

第十七章 非线性电路介绍

- ▶ 非线性电阻
- ▶ 非线性电容和非线性电感
- ▶ 非线性电路的方程
- ▶ 小信号分析法

第十七章 非线性电路介绍

在线性电路中,线性元件的特点是其参数不随电压或电流而变化。

非线性元件: 如果电路元件的参数随着电压或电流而变化,即电路元件的参数与电压或电流有关,就称为非线性元件。

非线性电路: 含有非线性元件的电路

§ 17.1 非线性电阻

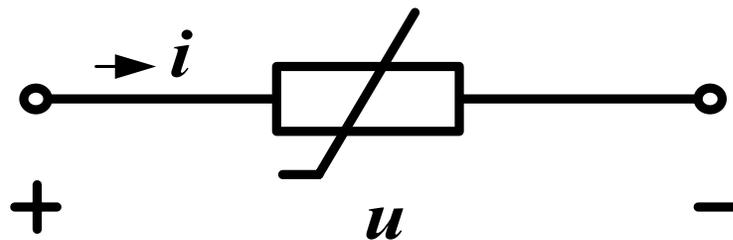
1. 非线性电阻

非线性电阻元件的伏安关系 不满足欧姆定律，而是遵循某种特定的非线性函数关系，即

$$u = f(i)$$

或

$$i = g(u)$$

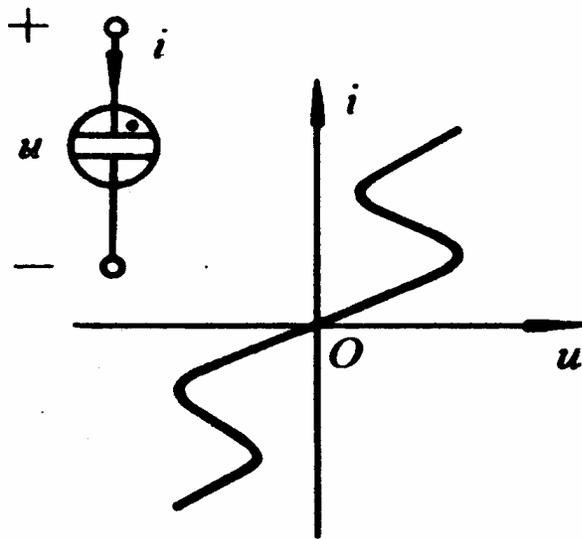


图形符号

§ 17.1 非线性电阻

(1) 电流控制型电阻

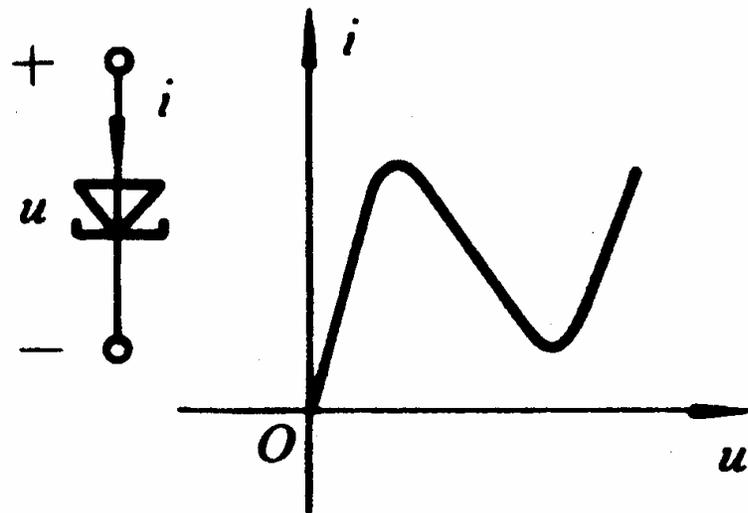
非线性电阻元件两端电压是其电流的单值函数，它的伏安特性可用下列函数关系表示： $u = f(i)$



