2003 年 12 月
第 33 卷第 6 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Dec. 2003
Vol. 33 No. 6

渐近非扩张映象迭代序列的收敛性

田有先[1],张石生[2]

(1. 重庆邮电学院 计算机学院,重庆 400065;2. 四川大学 数学学院,四川 成都 610064)

摘要:用新方法研究了 Banach 空间中渐近非扩张映象不动点的迭代逼近问题,所得结果改进和发展了前人的结果。

关 键 词:渐近非扩张映象;不动点;具误差的 Ishikawa(Mann)迭代序列

中图分类号:O175.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)06-641-04

1 引论和预备知识

设 E 是实 Banach 空间,E^* 是 E 的对偶空间,D 是 E 中的非空子集,$J:E\to 2^E$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x)=\{f\in E^*,\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|,\|f\|=\|x\|\},x\in E。$$

如果 E 是一致凸的 Banach 空间,则正规对偶映象 $J:E\to E^*$ 是单值的。

定义 1.1 设 $T:D\to D$ 是一映象。

1) T 称为渐近非扩张的[1],如果存在数列 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$k_n\to 1(n\to\infty)$,使得

$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|,\quad \forall\, x,y\in D,n\geqslant 1。$$

2) T 称为一致 L-Lipschitz,其中 $L>0$ 是一常数,如果

$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant L\|x-y\|,\quad \forall\, x,y\in D,n\geqslant 1。$$

注 1.1 如果 $T:D\to D$ 是一非扩张映象,则 T 是具常数列 $\{k_n=1\}$ 的渐近非扩张映象;如果 $T:D\to D$ 是具数列 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$k_n\to 1$ 的渐近非扩张映象,则 T 是一致 L-Lipschitz 映象,其中 $L=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{k_n\}$。

定义 1.2 设 E 是实 Banach 空间,D 是 E 的闭子集,映象 $T:D\to D$ 称为半紧的,如果对任意的有界序列 $\{x_n\}\subset D$ 使得 $\|x_n-Tx_n\|\to 0(n\to\infty)$,则存在子序列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$,使得 $x_{n_i}\to x^*\in D(n_i\to\infty)$。

关于渐近非扩张映象不动点的迭代逼近问题,在 Hilbert 空间或一致凸 Banach 空间的框架下已被许多人讨论过[1~4]。

本文的目的是利用不等式和一种新的方法证明下面的定理 1.1 和定理 1.2。我们的结果改进和发展了文献[1 ~ 4]中的主要结果。

定理 1.1 设 E 是实的一致凸 Banach 空间,D 是 E 的非空有界闭凸集,$T:D\to D$ 是半紧的具实数序列 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$k_n\to 1(n\to\infty)$ 的渐近非扩张映象。设 $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的 4 个数列,满足下面的条件:

i) $\alpha_n+\gamma_n\leqslant 1,\beta_n+\delta_n\leqslant 1,\forall\, n\geqslant 0$;

ii) 存在正整数 n_0,n_1 及 $\varepsilon>0,b\in(0,\xi)$,其中 $\xi=\min\{1,\frac{1}{L}\}$,而 $L=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{k_n\}$,使得

$$\begin{cases}0<\varepsilon\leqslant\alpha_n\leqslant 1-\varepsilon,\forall\, n\geqslant n_0,\\ 0\leqslant\beta_n\leqslant b,\forall\, n\geqslant n_1;\end{cases}\tag{1}$$

iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n<\infty,\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_n<\infty$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(k_n^2-1)<\infty。$$

则由下式定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$

$$\begin{cases}x_0\in D;\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_n+\alpha_nT^ny_n+\gamma_n\omega_n,\\ \qquad n\geqslant 0;\\ y_n=(1-\beta_n-\delta_n)x_n+\beta_nT^ny_n+\delta_nz_n。\end{cases}\tag{2}$$

收稿日期:2002-08-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19771058);四川省教育厅自然科学重点科研项目(01LA70)

