2002 年 12 月 第 32 卷第 6 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Dec. 2002 Vol. 32 No. 6

恒星内部核反应系统中 *g-T* 效应产生的振荡

杜九林[1],李卫东[2]

(1. 陕西师范大学 物理学系,陕西 西安 710062;2. 延安大学 物理学系,陕西 延安 716000)

摘要:研究了恒星内部核反应系统中与粒子数密度涨落有关的振荡现象,分析了这类振荡的产生条件和特征频率。结果表明,引力及温度梯度(g-T)效应可以在氦核反应扩散模型中产生超临界的密度振荡。

关 键 词:恒星内部;恒星振荡;核反应;g-T 效应

中图分类号:P142.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2002)06-0622-03

恒星是处于非平衡状态的开放系统,其内部的核反应通常都是单向的不可逆过程,恒星内部的核反应系统与一般热力学多体系统的根本区别在于反应过程中各化学成分的粒子数是可变的,因此,存在粒子数密度的涨落。由于核反应发生在恒星的内部,这些涨落要受到扩散、引力及温度梯度(g-T)效应等因素的影响。恒星内部各化学成分粒子数的时空变化基本上决定了恒星的结构和演化,因此,对粒子数密度变化的研究变得非常重要。恒星的振荡十分普遍,并且主要是发生在恒星的表面层内,已有许多作者进行了讨论[1,2],然而相关研究忽略了恒星内部核反应过程中粒子数密度的涨落。本文将论述在恒星内部由 g-T 效应产生的与粒子数密度涨落有关的振荡现象。

1 基本方程

由于恒星内部的核反应要受到如扩散、对流等不可逆过程以及引力、温度梯度和非均匀等的作用,粒子的密度涨落具有显著的空间非均匀性。分析密度涨落的空间非均匀性时要求密度分布 $N(r)$ 是随机函数,在函数空间上引入概率测度并计算这种泛函概率测度的时间变化率。将密度看作独立变量,令 $P(N,r,t)$ 表示系统在 t 时刻处粒子数为 N 时的概率分布函数,那么生成函数 $G(y,r,t)$ 定义为[3]

$$G(y,r,t)=\sum_N (Y+1)^N P(N,r,t), \quad (1)$$

其中 Y 是一个参数,$-1\leqslant y\leqslant 0$。为了得到描述密度涨落的广义 Master 方程,我们考虑一个量子系统,粒子的场算子分别为 $\Psi^+(r)$ 和 $\Psi(r)$,密度算子为 $\hat{N}(r,t)=\Psi^+(r,t)\Psi(r,t)$,如果密度矩阵是 $\rho(t)$,那么概率分布函数可以定义为

$$P(N,r,t)=\mathrm{Tr}[\rho(t)\delta(N-\Psi^+(r)\Psi(r))]=$$
$$\langle\delta(N-\Psi^+(r)\Psi^+(r))\rangle_t=\langle\delta(N-\hat{N})\rangle_t。\quad (2)$$

其中 P 是 N 的连续函数。同时引入密度特征函数[3,4]

$$G(y,r,t)=\int \mathrm{d}N\mathrm{e}^{yN}P(N,r,t)=$$
$$\langle \mathrm{e}^{y\Psi^+(r)\Psi(r)}\rangle_t=\langle\mathrm{e}^{y\hat{N}}\rangle_t, \quad (3)$$

由此可以得到密度涨落的各阶矩

$$\langle\Psi^+(r)\Psi(r)_t\rangle=\overline{\hat{N}}(r,t)=\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0};$$
$$\langle[\Psi^+(r)\Psi(r)]^2\rangle_t=\overline{\hat{N}}^2(r,t)=\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)_{y=0}。$$

因此,这样定义的特征函数式(3)就是前面的生成函数式(1)。

现在计算概率分布函数的时间变化率。由式(2)得

$$\frac{\partial}{\partial t}P(N,r,t)=\langle\frac{\partial}{\partial t}\delta(N-\hat{N}(r,t))\rangle=$$
$$\langle\frac{\partial}{\partial t}\hat{N}(r,t)\frac{\partial}{\partial N}\delta(N-\hat{N}(r,t))\rangle, \quad (4)$$

收稿日期:2001-04-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19503002,19701021),陕西师大重点科研基金项目

作者简介:杜九林(1962-),男,陕西米脂人,陕西师范大学教授、博士生导师,从事理论天体物理研究。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(N,r,t)=-\langle\frac{\partial^2\hat{N}}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial N}\delta(N-\hat{N}(r,t))\rangle+\langle(\frac{\partial\hat{N}}{\partial t})^2\frac{\partial^2}{\partial N^2}\delta(N-\hat{N})\rangle。\quad(5)$$

对上式两边乘 e^{yN} 并对 N 积分得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(y,r,t)=-\langle\frac{\partial^2\hat{N}}{\partial t^2}\int\frac{\partial}{\partial N}\delta(N-\hat{N})e^{yN}dN\rangle+\langle(\frac{\partial\hat{N}}{\partial t})^2\int\frac{\partial^2}{\partial N^2}\delta(N-\hat{N})e^{yN}dN\rangle。\quad(6)$$

