2003年12月
第33卷第6期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Dec. 2003
Vol. 33 No. 6

Gamma 算子加权逼近的点态结果

齐秋兰，郭顺生

(河北师范大学 数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016)

摘要：为研究 Gamma 算子逼近特征，利用改变的带权 K-泛函和带权光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)_w$，得到了 Gamma 算子加权逼近的特征刻划。

关 键 词：Gamma 算子；K-泛函；光滑模

中图分类号：O174.41 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-274X(2003)06-633-03

设函数 $f(x)$ 于 $(0,\infty)$ 上可积，Gamma 算子定义为

$$G_n(f,x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ux}u^n f(n/u)\mathrm{d}u。$$

Ditzian 和 Totik 给出了此算子的一个特征刻划[1]：

定理A 设 a,b 是任意数，$w(x)=x^a(1+x)^b$，$wf\in L_\infty(0,\infty)$，$\alpha\leqslant 1$，则

$$\|w(G_nf-f)\|=O(n^{-\alpha})\Leftrightarrow$$
$$\|w\Delta_{h\varphi}^2 f\|=O(h^{2\alpha}),$$

其中 $\varphi(x)=x$，$\Delta_{h\varphi}^2 f(x)=f(x+h\varphi(x))-2f(x)+f(x-h\varphi(x))$，范数 $\|\cdot\|$ 为上确界范。

Ditzian 引进了一个新的光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)$，并用它给出了 Bernstein 算子逼近的正定理[2]，从而统一了有关古典光滑模 $\omega^2(f,t)$ 和 Ditzian 模 $\omega_\varphi^2(f,t)$ 的结果。我们在文献[3]中用 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 给出了 Bernstein 算子线性组合的等价定理。本文将利用带权 K-泛函及带权光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)_w$ 给出 Gamma 算子加权逼近的点态结果。

1 基本定义

$w(x)=x^a(1+x)^b$，$a\geqslant 0$；

$C_{a,b}=\{f\in C_B(0,\infty)\,|\,wf\in L_\infty(0,\infty)\}$；

$\|f\|_0=\sup\limits_{x\in(0,\infty)}|w(x)\varphi^{\alpha(\lambda-1)}(x)f(x)|$；

$C_{\lambda,w}^0=\{f\in C_B(0,\infty)：f(0)=0,$
$\|f\|_0<\infty\}$；

$\|f\|_2=\sup\limits_{x\in(0,\infty)}|w(x)\varphi^{2+\alpha(\lambda-1)}(x)f''(x)|$；

$C_{\lambda,w}^2=\{f\in C_{\lambda,w}^0：wf'\in A.C._{loc},$
$\|f\|_2<\infty\}$；

$$\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)_w=\begin{cases}\sup\limits_{0<h\leqslant t}\|w\Delta_{h\varphi^\lambda}^2 f\|，a=0\text{ 或 }\lambda=1；\\ \sup\limits_{0<h\leqslant t}\|w\Delta_{h\varphi^\lambda}^2 f\|_{[t^*,+\infty)}+\sup\limits_{0<h<t^*}\|w\vec{\Delta}_h^2 f\|_{(0,12t^*]}，\\ \quad a>0\text{ 且 }0\leqslant\lambda<1，\end{cases}$$

$$\Omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)_w=\sup_{0<h\leqslant t}\|w\Delta_{h\varphi^\lambda}^2 f\|_{[(2h)^{\frac{1}{1-\lambda}},\infty)}，0\leqslant\lambda<1，$$

其中 $t^*=\begin{cases}(2t)^{\frac{1}{1-\lambda}}，0<t\leqslant\frac{1}{8}，0\leqslant\lambda<1；\\ 0，\quad\lambda=1，\end{cases}$

$\vec{\Delta}_h^2 f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$，

$\varphi(x)=x$，$\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$。

$$K_{\varphi^\lambda}(f,t^2)_w=\inf_{g'\in A.C._{loc}}\{\|w(f-g)\|+t^2\|w\varphi^{2\lambda}g''\|\}。$$

熟知有关系[1]：

$$\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)_w\sim K_{\varphi^\lambda}(f,t^2)_w。\tag{1}$$