氖灯是流控电阻

(2) 电压控制型电阻

通过非线性电阻元件中的电流是其两端电压的单值函数，其伏安特性可用下列函数关系表示： $i = f(u)$

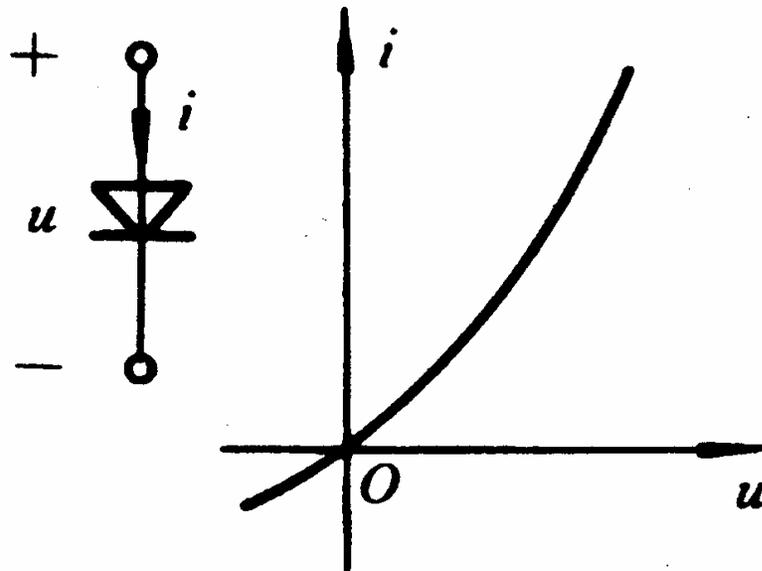


隧道二极管是压控电阻

§ 17.1 非线性电阻

(3) 单调型非线性电阻

非线性电阻元件的伏安特性是单调增长或单调下降的，它同时是电流控制又是电压控制的。



p-n结二极管的伏安特性

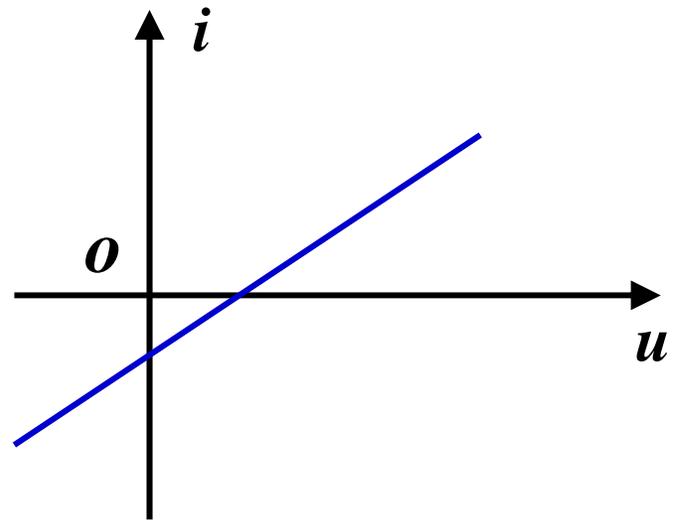
§ 17.1 非线性电阻

(4) 非线性电阻的单向性

当加在非线性电阻两端的电压方向不同时, 流过它的电流也完全不同, 故其特性曲线不对称于原点。

这种现象称为非线性电阻的单向性

线性电阻是双向性的, 而许多非线性电阻却是单向性的。当然也有一些非线性电阻是双向性的。



§ 17.1 非线性电阻

(5) 静态电阻和动态电阻

非线性电阻元件在某一工作状态下（图示P点）的静态电阻等于该点的电压值 u 与电流值 i 之比，即

