2003 年 10 月 第 33 卷第 5 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Oct. 2003 Vol. 33 No. 5

广义分布参数系统的状态反馈稳定性问题

刘亚相[1],贾江涛[2],葛照强[2]

(1. 西北农林科技大学 生命科学学院,杨陵 712100;2. 西安交通大学 理学院,陕西 西安 710049)

摘要:讨论了 Hilbert 空间中一阶广义分布参数系统的状态反馈稳定性问题。应用泛函分析及算子理论的方法给出了使闭环广义分布参数系统渐进稳定的充分条件及状态反馈的构造性表达式。

关 键 词:广义分布参数系统;状态反馈稳定性;算子理论

中图分类号:O231,O177.1,TP271.61 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)05-0524-03

1 引言和主要结果的叙述

广义分布参数系统是比分布参数系统更广的一类系统[1~5],如研究复合材料中的温度分布、电缆中的信号传播、电磁耦合超导线路中的电压分布等问题时会出现这类系统[1~4]。它与分布参数系统有着本质的区别,当受到干扰时,不仅会使系统失稳,而且会引起脉冲等行为。广义分布参数系统的研究仅有 10 年历史,研究的内容主要集中在系统的求解和变结构控制上[1~4]。关于广义分布参数系统的状态反馈稳定性问题,研究结果较少。

对如下的一阶广义分布参数系统:

$$E\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+bu(t),x(t)=x_0。\quad (1)$$

其中 $x,b\in H$,H 是可析的 Hilbert 空间;E 和 A 是线性算子,E 是有界的但不可逆,最重要的问题之一是讨论该系统的状态反馈稳定性问题。本文应用泛函分析和算子理论方法,给出了存在状态反馈使所得闭环广义分布参数系统渐近稳定的充分条件,以及状态反馈的构造性表达式。

以下,$\sigma_p(E,A)=\{\lambda:\lambda$ 是 E 和 A 的广义特征值$\}$ 表示系统(1) 的有限极点全体所构成的集合或算子 E 和 A 的有限广义点谱全体所构成的集合;$\rho(E,A)=\{\alpha:\alpha$ 为使算子$(\alpha E-A)$ 成为正则算子的复数$\}$,对 $\alpha\in(E,A)$,$R(\alpha E,A)=(\alpha E-A)^{-1}$;线性算子 A^* 表示线性算子 A 的共轭算子,I 表示 H 中的恒等算子,$\bar{\lambda}$ 表示复数 λ 的共轭复数,$\|\cdot\|$ 表示范数,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积。

定义 1.1 如果对任意的 $x(0)\in H$,广义分布参数系统

$$E\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax,x(0)=x_0\quad (2)$$

的解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$,则称广义分布参数系统(2) 是渐近稳定的。

定义 1.2 对广义分布参数系统(1),如果存在 $g\in H$,使在状态反馈 $u(t)=\langle Ex,g\rangle$ 下闭环广义分布参数系统

$$E\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(A+G)x,x(0)=x_0\quad (3)$$

是渐近稳定的,则称广义分布参数系统(1) 是状态反馈渐近稳定的,其中 $Gx=\langle Ex,g\rangle b$。

假设 H 设系统(1) 中,A 是 H 中的闭稠定线性算子,E 和 A 仅有有限广义点谱 $\{\lambda_i\}_1^\infty$,且每一 λ_i 都是单重的;φ_i 表示相应于 λ_i 的 E 和 A 的广义特征向量;Ψ_i 表示相应于 $\bar{\lambda}_i$ 的 E^* 和 A^* 的广义特征向量,且 $\{\Psi_i\}_1^\infty$ 是 H 的一个无条件基的子集;$\{E\varphi_i\}_1^\infty$ 和 $\{\Psi_i\}_1^\infty$ 满足 $\langle E\varphi_i,\Psi_k\rangle=\begin{cases}1,k=i\\0,k\neq i\end{cases}(k,i=1,2,\cdots)$。

定 理 设广义分布参数系统(1) 满足假设 H,$\{\lambda_i\}_1^\infty$ 中满足 $\mathrm{Re}\lambda_i\geqslant 0$ 的 λ_i 有无限多个;存在正则算子 Q 和 P,使

收稿日期:2003-01-13

基金项目:国家自然科学基金项目(60274055);陕西省三五人才专项基金项目(199821);西安交通大学科研启动基金项目

作者简介:刘亚相(1962-),男,陕西扶风人,西北农林科技大学副教授,博士,主要从事经济数学等领域的研究工作。

$QEP=\begin{bmatrix}I_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,$QAP=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$,$Qb=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$,