作者简介:田有先(1948-),男,四川宣汉人,重庆邮电学院教授,从事非线性泛函分析研究。

强收敛收 T 的某一不动点 $x^* \in D$，其中 $\{\omega_n\}$、$\{z_n\}$ 是 D 中的两个序列。

在定理 1.1 中如果 $\beta_n = 0$，$\delta_n = 0$，$\forall\ n \geqslant 0$，由定理 1.1 直接可得定理 1.2。

定理 1.2 设 E 是实的一致凸 Banach 空间，D 是 E 的非空有界闭凸集，$T: D \to D$ 是半紧的具序列 $\{k_n\} \subset [1,\infty)$，$k_n \to 1 (n \to \infty)$ 的渐近非扩张映象，$\{\alpha_n\}$，$\{\gamma_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个数列，满足定理 1.1 中的条件(i ~ iii)。则由下式定义的具误差的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$：

$$\begin{cases} x_0 \in D; \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n T^n y_n + \gamma_n \omega_n, \\ \qquad n \geqslant 0。\end{cases} \tag{3}$$

强收敛于 T 的某一不动点 $x^* \in D$，其中 $\{\omega_n\}$ 是 D 中的序列。

2 定理的证明

下面的引理在证明本文的主要结果时将起到重要的作用。

引理 2.1[5] 设 E 是实 Banach 空间，$J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象，则对任意的 $x, y \in E$ 及对任意的 $j(x + y) \in J(x + y)$，有

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle。$$

引理 2.2[6] 设 $p > 1$，$r > 0$ 是给定的实数。则 Banach 空间 E 是一致凸的，当且仅当存在一连续的严格增的凸函数 $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$，$g(O) = 0$，使得

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^p \leqslant \lambda \|x\|^p + (1 + \lambda)\|y\|^p - \omega_p(\lambda) g(\|x - y\|)$$

对一切 $x, y \in B(O,r)$，及对一切 $\lambda \in [0,1]$ 成立。其中，$B(O,r)$ 是 E 中的以 O 为心，r 为半径的闭球，而且

$$\omega_p(\lambda) = \lambda^p(1 - \lambda) + \lambda(1 - \lambda)^p。 \tag{4}$$

引理 2.3 设 E 是实 Banach 空间，D 是 E 的非空有界闭凸集，$T: D \to D$ 是具数列 $\{k_n\} \subset [1,\infty)$，$k_n \to 1 (n \to \infty)$ 的渐近非扩张映象。设 $\{x_n\}$ 是由式(2) 定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列，其中 $\{\gamma_n\}$、$\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列，满足条件：

$$\gamma_n \to 0，\delta_n \to 0 (n \to \infty)。 \tag{5}$$

则由 $\|x_n - T^n x_n\| \to 0 (n \to \infty)$ 可得 $\|x_n - T x_n\| \to 0$。

证 明 现把由式(2) 定义的序列 $\{x_n\}$ 改写成：

$$\begin{cases} x_0 \in D; \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n y_n + u_n, n \geqslant 0; \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n + v_n。\end{cases} \tag{6}$$

其中 $u_n = \gamma_n(\omega_n - x_n)$，$v_n = \delta_n(z_n - x_n)$，$\forall\ n \geqslant 0$。因 D 是有界集，而 $\omega_n, x_n, z_n \in D$，故 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 E 中的有界序列。再由式(5) 知

$$\{u_n\} \to 0，\{v_n\} \to 0 (n \to \infty)。$$

又因 $T: D \to D$ 是具数列 $\{k_n\} \subset [1,\infty)$，$k_n \to 1$ 的渐近非扩张映象，故由注 1.1 知，T 是一致 L-Lipschitz 映象，其中 $L = \sup_{n \geqslant 1} k_n$，令 $C_n = \|x_n - T^n x_n\|$，于是仿照 Huang[2] 可证

$$\|x_{n+1} - T x_{n+1}\| \leqslant C_{n+1} + L(L^2 + 2L + 2)C_n + L(L + 2)\|u_n\| + L^2(L + 2)\|v_n\|。$$