$$R_s \triangleq \frac{u}{i}$$

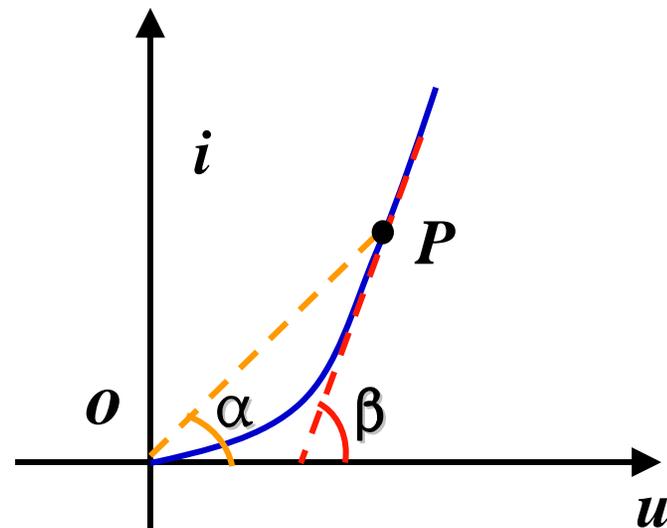
P点的静态电阻正比于 $\tan \alpha$

非线性电阻元件在某一工作状态下（图示P点）的动态电阻 R_d

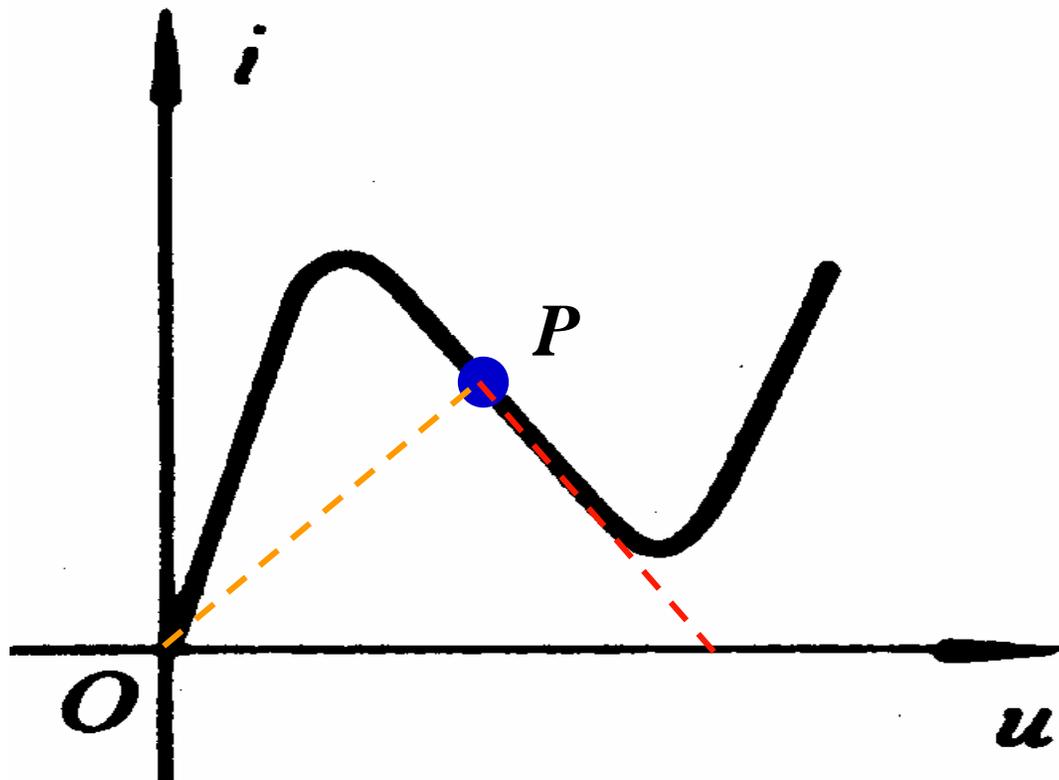
等于该点的电压 u 对电流 i 的导数值，即

$$R_d \triangleq \frac{du}{di}$$

P点的动态电阻正比于 $\tan \beta$



§ 17.1 非线性电阻



当非线性电阻伏安特性某一点处的动态电阻为负值时，称非线性电阻在该点具有“负电阻”的性质。

§ 17.1 非线性电阻

2. 非线性电阻的串联

两个流控非线性电阻的VCR分别为：

$$u_1=f_1(i_1), \quad u_2=f_2(i_2)$$

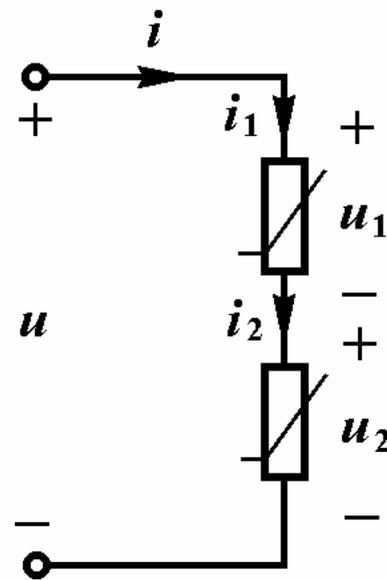
它们串联后，单口网络的等效电阻

$$\because i = i_1 = i_2 \quad (\text{KCL})$$