为了考虑我们的问题，需要引入一种改变的 K-泛函：

$$K_\lambda^\alpha(f,t^2)_w=\inf_{g\in C_{\lambda,w}^2}\{\|f-g\|_0+t^2\|g\|_2\}。$$

本文中 C 表示与 n,x 无关的常数，不同地方可能取不同的值。

收稿日期：2002-08-10

基金项目：河北省自然科学基金资助项目(101090)；河北师范大学博士基金资助项目(103256)

作者简介：齐秋兰(1969-)，女，河南灵宝人，河北师范大学副教授，从事算子逼近论的研究。

2 几个引理

引理 1[1] 设 $f \in C_{a,b}$，则对任意 $x \in (0,\infty)$，有

$$w(x)|G_n(f,x)| \leqslant C \| wf \| 。$$

引理 2 设 $R_2(g,t,x) = \int_x^t (t-v)g''(v)\mathrm{d}v$，则

$$w(x)|G_n(R_2(g,\cdot,x),x)| \leqslant Cn^{-1}\varphi^{2(1-\lambda)}(x)\| w\varphi^{2\lambda}g'' \| 。$$

证 明 当 v 介于 x 与 $\frac{n}{u}$ 之间时，有[1]

$$\frac{|v - n/u|}{v^{2\lambda}} \leqslant \frac{|x-n/u|}{x^{\lambda}}(x^{-\lambda} + u^{\lambda}n^{-\lambda}),$$

结合

$$\left| w(x)\int_x^{\frac{n}{u}} v^{-a}(1+v)^{-b}\mathrm{d}v \right| \leqslant \left(1 + \left(\frac{ux}{n}\right)^a\right)\left(1+\left(\frac{1+x}{1+n/u}\right)^b\right)\left|\frac{n}{u} - x\right|,$$

有

$$w(x)|G_n(R_2(g,\cdot,x),x)| \leqslant$$

$$w(x)\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ux}u^n \left| \int_x^{\frac{n}{u}}\left(\frac{n}{u} - v\right)g''(v)\mathrm{d}v \right| \mathrm{d}u \leqslant$$

$$\| w\varphi^{2\lambda}g'' \| \frac{x^{n+1}}{n!}\int_{\frac{n}{x}}^{\infty} \mathrm{e}^{-ux}u^n \left|\frac{n}{u} - x\right|^2 x^{-\lambda}(x^{-\lambda} + u^{\lambda}n^{-\lambda}) \cdot$$

$$\left(1+\left(\frac{ux}{n}\right)^a\right)\left(1+\left(\frac{1+x}{1+n/u}\right)^b\right)\mathrm{d}u。$$

根据文献[1]及

$$x^{-2\lambda}(1+(ux/n)^{\lambda}) \leqslant 2x^{-2}(1+ux/n)x^{2(1-\lambda)},$$

可以得到：

$$w(x)|G_n(R_2(g,\cdot,x),x)| \leqslant Cn^{-1}\varphi^{2(1-\lambda)}(x)\| w\varphi^{2\lambda}g'' \| 。$$

引理 3 设 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1, 0 < \alpha < 2r$，则

$$\| G_n f \|_2 \leqslant Cn \| f \|_0 \quad (f \in C^0_{\lambda,w}), \tag{2}$$

$$\| G_n f \|_2 \leqslant C \| f \|_2 \quad (f \in C^2_{\lambda,w})。 \tag{3}$$

证 明 先证式(2)：由于

$$w(x)\varphi^{\alpha(\lambda-1)}(x)|G_n((t-x)^i f(t),x)| \leqslant \| f \|_0 w(x)\varphi^{\alpha(\lambda-1)}(x)\cdot |G_n((t-x)^i w^{-1}(t)\varphi^{-\alpha(\lambda-1)}(t),x)| \leqslant C\| f \|_0 n^{\frac{-i}{2}}x^i,$$

此处用到了：

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^n\frac{w^2(x)\varphi^{2\alpha(\lambda-1)}(x)}{w^2(nx/\tau)\varphi^{2\alpha(\lambda-1)}(nx/\tau)}\mathrm{d}\tau \leqslant C。$$