引理 2.3 的结论得证。

现在给出定理 1.1 的详细证明

证 明 由文献[1] 知，T 在 D 中有不动点，故 T 在 D 中的不动点集 $F(T) \neq \varnothing$。

现在考查由式(2) 所定义的序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$。其中 $\{u_n = \gamma_n(\omega_n - x_n)\}$，$\{v_n = \delta_n(z_n - x_n)\}$ 均是 E 中的有界序列，而且由定理 1.1 的条件(iii) 知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty，\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty。 \tag{7}$$

取 $q \in F(T)$，因 D 是有界集，且 x_n、y_n、$T^n y_n$、$T^n x_n$ 均是 D 中的点，故存在 $r > 0$，使得

$$D \cup \{x_n - q\} \cup \{y_n - q\} \cup \{x_n - q + u_n\} \cup \{T^n y_n - q + u_n\} \cup \{T^n x_n - q + v_n\} \cup \{x_n - q + v_n\} \subset B(O,r),$$

其中 $B(O,r)$ 是 E 中的以 O 为心，r 为半径的闭球。

由引理 2.2(其中 $p = 2$，$\lambda = \alpha_n$) 及式(6) 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &= \|(1 - \alpha_n)(x_n - q + u_n) + \alpha_n(T^n y_n - q + u_n)\|^2 \leqslant \\ &(1 - \alpha_n)\|x_n - q + u_n\|^2 + \\ &\alpha_n \|(T^n y_n - q + u_n)\|^2 - \\ &\omega_2(\alpha_n) g(\|x_n - T^n y_n\|), \end{aligned} \tag{8}$$

因 $(x_n - q + u_n)$ 和 $(T^n y_n - q + u_n) \in B(O,r)$，由引理 2.1 得

$$\begin{aligned} &\|x_n - q + u_n\|^2 \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2\langle u_n, J(x_n - q + u_n)\rangle \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2\|u_n\| \cdot \|x_n - q + u_n\| \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2r\|u_n\|。 \end{aligned} \tag{9}$$

类似可证

$$\|T^n y_n - q + u_n\|^2 \leqslant \|T^n y_n - q\|^2 + 2r\|u_n\|。 \tag{10}$$

另由式(4)知

$$\omega_2(\alpha_n) = \alpha_n^2(1-\alpha_n) + \alpha_n(1-\alpha_n)^2 = \alpha_n(1-\alpha_n)。$$

把上面各式代入式(8)化简后得

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant \|x_n-q\|^2 + \alpha_n\{\|T^n y_n - q\|^2 - \|y_n - q\|^2\} + \alpha_n\{\|y_n-q\|^2 - \|x_n-q\|^2 + 2r\|u_n\| - \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|x_n - T^n y_n\|), \quad (11)$$

首先考察式(11)右端第三项，由引理 2.2(其中 $p=2$)有

$$\|y_n-q\|^2 - \|x_n-q\|^2 = \|(1-\beta_n)(x_n-q+v_n) + \beta_n(T^n x_n - q + v_n)\|^2 - \|x_n-q\|^2 \leqslant (1-\beta_n)\|x_n-q+v_n\|^2 + \beta_n\|T^n x_n - q + v_n\|^2 - \omega_2(\beta_n)g(\|x_n - T^n x_n\|) - \|x_n-q\|^2 \leqslant (1-\beta_n)\|x_n-q+v_n\|^2 + \beta_n\|T^n x_n - q + v_n\|^2 - \|x_n-q\|^2。\quad (12)$$

因 $x_n-q+v_n \in B(O,r)$，$T^n x_n - q + v_n \in B(O,r)$。由引理 2.1 有

$$\|x_n-q+v_n\|^2 \leqslant \|x_n-q\|^2 + 2\langle v_n, J(x_n-q+v_n)\rangle \leqslant \|x_n-q\|^2 + 2\|v_n\|r; \quad (13)$$