$$u = u_1 + u_2 \quad (\text{KVL})$$

$$\therefore u = f(i) = f_1(i_1) + f_2(i_2) = f_1(i) + f_2(i)$$

如果有一个非线性电阻是电压控制型，在电流值的某范围内电压是多值的，很难写出等效伏安特性 $u=f(i)$ 的解析式。可以用图解的方法求其等效伏安特性。

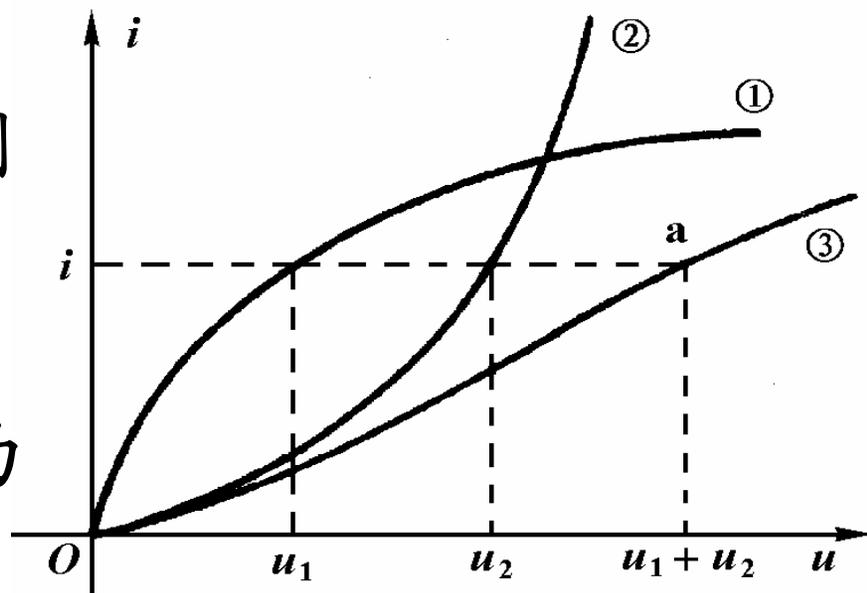


§ 17.1 非线性电阻

图解法（曲线相加法）

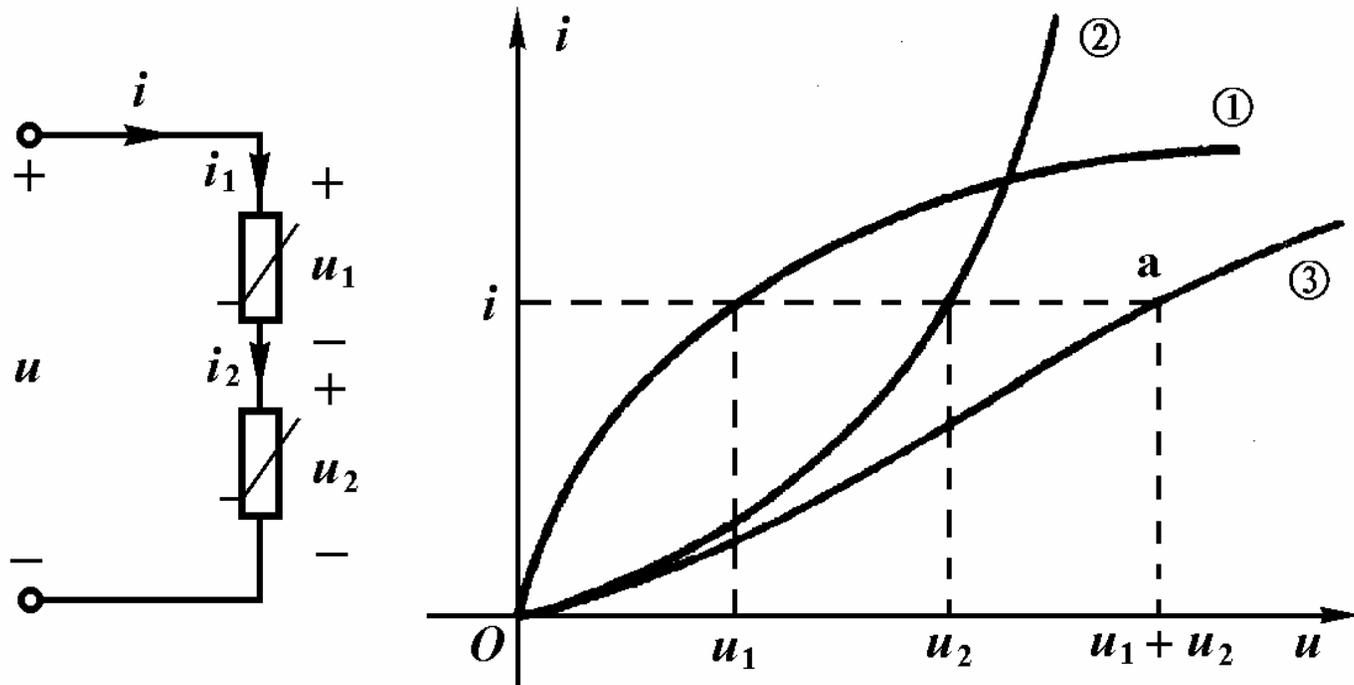
两个非线性电阻特性曲线分别如右图中曲线①、②所示。

它们串联后的VCR特性曲线，即等效电阻的VCR特性曲线为右图中曲线③所示。



给定某电流值 i ，找出曲线①、②上相应的电压值 $u_1=f_1(i_1)$ 和 $u_2=f_2(i_2)$ 相加，得到单口VCR特性曲线③的一点 a 。按此方法，给定一系列电流值，就可求出单口VCR特性曲线上的一系列点，连接这一系列点，就可得到单口VCR特性曲线③。