$P^{-1}x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$, $x_1\in H_1$, $x_2\in H_2$, $H=H_1\oplus H_2$, A_{11} 的特征向量全体构成 H_1 的一个直交基,A_{21} 和 A_{22} 分别是有界线性算子和正则算子;$b_k=\langle b,\Psi_k\rangle\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,N)$,级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|b_k|^2$ 收敛,$\inf\limits_{i\neq k}|\lambda_i-\lambda_k|\geqslant\delta>0$;如果存在 $\{\alpha_i\}_1^\infty$ 满足 $\alpha_i\neq\alpha_k(i\neq k)$,$\alpha_i\in\rho(E,A)$,$\mathrm{Re}\alpha_i<0(i=1,2,\cdots)$,$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|\dfrac{\alpha_i-\lambda_i}{b_i}\right|^2$ 收敛,则存在 $g\in H$,且 g 的表达式为 $g=\sum\limits_{i=1}^{\infty}k_i\Psi_i$。其中

$$\bar{k}_i=\frac{\alpha_i-\lambda_i}{b_i}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\frac{\alpha_k-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}\quad(i=1,2,\cdots,N,\cdots),$$

使在状态反馈 $u=\langle Ex,g\rangle$ 下,由广义分布参数式(1)所得闭环广义分布参数式(3)渐近稳定。

2　定理的证明

令

$$f(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha_i}{z-\lambda_i}\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha_i-\lambda_i}{z-\lambda_i}\right),\quad(4)$$

则由定理的条件不难证明,$f(z)$ 是以 $\{\lambda_i\}_1^\infty$ 为单重极点的亚纯函数。由留数定理知,$f(z)$ 可表示为

$$f(z)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{z-\lambda_i}。\quad(5)$$

其中 c_i 是 $f(z)$ 在 λ_i 处的留数,且

$$c_i=(\lambda_i-\alpha_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\left(\frac{\alpha_k-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}\right),(i=1,2,\cdots),$$

由式(4)可知 $\alpha_i(i=1,2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的零点,从而由式(5)有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{\alpha_k-\lambda_i}=-1,(k=1,2,\cdots)。$$

由定理的条件可得

$$\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\left(\frac{\alpha_k-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}\right)\right|\leqslant\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}\right|\leqslant$$
$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\left(1+\left|\frac{\alpha_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_i}\right|\right)\leqslant\exp\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_i}\right|\right)\leqslant$$
$$\exp\left[\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\lambda_k}{b_k}\right||b_k|\right)\right]\leqslant$$
$$\exp\left[\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\lambda_k}{b_k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=$$
$$C<\infty\quad(i=1,2,\cdots),$$

令 $\bar{k}_i=-\dfrac{c_i}{b_i}=\dfrac{\alpha_i-\lambda_i}{b_i}\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\dfrac{\alpha_k-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}(i=1,2,\cdots,N,\cdots)$,由上述估计式及定理的条件可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|k_i|^2\leqslant C\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_i-\lambda_i}{b_i}\right|^2,$$

从而,级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|k_i|^2$ 收敛。令

$$g=\sum_{i=1}^{\infty}k_i\Psi_i,\quad(6)$$

由于 $\{\Psi_k\}_1^\infty$ 是空间 H 中一个无条件基的子集,因此 $g\in H$。对于这个元 g,令状态反馈为 $u=\langle Ex,g\rangle$,$Gx=\langle Ex,g\rangle b$。

下面证明 $\sigma_p(E,A+G)\subseteq\{\alpha_i\}_1^\infty$。只需证明如果 $\beta\notin\{\alpha_i\}_1^\infty$,则 $\beta\notin\sigma_p(E,A+G)$。

假设 $\beta\in\sigma_p(E,A+G)$,分如下两种情况,应用反证法进行证明:

第一种情况:如果 $\beta\in\rho(E,A)$,设 φ 为相应于 E 和 $A+G$ 的广义特征值 β 的广义特征向量,则

$$(A+G)\varphi=A\varphi+\langle E\varphi,G\rangle b=\beta E\varphi,$$

从而

$$\varphi=\langle E\varphi,g\rangle R(\beta E,A)b=$$
$$\langle E\varphi,g\rangle\langle ER(\beta E,A)b,g\rangle R(\beta E,A)b=$$
$$\langle ER(\beta E,A)b,g\rangle\varphi,$$

因此

$$\langle ER(\beta E,A)b,g\rangle=1,\quad(7)$$

把式(6)代入式(7),可得 $1=\langle ER(\beta E,A)b,g\rangle=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-c_n}{\beta-\lambda_n}$。这说明,$\beta$ 是式(5)左端 $f(z)$ 的零点。因此,存在 $\alpha_i\in\{\alpha_j\}_1^\infty$ 使 $\beta=\alpha_i$。这与 $\beta\notin\{\alpha_i\}_1^\infty$ 相矛盾。