同理可证

$$\|T^n x_n - q + v_n\|^2 \leqslant \|T^n x_n - q\|^2 + 2\|v_n\|r。\quad (14)$$

把式(13,14)代入式(12)化简后得

$$\|y_n-q\|^2 - \|x_n-q\|^2 \leqslant \beta_n\{\|T^n x_n - q\|^2 - \|x_n-q\|^2\} + 2r\|v_n\| \leqslant \beta_n(k_n^2-1)\|x_n-q\|^2 + 2r\|v_n\|。\quad (15)$$

把式(15)代入式(11)化简后得

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant \|x_n-q\|^2 + \alpha_n(k_n^2-1)\{\|y_n-q\|^2 + \|x_n-q\|^2 + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|) - \alpha_n(1-\alpha_n g(\|x_n - T^n y_n\|)。$$

因 $\{x_n-q\}$，$\{y_n-q\} \subset B(O,r)$，故 $\|x_n-q\| \leqslant r$，$\|y_n-q\| \leqslant r$，另由式(1)，当 $n \geqslant n_0$ 时，$0<\varepsilon\leqslant\alpha_n$，$\varepsilon \leqslant 1-\alpha_n$，故有

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant \|x_n-q\|^2 + 2(k_n^2-1)r^2 + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|) - \varepsilon^2 g(\|x_n - T^n y_n\|, \forall n \geqslant n_0。\quad (16)$$

于是有

$$\varepsilon^2 g(\|x_n - T^n y_n\|) \leqslant \|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2 + 2r^2(k_n^2-1) + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|), \forall n \geqslant n_0。$$

对任意的正整数 $m > n_0$，作和有

$$\varepsilon^2\sum_{n=n_0}^{m} g(\|x_n - T^n y_n\|) \leqslant \|x_{n_0}-q\|^2 - \|x_{m+1}-q\|^2 + 2r^2\sum_{n=n_0}^{m}(k_n^2-1) + 2r\sum_{n=n_0}^{m}(\|u_n\| + \|v_n\|) \leqslant \|x_{n_0}-q\|^2 + 2r^2\sum_{n=n_0}^{m}(k_n^2-1) + 2r\sum_{n=n_0}^{m}(\|u_n\| + \|v_n\|)。$$

两端 $m\to\infty$，于是由条件 iii 及式(7)得知

$$\varepsilon^2\sum_{n=n_0}^{m} g(\|x_n - T^n y_n\|) \leqslant \|x_{n_0}-q\|^2 + 2r^2\sum_{n=n_0}^{m}(k_n^2-1) + 2r\sum_{n=n_0}^{m}(\|u_n\| + \|v_n\|) < \infty。\quad (17)$$

上式表明 $g(\|x_n - T^n y_n\|) \to 0 (n\to\infty)$。记

$$e_n = g(\|x_n - T^n y_n\|), n \geqslant 0。\quad (18)$$

故 $\|x_n - T^n y_n\| = g^{-1}(e_n)$，因 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的严格增的且 $g(O)=0$，故 $g^{-1}:[0,\infty)$ 也是严格增的连续的且 $g^{-1}(O)=0$。于是有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^n y_n\| = \lim_{n\to\infty} g^{-1}(e_n) = 0, \quad (19)$$

因为

$$\|x_n - y_n\| = \|\beta_n(x_n - T^n x_n) - v_n\| \leqslant \beta_n\{\|x_n - T^n y_n\| + \|T^n y_n - T^n x_n\|\} + \|v_n\| \leqslant \beta_n\{\|x_n - T^n y_n\| + L\|y_n - x_n\|\} + \|v_n\|。\quad (20)$$

化简后得

$$(1-L\beta_n)\|x_n - y_n\| \leqslant \|x_n - T^n y_n\| + \|v_n\|。$$

由条件 ii，当 $n \geqslant n_1$ 时，$1-L\beta_n \geqslant 1-Lb > 0$，故由式(19)得知

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0。\quad (21)$$

由式(19,21)有

$$\|T^n x_n - x_n\| \leqslant \|T^n x_n - T^n y_n\| + \|T^n y_n - x_n\| \leqslant L\cdot\|x_n - y_n\| + \|T^n y_n - x_n\| \to 0 (n\to\infty)。\quad (22)$$

