2002年8月
第32卷第4期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Aug. 2002
Vol. 32 No. 4

Artinian 斜半群环

田俊华

(咸阳师范学院 计算机科学系,陕西 咸阳 712000)

摘要:讨论了斜半群环$R*_\theta S$为Artin环时,环R与半群S所应满足的必要与充分条件,从而对原有一些结果进行了推广。

关 键 词:斜半群环;斜群环;Artin 环;群环;半群环

中图分类号:O153.3　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-274X(2002)04-0357-04

文献[1]证明了如下结论:"对于有单位元的结合环和任意群G,群环$R[G]$是Artin环,当且仅当环R是Artin环、群G是有限群"。这个结果十分优秀。文献[2]中考虑了半群环的相应问题,证明了:"若半群环$R[S]$是左和右的Artin环,则环R是左和右的Artin环,S是有限幺半群;反之,如果R是Artin环,S是有限幺半群,则半群环$R[S]$是Artin环"。

本文考虑斜半群环的上述问题。

设R是含有单位元的结合环,S是一个幺半群,θ是S到环R的自同构群$\mathrm{Aut}(R)$的一个半群同态。依照文献[3],我们定义环

$$R*_\theta S=\sum_{s\in S}\oplus R_s,$$

其中加法按分量相加,乘法为$(r_1s_1)\cdot(r_2s_2)=r_1r_2^{\theta(s_1)}s_1s_2$,$\forall\ s_1,s_2\in S$,$\forall\ r_1,r_2\in R$在$\sum\oplus R_s$的自然延拓。则易验证,$R*_\theta S$在上述运算下成为一个结合环,称其为半群$S$在环$R$上关于同态$\theta$的斜半群环。类似地,可定义群$G$在环$R$上关于同态$\theta$的斜群环。

显然,斜群环、斜半群环是环与群、环与半群的广义交叉积,当因子组为平凡因子组时的特殊情况。如果进一步让θ为零同态,则$R*_\theta S$就成为一般的半群环,故而斜半群环包含半群环、斜群环、群环为其特殊情形。从而,本文的结果是文献[1,2]中相应结论的推广。

注　本文中环均指有单位元的结合环,模均是左幺模。文中涉及半群理论的术语与记号,如无特别说明,均与文献[4]相同。

1 引 理

定 义　设S是一个幺半群,S的子集H称为S的同态核子半群,若存在半群S到另一半群S'的半群同态$\varphi:S\longrightarrow S'$,使得$H=\{s\in S\mid\varphi(s)=\varphi(1)\}$。

由上所述定义不难看出,S的子半群H是同态核子半群,当且仅当H是关于S上某同余关系"$\sim$",单位元1所在的等价类。同态核子半群H有如下性质,$\forall\ s\in S$,若$sh\in H$对于某$h\in H$成立(或$hs\in H$),则必有$s\in H$。显然,群的子群亦有此性质。

引理1　设A是有单位元的环,R是A的子环且与A有相同的单位元。若作为左(右)R-模,${}_RR(R_R)$是${}_RA(A_R)$的直和项,则对R的任一右(左)理想I,有

$$IA\cap R=I,(AI\cap R=I)。$$

证明略。

引理2　设R是有单位元的环,S是一幺半群,θ是S到$\mathrm{Aut}(R)$的半群同态。若斜半群环$R*_\theta S$是左(右)Artin环,则对S的任意同态核子半群H,斜半群环$R*_{\theta'}H$也是左(右)Artin环,此处$\theta'=\theta|_H$。特别地,环R自身是左(右)Artin环。

证 明　显然$R*_{\theta'}H$是$R*_\theta S$的子环,且与$R*_\theta S$有相同的单位元。

收稿日期:2001-12-10
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2000SL06)
作者简介:田俊华(1962-),男,陕西兴平人,咸阳师范学院讲师,从事抽象代数与计算机应用方面的研究。