第二种情况:如果 $\beta\in\sigma_p(E,A)$,则存在 i,其中 $1\leqslant i<\infty$,使 $\beta=\lambda_i$。因为 $\beta\in\sigma_p(E,A+G)$,存在 $\varphi\neq 0$,使

$$(A+G)\varphi=A\varphi+\langle E\varphi,g\rangle b=\lambda_i E\varphi,\quad(8)$$

从而 $\langle(\lambda_i E-A)\varphi,\Psi_i\rangle-\langle E\varphi,g\rangle\langle b,\Psi_i\rangle=0$。由 $\langle(\lambda_i E-A)\varphi,\Psi_i\rangle=\langle\varphi,(\lambda_i E-A)\Psi_i\rangle=0$,及 $\langle b,\Psi_i\rangle\neq 0$,可得 $\langle E\varphi,g\rangle=0$。由方程(8)可得,$A\varphi=\lambda_i E\varphi$。由于 E 和 A 的每一特征值都是单重的,所以 $\varphi=\varphi_i$,从而公式(6)和 $\langle E\varphi,g\rangle=0$,可得 $k_i=\langle E\varphi_i,g\rangle=0$,这与 $k_i\neq 0$ 相矛盾。

由以上两种情况的讨论可知 $\sigma_p(E,A+G)\subseteq\{\alpha_i\}_1^\infty$。因此,对任一 $\lambda\in\sigma_p(E,A+G)$,都有 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 成立。

由定理的条件知,广义分布参数式(1)在状态反馈 $u=\langle Ex,g\rangle$ 下所得式(3)可化为

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\langle Ex,g\rangle\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=A_{11}x_1+\langle Ex,g\rangle b_1,x_1(0)=x_{10}, \\ 0=A_{21}x_1+A_{22}x_2+\langle Ex,g\rangle b_2, \end{cases} \tag{9}$$

因为

$$\langle Ex,g\rangle=\langle Q^{-1}\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},g\rangle=\langle Q^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}g\rangle,$$

令

$$G_1x_1=\langle Q^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix},g\rangle b_1,G_2x_1=\langle Q^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix},g\rangle b_2,$$

则 G_1 和 G_2 都是有界线性算子,且式(9)变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=(A_{11}+G_1)x_1(t),x_1(0)=x_{10}, \\ 0=(A_{21}+G_2)x_1(t)+A_{22}x_2(t)。 \end{cases} \tag{10}$$

显然,$\sigma_p(E,A+G)=\sigma_p(I_1,A_{11}+G_1)$,其中 I_1 表示 H_1 上的单位算子。类似于文献[6]的推导可知,分布参数系统 $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=(A_{11}+G_1)x_1(t),x_1(t)=0$ 渐近稳定,从而广义分布参数式(10)渐近稳定。由此可以看出:存在由式(6)确定的 $g\in H$ 使广义分布参数式(1)在状态反馈 $u=\langle Ex,g\rangle$ 下所得闭环广义分布参数式(3)渐近稳定。

3 结 论

本文在 $\{\lambda_i\}_1^{\infty}$ 中有无限个 $\mathrm{Re}\lambda_i\geqslant 0$ 的条件下讨论了 Hilbert 空间中一阶广义分布参数系统的状态反馈稳定性问题。应用泛函分析及算子理论的方法给出了系统(1)状态反馈渐近稳定的充分条件及状态反馈的构造性表达式。这对广义分布参数系统的状态反馈稳定性问题研究具有重要的理论价值。如果式(1)是二阶的,本文所得结果需要进一步研究。

参考文献:

[1] TRASKA Z, MARSZALEK W. Singular distributed parameter systems[J]. IEE Control Theory and Application,1993,40(5):305-308.

[2] GE Zhao-qiang. The stabilizability for a class of generalized system[J]. Applied Functional Analysis,1993,1(1):56-61.

[3] YAO Dong, LIU Yong-qing. Variable structure control for singular distributed parameter system [J]. Control and Decision,1996,11(2):278-283.

[4] YANG Jian-hui, LIU Yong-qing. Sliding mode control of singular distributed parameter system [J]. Control and Decision,2000,15(2):145-148.

[5] WANG K N. On the pole assignment for the distributed parameter system [J]. Science in China, 1982,12(2):172-184.

[6] 王康宁,关肇直. 弹性振动的镇定问题[J]. 中国科学,1974,3(4):335-350.

(编 辑 亢小玉)

Stabilization by state feedback of the singular distributed parameter systems

LIU Ya-xiang[1], JIA Jiang-tao[2], GE Zhao-qiang[2]

(1. Life Science College, Northwest Sci-tech University of Agriculture and Forestry, Yangling 712100, China; 2. Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Stabilization by state feedback of the first order singular distributed parameter systems is discussed in Hilbert space. The sufficient conditions and the constructive expression of the state feedback that the closed loop singular distributed parameter system is asymptotic stability are given via functional analysis and operator theory.

Key words: singular distributed parameter systems; stabilization by state feedback; operator theory