类似于文献[1]可得到有关 Gamma 算子相应的关系，故

$$|w(x)\varphi^{2+\alpha(\lambda-1)}(x)G''_n(f,x)| = |w(x)\varphi^{2+\alpha(\lambda-1)}(x)\cdot \sum_{i=0}^{2}Q_i(n,x)G_n((t-x)^i f(t),x)| \leqslant$$

$$Cx^2\sum_{i=0}^{2}Q_i(n,x)n^{\frac{-i}{2}}x^i \| f \|_0 \leqslant Cn\| f \|_0。$$

故式(2)得证。

下证式(3)：

$$w(x)|\varphi^{2+\alpha(\lambda-1)}(x)G''_n(f,x)| =$$

$$w(x)\left|\varphi^{2+\alpha(\lambda-1)}(x)\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^n\left(\frac{n}{\tau}\right)^2 f''\left(\frac{nx}{\tau}\right)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant$$

$$\| f \|_2 \frac{w(x)}{n!}\varphi^{2+\alpha(\lambda-1)}(x)\cdot \left|\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^n\left(\frac{n}{\tau}\right)^2 w^{-1}\left(\frac{nx}{\tau}\right)\varphi^{-2-\alpha(\lambda-1)}\left(\frac{nx}{\tau}\right)\mathrm{d}\tau\right|。$$

注意到不等式 $(1+y)^a \leqslant 2^a(1+y^a)$，对于 $b \geqslant 0$ 时，利用文献[1]及 $w(x)/w(nx/\tau) \leqslant (\tau/n)^a(1+\tau/n)^b$ 能推得：

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^n(n/\tau)^{2(1-\lambda)}(\tau/n)^a(1+\tau/n)^b\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{2^b}{n!}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^n((\tau/n)^{a-2(1-\lambda)} + (\tau/n)^{a-2(1-\lambda)+b})\mathrm{d}\tau \leqslant C。$$

对于 $b<0$ 时，利用 $w(x)/w(nx/\tau) \leqslant (\tau/n)^a(1+n/\tau)^{-b}$ 同样可得。

3 主要结论

定理 1 设 $f \in C_{a,b}$，$0 < \alpha < 2, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，则对于任意 $x \in (0,\infty)$，有

$$w(x)|G_n(f,x) - f(x)| \leqslant C\omega^2_{\varphi^{\lambda}}(f, n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x))_w。$$

证 明 根据 $K_{\varphi^{\lambda}}(f,t^2)_w$ 的定义，可选择 g，满足

$$\| w(f-g) \| + n^{-1}\varphi^{2(1-\lambda)}(x)\| w\varphi^{2\lambda}g'' \| \leqslant C\omega^2_{\varphi^{\lambda}}(f,n^{-1/2}\varphi^{1-\lambda}(x))_w。 \tag{4}$$

由于 $g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}\int_x^t (t-v)g''(v)\mathrm{d}v$ 及 $G_n(1,x) = 1, G_n(t-x,x) = 0$，利用引理 1，引理 2 并结合式(1,4)可以推得

$$w(x)|G_n(f,x) - f(x)| \leqslant C(\| w(f-g) \| + n^{-1}\varphi^{2(1-\lambda)}(x)\| w\varphi^{2\lambda}g'' \|) \leqslant C\omega^2_{\varphi^{\lambda}}(f,n^{-1/2}\varphi^{1-\lambda}(x))_w。$$

这样就证明了定理 1。

定理 2　设 $f\in C_{a,b}$，$0<\alpha<2$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则下列命题等价：

1) $w(x)|G_n(f,x)-f(x)|=O((n^{-1/2}\varphi^{-\lambda}(x))^{\alpha})$，

2) $\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)_w=O(t^\alpha)$。

注 1　当 $\lambda=1$ 时，$\omega_{\varphi}^{2\lambda}(f,t)_w$ 中的 $t^*=0$[1]，此时 a 可以为任意的数，定理 2 即为文献[1]中的结果。当 $0\leqslant\lambda<1$ 时，需限制 $a\geqslant 0$，否则定理不成立。