由同态核子半群的性质,可验证 $\sum_{g\in S\setminus H}\oplus R_g$ 作成左(右)$(R*_\theta H)$-模,于是,有模的直和分解式

$$_{(R*_\theta H)}(R*_\theta S)=$$
$$(R*_\theta H)^{(R*_\theta H)}\oplus_{(R*_\theta H)}(\sum_{g\in S\setminus H}\oplus R_g),$$
$$((R*_\theta S)_{(R*_\theta H)}=(R*_\theta H)_{(R*_\theta H)}$$
$$\oplus(\sum_{g\in S\setminus H}\oplus R_g)_{(R*_\theta H)})。$$

由引理 1,映射 $f:I|\longrightarrow I(R*_\theta S)$ $(I|\longrightarrow(R*_\theta S)I)$ 是环 $R*_\theta H$ 的右(左)理想格到环 $R*_\theta S$ 的右(左)理想格的一个严保序单一映射,故本引理结论成立。 □

引理 3 设 R 是有单位元的环,θ 是幺半群 S 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的一个半群同态。B 是 R 的子环且与 R 有相同的单位元,$\forall\varphi\in\theta(S)\subseteq\mathrm{Aut}(R)$,$\varphi(B)=B$(记为 $B^{\theta(S)}=B$),如果作为右(左)B-模,$B_B({}_BB)$ 是 $R_B({}_BR)$ 的直和项,则对 $B*_\sigma S$ 的任意左(右)理想 I,有

$$(R*_\theta S)I\cap(B*_\sigma S)=I,$$
$$(I(R*_\theta S)\cap B*_\sigma S=I),$$

其中 σ 是 θ 所诱导出的由 S 到 $\mathrm{Aut}(B)$ 上的半群同态:$\sigma(s)=\theta(s)|_B$。

证 明 只证右模情形。左模情形类似可证。

设 $R_B=B_B\oplus C_B$,由于 $\theta(S)\subseteq\mathrm{Aut}(R)$ 中元皆是环同构,故 $R_B^{\theta(S)}=B_B^{\theta(S)}\oplus C_B^{\theta(S)}=R$,但 $B^{\theta(S)}=B$,从而,$C^{\theta(S)}=C$。

此时 $\sum_{s\in S}\oplus C_s$ 作成$(B*_\sigma S)$-模。于是有模的直和分解式

$$(R*_\theta S)_{(B*_\sigma S)}=(B*_\sigma S)_{(B*_\sigma S)}\oplus\cdot(\sum_{s\in S}\oplus C_s)_{(B*_\sigma S)}。$$

又,$B*_\sigma S$ 作为 $R*_\theta S$ 的子环,与 $R*_\theta S$ 有相同的单位元,故由引理 1 得本引理结论成立。 □

引理 4 环 R,B 如引理 3 所设。如果斜半群环 $R*_\theta S$ 是右(左)Artin 环,则斜半群环 $B*_\sigma S$ 亦然。

2 主要结果

定理 1 设 R 是一本原环,S 是一幺半群,θ 是 S 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的半群同态。若斜半群环 $R*_\theta S$ 是左、右 Artin 环,则 S 是有限幺半群。

证 明 由引理 2 知,R 本身是左、右 Artin 环,于是,R 是单 Artin 环。现以 F 记 R 的中心,F 必是域。

显然 $F^{\theta(S)}=F$ 又作为 R 的子环,F 与 R 有相同的单位元。下证${}_FF$ 是${}_FR$ 的直和项。

由于域作为自身上的模自然是内射模,则短正合列

$$o\longrightarrow{}_FF\longrightarrow{}_FR\longrightarrow{}_FR/{}_FF\longrightarrow o$$

分裂,从而${}_FF$ 是${}_FR$ 的直和项。同理,F_F 是 R_F 的直和项。由引理 4,则斜半群环 $F*_\sigma S$ 是左和右的 Artin 环,其中 σ 是 θ 所诱导出的 S 到 $\mathrm{Aut}(F)$ 的半群同态。

再以 $F^{\sigma(S)}$ 记 F 在 $\sigma(S)\subseteq\mathrm{Aut}(F)$ 下的不动子域,亦即

$$F^{\sigma(S)}=\{c\in F|c^{\sigma(s)}=c,\forall s\in S\}。$$

据引理 4,$F^{\sigma(S)}*_{\sigma'}S$ 是左、右 Artin 环,σ' 为 σ 所诱导出的 S 到 $\mathrm{Aut}(F^{\sigma(S)})$ 的半群同态。