§ 17.1 非线性电阻



由上可见， n 个非线性电阻串联形成的单口网络，就端口特性而言，等效于一个非线性电阻，其VCR特性曲线，可以用同一电流坐标下电压坐标相加的方法求得。

§ 17.1 非线性电阻

例1. 用图解法求图17-5(a)所示电阻、电压源和理想二极管串联单口的VCR特性曲线。

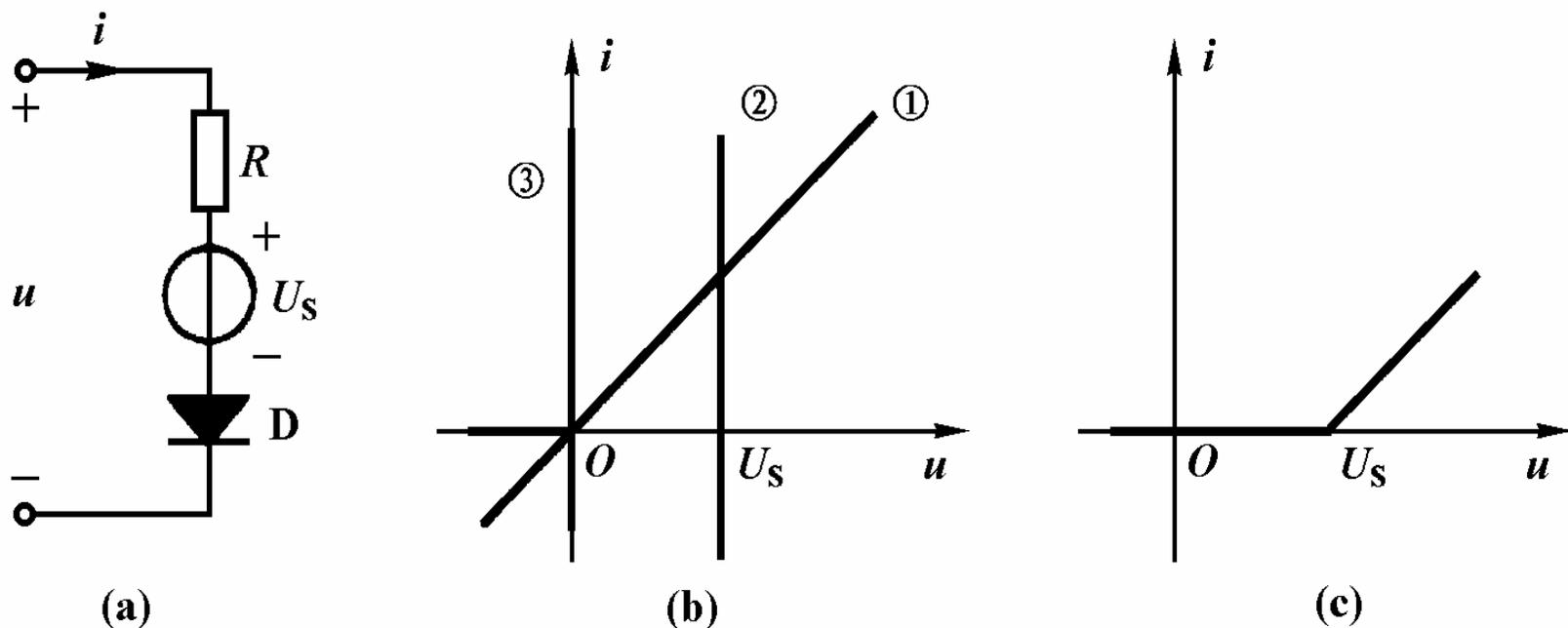
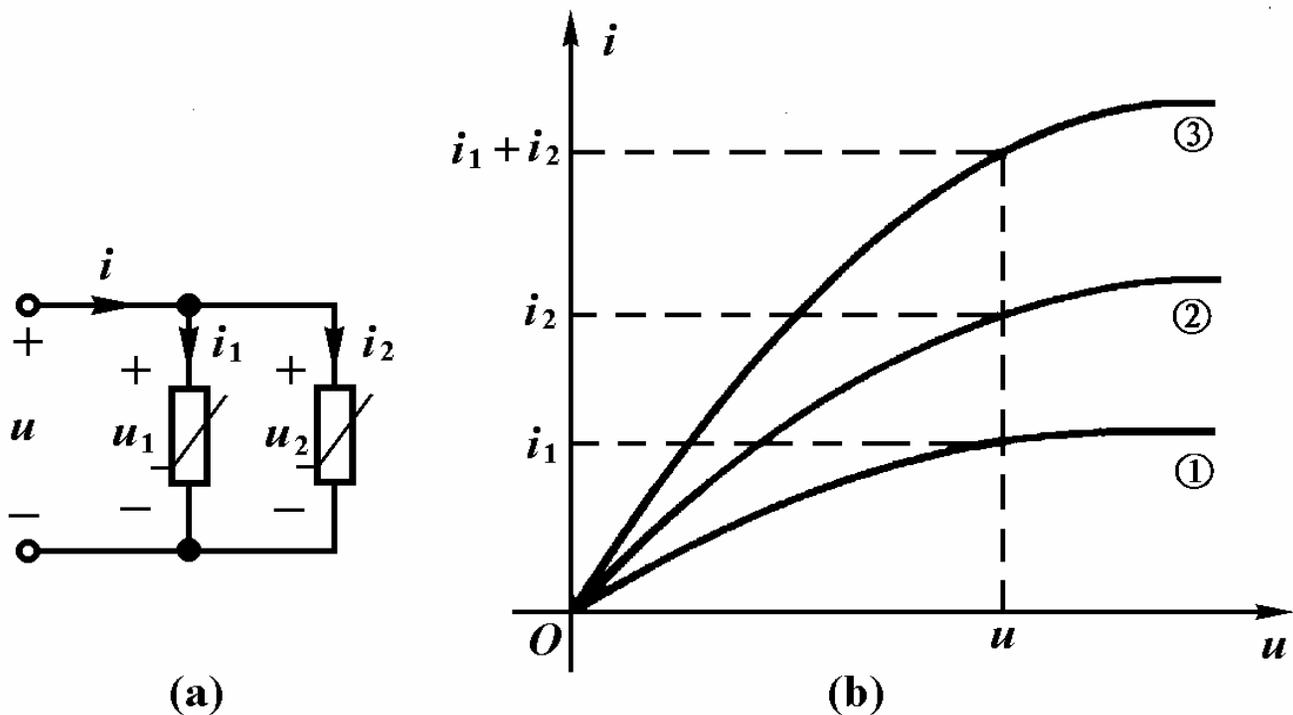