计算后得出生成函数满足的广义 Master 方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(y,r,t)=y\langle\frac{\partial^2\hat{N}}{\partial t^2}e^{yN}\rangle+y^2\langle(\frac{\partial N}{\partial t})^2e^{y\hat{N}}\rangle。\quad(7)$$

现在写出恒星内部核反应扩散的密度算子 $\hat{N}(r,t)$ 满足的所谓的 Langevin 方程[3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{N}(r,t)=f(\hat{N},K)+D\nabla^2\hat{N}(r,t)+B\hat{N}(r,t)+\hat{F}(r,t)。\quad(8)$$

其中 $\hat{F}(r,t)$ 是量子随机力,根据因果律,它应当满足 $\langle\hat{F}(r,t)\rangle=0$ 及 $\langle\dot{\hat{N}}(r,t)\hat{N}(r,t)\rangle=0$。

将式(8)代入式(4)得

$$\frac{\partial}{\partial t}P(N,r,t)=-\langle f(\hat{N},K)\frac{\partial}{\partial N}\delta(N-\hat{N})\rangle-D\langle\nabla^2\hat{N}(r,t)\frac{\hat{N}\partial}{\partial N}\delta(N-\hat{N})\rangle-A\langle\nabla\hat{N}(r,t)\frac{\partial}{\partial N}\delta(N-\hat{N})\rangle-B\langle\hat{N}(r,t)\frac{\partial}{\partial N}\delta(N-\hat{N})\rangle。\quad(9)$$

在上式两边乘以 e^{yN} 并对 N 积分,则方程变为

$$\frac{\partial}{\partial t}G(y,r,t)=yf(K,\frac{\partial}{\partial y})G(y,r,t)+yD\langle\nabla^2\hat{N}(r,t)e^{y\hat{N}}\rangle+yA\langle\nabla\hat{N}(r,t)e^{y\hat{N}}\rangle+yB\langle\hat{N}(r,t)e^{y\hat{N}}\rangle。\quad(10)$$

对于恒星内部的核反应扩散系统,当考虑 g-T 效应的影响时可以用生成泛函 $G(y,r,t)$,满足的广义 Master 方程描述粒子数密度的涨落[3]

$$\frac{\partial G}{\partial t}=yf(K,\frac{\partial}{\partial y})G+DyG\nabla^2\frac{\partial}{\partial y}\ln G+AyG\nabla\frac{\partial}{\partial y}\ln G+By\frac{\partial G}{\partial y}。\quad(11)$$

其中:$A=Dg(1-u)/RT+D_T\nabla T$;$B=D(1-u)(\nabla g-g\nabla T/T)/RT+D_T\nabla^2T$;$D,D_T,g,u,T,R$ 分别是扩散系数,热扩散系数,引力加速度,平均分子量,温度和理想气体常数。方程(11)的右边第一项是核反应的贡献,可以直接用生成函数的生-灭表示来描述;第二项描述扩散效应;第三,四项是 g-T 效应的贡献。

2　g-T 效应产生的振荡

为了讨论 g-T 效应产生的密度振荡现象,我们考虑恒星内部的氦核反应扩散模型,这一模型常常用来解释氦"闪耀"非稳定性[4~6]。众所周知,当恒星的演化进入红巨相而其中心温度达到 10^8K 时就开始发生氦核的聚变核反应,此时核反应的区域处于对流状态。氦核聚变核反应过程表示为[5]

$$3He^4\xrightarrow{K_1}C^{12}+\gamma+7.247\ \text{MeV};$$

$$C^{12}+He^4\xrightarrow{K_2}O^{16}+\gamma+7.161\ \text{MeV}。\quad(12)$$

在上述反应中,如果用 Z 表示 He^4 的粒子数密度,那么相应的反应扩散方程为[3]

$$\frac{\partial Z}{\partial t}=-\frac{3}{2}K_1Z^3-B'Z+D\nabla^2Z。\quad(13)$$

式中 $B'=\text{div}v$ 是对流效应项,可以是正值或者负值。容易看出,式(13)允许有均匀的定态解 $Z_0=0$ 和 $Z_0=\sqrt{-2B'/3k_1}$,$(B'<0)$。当考虑 g-T 效应的贡献时,式(13)变为[7]

$$\frac{\partial Z}{\partial t}=-\frac{3}{2}K_1Z^3-B'Z+D\nabla^2Z+A\nabla Z+BZ,\quad(14)$$

于是根据方程(11)可以写出相应于式(14)的广义 Master 方程

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\frac{1}{2}k_1y(y^2+3y+3)\frac{\partial^3G}{\partial y^3}-B'y\frac{\partial G}{\partial y}+DyG\nabla^2\frac{\partial}{\partial y}\ln G+AyG\nabla\frac{\partial}{\partial y}\ln G+By\frac{\partial G}{\partial y}。\quad(15)$$