但 $F^{\sigma(S)}*_{\sigma'}S$ 正是通常的半群环

$$F^{\sigma(S)}*_{\sigma'}S\cong F^{\sigma(S)}[S]。$$

由引理 2,S 是有限半群。 □

若局限于斜群环情形,$R*_\theta S$ 的单侧 Artin 性便足以保证群 S 的有限性。

推论 1 设 R 是本原环,G 是任意群,θ 是 G 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的群同态。若斜群环 $R*_\theta G$ 是 Artin 环,则 G 是有限群。

证 明 由于群 G 的子群 H 具有同态核子半群的性质:$\forall s\in G,sh\in H$ 或 $hs\in h$ 对某 $h\in H\Rightarrow s\in H$。故引理 2 ~ 4 中,以子群"代"同态核子半群,结论仍成立。则仿定理 1 之推理,应用定理 1,即可得本推论。 □

设 S 是任意半群,S 的子集 I 称为 S 的左(右)理想,若对任意 $x\in S,r\in I$,总有 $xr\in I(rx\in I)$。如果 S 自身是 S 的惟一左(右)理想,则称 S 是左单(右单)半群。

群作为半群当然是左单和右单半群。另一方面,左可消的左单半群叫作左群。左群必是一个群与一个左零乘半群的直积[4]。因之,左(右)单半群是比群广泛得多的一个半群类。

定理 2 设 R 是半本原环,S 是一个左单或右单的幺半群,θ 是 S 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的半群同态。如果 $R*_\theta S$ 是左和右的 Artin 环,则 S 是有限半群。

证 明 由引理 2,环 R 本身是左和右的 Artin 环,从而 R 是半单 Artin 环,不妨设

$$R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_n,$$

R_i 是单 Artin 环$(1\leqslant i\leqslant n)$。

令 $H_0=\{h\in S|\theta(h)=\theta(1)=1_R\}$,则 H_0 是 S 的一个同态核子半群。由引理 2,$R*_{\theta'}H_0\cong R[H_0]$ 是左和右的 Artin 环,其中$\theta'=\theta|_{H_0}$,由文献[2]中 Corollary2,H_0 是有限半群。

在 S 上定义元素之间的关系"~"如下

$$\forall a,b\in S,a\sim b\Leftrightarrow\theta(a)=\theta(b),$$

则 $\sim$ 是 S 上的同余关系。显然 $S/\sim\cong S/H_0\cong\theta(S)\subseteq\mathrm{Aut}(R)$。又由于 S 是左或右单的半群,如 $a\sim b$,则由于 $aS=S$ 或 $Sa=S$,存在 $x\in S$,使

$$ax=b\text{ 或 }xa=b。$$

于是,$\theta(a)=\theta(b)=\theta(a)\theta(x)$ 或 $\theta(a)=\theta(b)=\theta(x)\theta(a)$,但每一 $\theta(S)$ 中元是环同构,消去 $\theta(a)$ 得:$\theta(x)=1_R$,从而 $x\in H_0$,于是 $[a]_\sim\subseteq aH_0$ 或 $[a]_\sim\subseteq H_0a$。

显然,$aH_0\subseteq[a]_\sim$,$H_0a\subseteq[a]_\sim$。因而 $[a]_\sim=aH_0$ 或 $[a]_\sim=H_0a$。

从而,为证 S 有限,只需证 $\theta(S)=S/H_0$ 有限即可。

$\forall s\in S$,$\theta(s)$ 是环的自同构,而每一 R_i 皆为单环,则 $\theta(s)$ 作用于 $R=R_1\oplus\cdots\oplus R_n$ 上,相当于实现集合,$\{R_1,R_2,\cdots R_n\}$ 上的一个置换。在 $\theta(S)\subseteq\mathrm{Aut}(R)$ 上定义元素间的关系 ρ 如下

$$\forall\,\theta(a),\theta(b)\in\theta(S),\theta(a)\rho\theta(b)\Leftrightarrow$$
$$R_i^{\theta(a)}=R_i^{\theta(b)}(1\leqslant i\leqslant n)。$$