由引理 2.3 得 $\|Tx_n - x_n\| \to 0 (n\to\infty)$。于是由 T 的半紧性，存在子序列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ 使得

$$x_{n_i} \to x^* \in D (n_i\to\infty)。\quad (23)$$

由 T 的连续性即得 $\lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i} - Tx_{n_i}\| = \|x^* -$

$Tx^* \| = 0$。即 x^* 是 T 在 D 中的不动点，于是由式(6,22)得知

$$y_{n_i} = x_{n_i} - \beta_{n_i}(x_{n_i} - T^{n_i}x_{n_i}) + v_{n_i} \to x^*(n_i \to \infty)。$$

又因 $\| T^{n_i}y_{n_i} - x^* \| \leqslant L \cdot \| y_{n_i} - x^* \|$，故知 $T^{n_i}y_{n_i} \to x^*(n_i \to \infty)$。

现在式(16)中取 $q = x^*$，于是有

$$\| x_{n_i+1} - x^* \|^2 \leqslant \| x_{n_i} - x^* \|^2 + 2(k_{n_i}^2 - 1)r^2 + 2r(\| u_{n_i} \| + \| v_{n_i} \|) - \varepsilon^2 q(\| x_{n_i} - T^{n_i}y_{n_i} \|), \forall n_i \geqslant n_0。$$

于是由式(19,23)及 g 的连续性，知

$$x_{n_i+1} \to x^*(n_i \to \infty), \tag{24}$$

从而有

$$\| T^{n_i+1}x_{n_i+1} - x^* \| \leqslant L \cdot \| x_{n_i+1} - x^* \| \to 0(n_i \to \infty)。 \tag{25}$$

于是由式(6,24,25)知

$$y_{n_i+1} = x_{n_i+1} - \beta_{n_i+1}(T^{n_i+1}x_{n_i+1} - x_{n_i+1}) + V_{n_i+1} \to x^*(n_i \to \infty),$$

从而得知

$$\| T^{n_i+1}y_{n_i+1} - x^* \| \leqslant L \cdot \| y_{n_i+1} - x^* \| \to 0(n_i \to \infty)。$$

继续这一方法，由归纳法可证：对任意的非负整数 m

$$x_{n_i+m} \to x^*, y_{n_i+m} \to x^*(n_i \to \infty). \tag{26}$$

$$T^{n_i+m}x_{n_i+m} \to x^*, T^{n_i+m}y_{n_i+m} \to x^*(n_i \to \infty)。$$

注 2.1 定理 1.1,1.2 改进和发展了文献[1～4]中的主要结果。

参考文献：

[1] GOEBEL K, KIRK W A. A fixed point theorem for asymaptotically nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 35(1): 171-174.

[2] HUANG Z Y. Mann and Ishikawa iterations with errors for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Computers Math Appl, 1999, (7): 1-7.

[3] RHOADES B E. Fixed point iterations for certain nonlinear mappings[J]. J Math Anal Appl, 1994, 183(1): 118-120.

[4] SCHU J. Iterative construction of fixed points of asymptotically nonerpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 1991, 158(2): 407-413.

[5] ZHANG S S. On Chidume's open questions and appraximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216(1): 94-111.

[6] XU H K. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonlinear Anal TMA, 1991, 16(12): 1 127-1 138.

(编　辑　亢小玉)

On the convergence of iterative sequence for asymptotically nonexpansive mappings

TIAN You-xian[1], ZHANG Shi-sheng[2]

(1. College of Computer Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China; 2. Department of Math Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: It is proved by using new methods, some iterative approximation theorems of fixed point for asymptotically nonexpansive mappings was studied in Banach spaces. The results presented, which has improved and extended the corresponding results of Kirk-Gaehel, Rhoades, Huang, Schu and Xu.

Key words: Asymptotically nonexpansive mappings; fixed point; Ishikawa (Mann) iteration process with errors