图17-5 电阻、电压源和理想二极管的串联

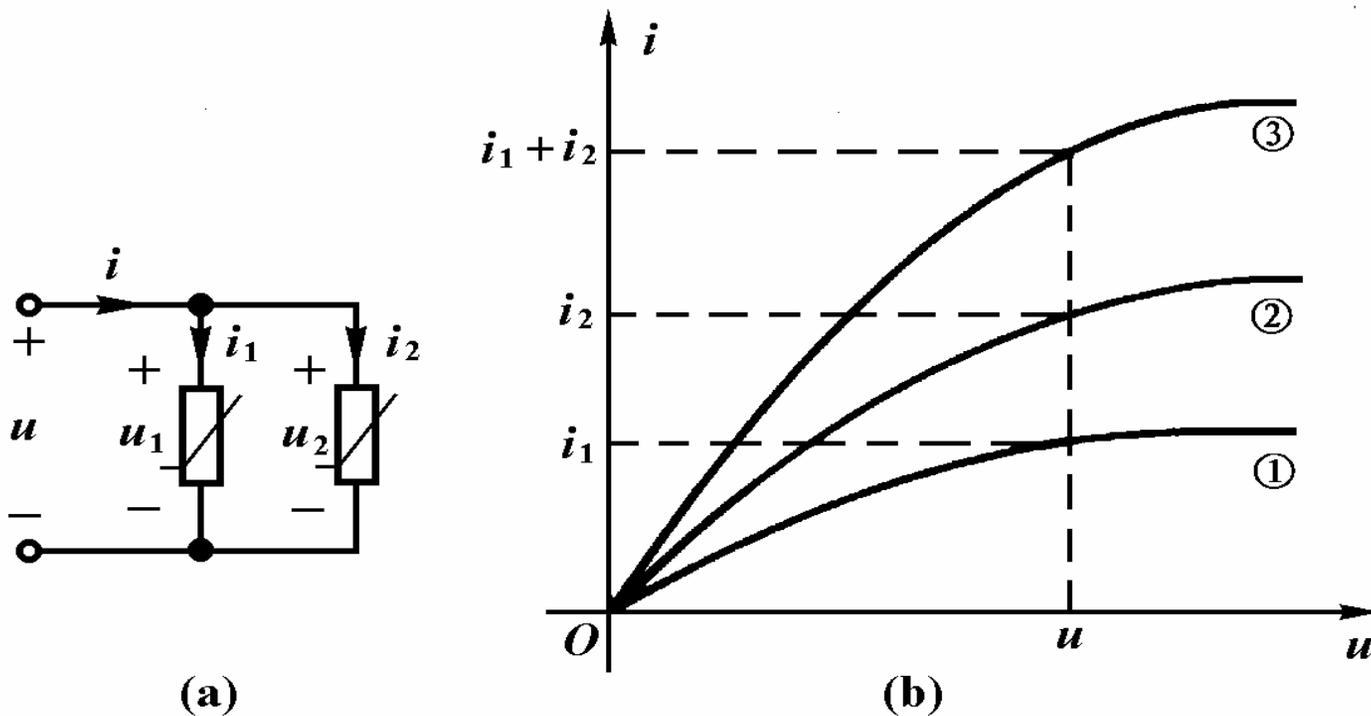
§ 17.1 非线性电阻

3. 非线性电阻的并联

两个压控非线性电阻的并联，它们的VCR特性曲线 $i_1=g_1(u_1)$ 和 $i_2=g_2(u_2)$ 如图(b)中曲线①和②所示。该并联单口的VCR特性曲线也可用图解法求得。



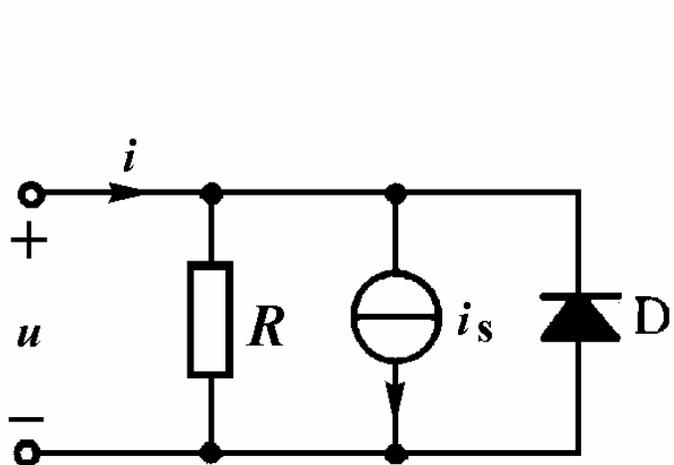
§ 17.1 非线性电阻



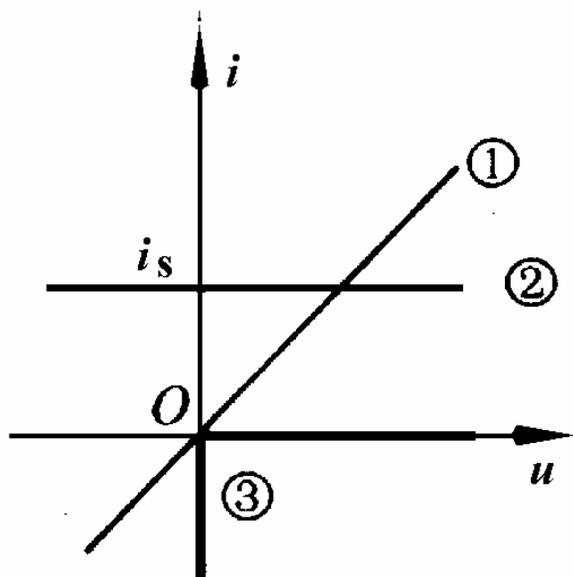
由上可见， n 个非线性电阻并联形成的单口网络，就端口特性而言，等效于一个非线性电阻，其VCR特性曲线，可以用同一电压坐标下电流坐标相加的方法求得。