易知 ρ 是 $\theta(S)$ 上的一个同余关系,令

$$H_1=\{\theta(s)\mid\theta(s)\in\theta(S),R_i^{\theta(s)}=R_i,$$
$$i=1,2,\cdots,n\},$$

则 $\theta(S)/\rho\cong\theta(S)/H_1$,并且 $|\theta(S)/H_1|\leqslant n!$

以 ν 记 $\theta(S)$ 到 $\theta(S)/H_1$ 的典范同态,则

$$\theta(a)\rho\theta(b)\Leftrightarrow\nu(\theta(a))=\nu(\theta(b))。$$

$\forall\,\theta(b)\in[\theta(a)]_\rho$,存在 $\theta(x)\in\theta(S)$,使得

$$\theta(a)\theta(x)=\theta(b)\text{ 或 }\theta(x)\theta(a)=\theta(b),$$

则 $\nu(\theta(a)\nu(\theta(x))=\nu(\theta(b)$ 或 $\nu(\theta(x))\nu(\theta(a))=\nu(\theta(b))$,又每一 $\nu(\theta(s))$,$s\in S$ 都是 n 阶置换群 S_n 中一元,可消去 $\nu(\theta(a))$ 得 $\nu(\theta(x))=1$,亦即 $\theta(x)\in H_1$,故

$$[\theta(a)]_\rho=\theta(a)H_1,\text{或}[\theta(a)]_\rho=H_1\theta(a)。$$

于是,欲证 $\theta(S)=S/H_0$ 有限,只需证 H_1 有限即可。

由于 $_\theta S(S)$,把 θ 自然地延拓成环 $R*_\theta S$ 到 $R*_\delta\theta(S)$ 中的一个环满同态,其中 δ 是 $\theta(S)$ 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的同构嵌入。作为环 $R*_\theta S$ 的同态象,环 $R*_\delta\theta(S)$ 亦为左和右的 Artin 环。由引理 2,环 $R*_{\delta'}H_1$ 是左、右 Artin 环,其中 $\delta'=\delta|_{H_1}$。又由引理 4,$R_1*_{\delta''}H_1$ 仍是左和右的 Artin 环,δ'' 是 δ' 所诱导出的由 H_1 到 $\mathrm{Aut}(R_1)$ 的半群同态。但 R_1 是单 Artin 环,则是本原环。由定理 1,H_1 是有限半群。 □

定理 3　设 R 是有单位元的环,S 是左或右的幺半群,θ 是 S 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的半群同态。若斜半群环 $R*_\theta S$ 是左和右的 Artin 环,则环 R 是左和右的 Artin 环,S 是有限的。

证　明　以 $J(R)$ 记环 R 的 Jacobson 根基。由于 $J(R)$ 在自同构下保持不变,故 θ 可诱导出 S 到 $\mathrm{Aut}(R/J(R))$ 的一个半群同态 σ:$\forall s\in S$,$\sigma(s)=\bar{\theta}(s)\in\mathrm{Aut}(R/J(R))$,其中 $\bar{\theta}(s)$ 是使得图 1 交换的惟一环同构。图中,ν 是 R 到 $R/J(R)$ 的典范同态。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta(S)"] \arrow[d, "\nu"'] & R \arrow[d, "\nu"] \\ R/J(R) \arrow[r, "\bar{\theta}(S)"] & R/J(R) \end{tikzcd}$$

图 1　交换图

Fig. 1　Commutative diagram

再把 ν 延拓成斜半群环同态 $\bar{\nu}$:$R*_\theta S\longrightarrow(R/J(R))*_\sigma S$,则环 $(R/J(R))*_\sigma S$ 亦是左和右的 Artin 环。此处 $R/J(R)$ 是半本原环 。由定理 3,S 是有限半群。

再由引理 2 可得环 R 的左和右 Artin 性。 □

半群 S 的有限性对使斜半群环 $R*_\theta S$ 是 Artin 环也是充分条件。

定理 4　设 R 是有单位元的环,S 是有限幺半群,θ 是 S 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的半群同态。若环 R 是左 Artin 的,则斜半群环 $R*_\theta S$ 亦是左 Artin 环。

