大学出版社, 1988.
- [5] STEWART W C, Current-voltage characteristics of Josephson junctions [J]. Applied Physics Letters, 1968,12(8):277-280.

(编 辑 曾大刚)

(下转第 22 页)

离子的柱体,它的柱体长度 $L \gg d$ 柱体直径,柱体中看成是由多个脉动球源按线性叠加而形成,脉动球源的直径与柱体直径相等;② 当观测点离光击穿区的距离 $r \gg L$ 时,理论计算得到声场的声压和方向性与实验基本一致,在垂直于光传播方向,声压幅值与 r 成反比,与光击穿长度 L 成正比;③ 在垂直于光传播方向,声脉冲信号的声压幅值最大,沿光传播方向,声脉冲信号的声压幅值最小。

参考文献:

[1] QUAN K M, MACKENZIE H A. Photoacoustic genera-

tion in liquid with low optical absorption[J]. Ultrasonic, 1994, 32(3): 181-186.

[2] 威诒让,许龙江. 水下光击所激发的声场的方向特性[J]. 声学学报, 1991, 16(2): 145-151.

[3] 曹 辉,张小凤. 液体光击穿激发的辐射声场[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 1999, 27(2): 43-47.

[4] 杜功焕,朱哲民. 声学基础[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1988. 193-195.

[5] 特勒 E. 高能密度物理学[M]. 张伟华译. 北京:原子能出版社, 1982. 120-125.

(编 辑 曹大刚)

The research of directivity of the sound field through mechanism of laser-induced liquid breakdown

CAO Hui, SHANG Zhi-yuan

(Applied Acoustic Institute, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: The force regularity and directivity of the sound field through mechanism of laser-induced liquid breakdown are investigated both theoretically and experimentally according to the model. So a conclusion is drawn that the force regularity and directivity calculated by theory is in good agreement with experiment results.

Key words: plasma column; radial acoustic field; directivity

(上接第 15 页)

The numerical calculation of direct current $I-V$ curve of super-conducting Josephson junctions

HE Qing-li, ZHANG Jun-qin, LIN Tao,
YAO He-bao, ZHOU Yin-sui, WANG Yun

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Because the RCSJ models of super-conducting Josephson junctions are nonlinear second-order equations, it was difficult to give them analysis solutions, so the function is solved by numerical calculation. The $I-V$ characteristic of Josephson junctions was obtained by calling Runge-Kutta function repeatedly. Corresponding procedure and crucial part were described in detail. Results of numerical calculation explained the result of experimental qualitatively.

Key words: Josephson junctions; RCSJ model; Runge-kutta function; echo effect