为了分析式(15)描述的涨落行为,令 $G=G_0+\delta G$,定态解 G_0 附近的扰动取为 $\delta G=G_0\exp(\gamma t+ikr)$,代入式(14)中并利用与文献[3]类似的分析方法可以得到涨落波谱的色散关系

$$\lambda_k^{(S)}=(B-B'-\frac{9}{2}k_1Z_0^2-Dk^2+ikA)s,\ s=1,2,3,\cdots\quad(16)$$

在式(16)中,$s=1$ 时的解 λ_k^1 等价于式(14)线性化后的解,因此,它描述了平均密度涨落在空间的传播;$s\geqslant 2$ 的解描述了密度涨落的高阶矩在空间的传播过程。

由式(16)得到,当 $B-B'<\frac{9}{2}k_1Z_0^2+Dk^2$ 时,涨落波将随时间衰减;反之当

$$B-B'>\frac{9}{2}k_1Z_0^2+Dk^2\quad(17)$$

时,涨落波随时间增长。在临界状态时,以下等式成

立:$(B-B')_C=\frac{9}{2}k_1Z_0^2+Dk^2$,由此式可以确定临界波数 $k_c\neq 0$。特别是从式(16)看出 $\mathrm{Im}\lambda_k^{(s)}(k=k_c)=k_cAs\neq 0$,根据分枝解的存在和稳定性定理[8],必然存在超临界的时间振荡分枝,其特征频率为

$$f_{K_c}^{(s)}=\mathrm{Im}\lambda_k^{(s)}(k=k_c)=[\frac{D}{RT}(1-u)g++D_T\nabla T]k_cs,\ s=1,2,3,\cdots \tag{18}$$

由此可见,密度振荡的特征频率与恒星内部的引力加速度 g 和温度梯度 ∇T 密切相关。式(13)中的 s 是正整数,因此说明存在倍频振荡。对于质量为 1.3 $M_\odot$ 的红巨星中心核,温度是空间均匀的[9]:$\nabla T=0$,振荡的特征频率有更简洁的形式

$$f_{K_c}^{(s)}=\frac{D}{RT}(1-u)gk_cs,\ s=1,2,3,\cdots \tag{19}$$

3 结 论

在文献[5]中证明,氦核反应扩散模型中只有超临界的正常分支而不存在振荡分支。本文考虑了恒星内部引力与温度梯度(g-T)效应后得到如下结论:

1)恒星内部核反应系统中存在由 g-T 效应产生的超临界密度振荡,振荡的产生条件如式(7)所示,即 $B-B'>\frac{9}{2}k_1Z_0^2+Dk^2$,这些振荡的特征频率如式(18)或式(19)所示,它们具有倍频振荡的特性。

2)恒星的振荡不仅存在于恒星表面,而且可以存在于恒星内部。本文讨论的这类发生在核反应扩散系统中的振荡现象描述了参与核反应的化学成分粒子数密度涨落的时间变化。

参考文献:

[1] UNNO W. Nonradial Oscillations of Stars[M]. Tokyo:University of Tokyo Press,1989.

[2] MERRYFIELD W J,TOOMRE J,GOUGH D O. Nonlinear behavior of solar gravity modesdriven by 3He in the core [J]. Astrophys J,1990,353:678-697;1991,367:658-665.

[3] DU J L. Fluctuation of density and waves in the nonlinear nuclear reaction in stellar cores[J]. Astrophys Space Sci, 1993,207:27-35.

[4] DU J L,CHEN F S. On fluctuation in reaction-diffusion system affected by pressure[J]. Physica A,1994,208:205-214.

[5] CHEN F S,DU J L. Fluctuation in helium nuclear reaction-diffusion systems[J]. Astrophys. Space Sci,1992,195:341-348.

[6] DU J L,CHEN F S. Stability of stellar structure and nonequilibrium dynamical characteristics of g-T effects in nuclear reactions in stellar cores[J]. Astrophys Space Sci,1993,207:37-46.

[7] DU J L,CHEN F S. Stability of thermonuclear reaction affected by gravitational force[J]. Astrophys Space Sci,1992, 195:349-357.

[8] STATTINGER D H. Topics in Stability and Bifurcation Theory[M]. Berlin:Springer,1973.

[9] ALLEN C W. Astrophysical Quantities[M]. New York:Athlone Press,1973.

(编 辑 曹大刚)

Oscillations excited by *g-T* effect in the core nuclear reaction system of stars

DU Jiu-lin[1],LI Wei-dong[2]

(1. Department of Physics,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China;2. Department of Physics,Yanan 716000,China)

Abstract: Oscillations related to density fluctuation of particle number in the core nuclear reaction system of stars are investigated. It is shown that the supercritical density oscillations could be excited by g-T effect in the model for helium nuclear reaction-diffusion system inside stars. The characteristic frequencies and producing criterion for the oscillations are analyzed.

Key words: stellar cores; stellar oscillations; nuclear reactions; g-T effect