证　明　由于 $R*_\theta S=\sum\limits_{s\in S}\oplus R_s$ 作为左 R- 模是有限生成的,则模$_R(R*_\theta S)$ 是 Artin 模。

又由于 S 是幺半群,R 有单位元,则环 $R*_\theta S$ 也有单位元,故 $R*_\theta S$ 的左理想必是模$_R(R*_\theta S)$ 的子模,从而 $R*_\theta S$ 是左 Artin 环。 □

特别地,局限于斜群环情形,有以下的推论:

推论 2　设 R 是有单位元的环,G 是任意群,θ 是 G 到 $\mathrm{Aut}(R)$ 的一群同态,则斜群环 $R*_\theta G$ 为左 Artin 环当且仅当环 R 是左 Artin 的,群 G 是有限群。

证　明　充分性由定理 5 可立得。

又群 G 作为半群是左单的(也是右单的),故必要性由推论 2、定理 3、定理 4 可得。 □

于是,当环 R 有单位元,半群 S 是左单或右单的时,我们完全刻划了左(右)Artin 的斜半群环 $R*_\theta S$,这就推广了文献[1,2]中的主要结果。

参考文献:

[1] CONNELL I G. On the group ring[J]. Canad J Math, 1963, 15: 650-685.

[2] OKNINSKI J. Artinian semigroup rings[J]. Comm Alg, 1982, 10: 109-114.

[3] JESPERS, E. , Ω-krull rings and skew semigroup rings[J]. Comm, Alg. 1984, 12: 348-376.

[4] CLIFFORD A H, PRESTON G B. The Algebraic Theory of Semigroups[M]. Providence: Amer Math Soc, 1961.

(编 辑 曹大刚)

Artinian skew semigroup ring

TIAN Jun-hua

(Department of Computer Sicence, Xianyang Normal Collge, Xianyang 712000, China)

Abstract: The necessary and sufficient condition satisfied by a ring R and a semigroups S is discussed when skew semigroup rings $R_\theta^* S$ is artinian. Thus, all results extend I. G. Connell's and J. Okninski's results.

Key words: skew semigroup ring; skew group ring; artintian ring; group ring; semigroup ring

(上接第 356 页)

是一致非等度连续的。

对照混沌动力系统关于初始条件是敏感的定义,可得以下定理。

定理 4 (X, f) 是一个动力系统,则 (X, f) 关于初始条件是敏感的充要条件是映射族 $\{f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}$ 在 X 上是一致非等度连续的。

定理 5 (X, f) 是一个动力系统。若对 $x \in X$,存在 $\delta_0 > 0$,使得当 $d(y, x) < \delta_0$ 时,$d(f(y), f(x)) \leqslant d(y, x)$,则映射族 $\{f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}$ 在 x 处是等度连续的。

证 明 对任意的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_0\} > 0$,当 $d(y, x) < \delta$ 时,使得对任意的正整数 n,$d(f^n(y), f^n(x)) \leqslant d(f^{n-1}(y), f^{n-1}(x)) \leqslant d(y, x) < \varepsilon$,故映射族 $\{f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}$ 在 x 处是等度连续的。 □

由以上两定理可得如下推论。

推论 1 (X, f) 是一个混沌动力系统,则 f 在 X 上每一个点处都不是可压缩的。

推论 2 (X, f) 是一个混沌动力系统。则 f 不是一个压缩映射。

参考文献:

[1] 郑维行,王声望. 实变函数和泛函分析概论[M]. 北京:高等教育出版社,1989.

(编 辑 曹大刚)

A discussion on chaotic dynamic system

QU Han-zhang[1], SONG Guo-xiang[2]

(1. Department of Information and Automatic Control, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710061, China; 2. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Some properties on chaotic dynamic system are discussed; the set of the periodic points in the chaotic dynamic system and the set of the nonperiodic points in the chaotic dynamic system both are invariable under its mapping; it is concluded that its mapping can not be compressed mapping.

Key words: chaotic dynamic system; periodic point; nonperiodic point orbit