证　明　根据定理 1 知，定理 2 中的关系式"2⇒1"成立。

下面证明定理 2 中的关系"1⇒2"。

不失一般性，不妨设 $f\in C_{a,b}^0=\{f\in C_{a,b}:f(0)=0\}$。由 $K_\lambda^\alpha(f,t^2)_w$ 的定义，可选择 $g\in C_{\lambda,w}^2$，使得

$$\|f-g\|_0+n^{-1}\|g\|_2\leqslant 2K_\lambda^\alpha(f,n^{-1})_w。$$

由已知

$$w(x)|G_n(f,x)-f(x)|=O((n^{-1/2}\varphi^{-\lambda}(x))^\alpha),$$

有

$$w(x)\varphi^{\alpha(\lambda-1)}(x)|G_n(f,x)-f(x)|\leqslant Cn^{-\frac{\alpha}{2}}。$$

故由式(2,3)得：

$$K_\lambda^\alpha(f,t^2)_w\leqslant\|f-G_nf\|_0+t^2\|G_nf\|_2\leqslant C(n^{-\frac{\alpha}{2}}+t^2n\|f-g\|_0+t^2\|g\|_2)\leqslant C(n^{-\frac{\alpha}{2}}+t^2nK_\lambda^\alpha(f,n^{-1})_w)。$$

由 Lorentz 引理有 $K_\lambda^\alpha(f,t^2)_w\leqslant Ct^\alpha$。

特别地，当 $\lambda=1$ 时，有 $K_{\varphi^\lambda}(f,t^2)_w\leqslant Ct^\alpha$，即

$$\omega_{\varphi}^{2\lambda}(f,t)_w=O(t^\alpha)。$$

当 $0\leqslant\lambda<1$ 时，$x\geqslant(2h)^{\frac{1}{1-\lambda}}$，对于 $x-h\varphi^\lambda(x)\geqslant 0$，有[1]

$$\frac{x}{2}\leqslant x+(j-1)h\varphi^\lambda(x)\leqslant 2x,\quad j=0,1,2\quad(h\leqslant 1)。$$

即：当 $u\in[-h\varphi^\lambda(x),h\varphi^\lambda(x)]$ 时，有 $\varphi(x+(j-1)h\varphi^\lambda(x))\sim\varphi(x)$，$w(x+(j-1)h\varphi^\lambda(x))\sim w(x)$，故 $\forall\, g\in C_{\lambda,w}^2$，

$$\begin{aligned}&w(x)|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^2f(x)|\leqslant\\&w(x)|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^2(f-g)(x)|+w(x)|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^2g(x)|=\\&w(x)\left|\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{k}(f-g)\cdot(x+(1-k)h\varphi^\lambda(x))\right|+\\&w(x)\left|\iint_{-\frac{h\varphi^\lambda(x)}{2}}^{\frac{h\varphi^\lambda(x)}{2}}g''(x+u_1+u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\right|\leqslant\\&C\varphi^{-\alpha(\lambda-1)}(x)(\|f-g\|_0+\|g\|_2h^2\varphi^{2(\lambda-1)}(x))\leqslant\\&C\varphi^{-\alpha(\lambda-1)}(x)K_\lambda^\alpha\left(f,\frac{h^2}{\varphi^{2(1-\lambda)}(x)}\right)_w\leqslant Ch^\alpha。\end{aligned}$$

于是得到 $\Omega_{\varphi}^{2\lambda}(f,t)_w=O(t^\alpha)$。

再根据文献[1]

$$\omega_{\varphi}^{2\lambda}(f,t)_w\leqslant C\int_0^t\frac{\Omega_{\varphi}^{2\lambda}(f,\tau)_w}{\tau}\mathrm{d}\tau,$$

有

$$\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)_w\leqslant Ct^\alpha。$$

参考文献：

[1] DITZIAN Z, TOTIK V. Moduli of Smoothness[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[2] DITZIAN Z. Direct estimate for Bernstein polynomials[J]. J Approx Theory, 1994, 79(1): 165-166.

[3] GUO S. Pointwise approximation for linear combinations of Bernstein operators[J]. J Approx Theory, 2000, 107(1): 109-120.

（编　辑　亢小玉）

Pointwise weighted approximation by Gamma operator

QI Qiu-lan, GUO Shun-sheng

(College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: For investigating the approximation of Gamma operator, the characterization of approximation by Gamma operator with Jacobi weights was obtained by introducing a new K-functional and weighted modulus of smoothness $\omega_{\varphi}^{2\lambda}(f,t)_w$.

Key words: Gamma operator; K-functional; moduli of smoothness