§ 17.1 非线性电阻

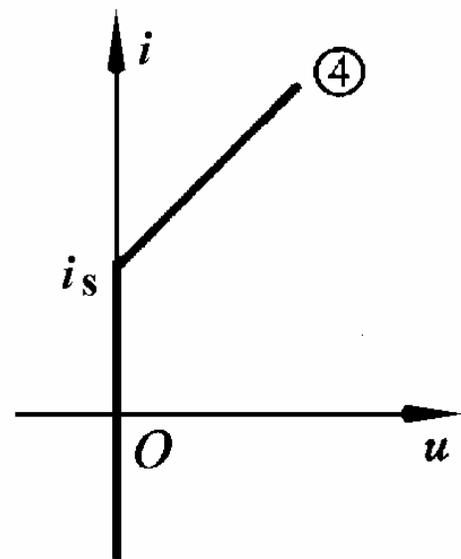
例2. 用图解法求图 (a) 的所示电阻、电流源和理想二极管并联单口的VCR特性曲线。



(a)



(b)



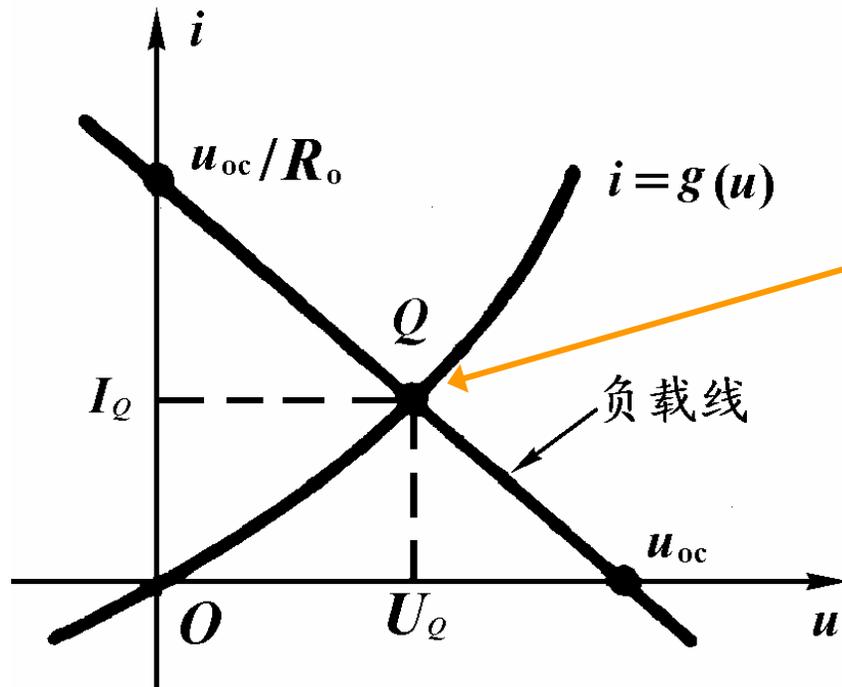
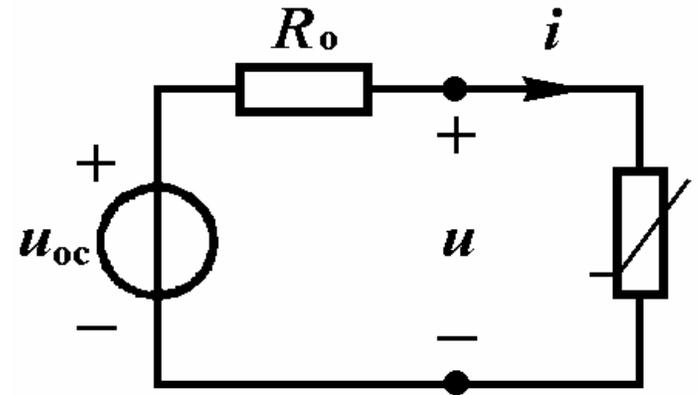
(c)

§ 17.1 非线性电阻

4. 仅含一个非线性电阻的电路

列写电路方程有

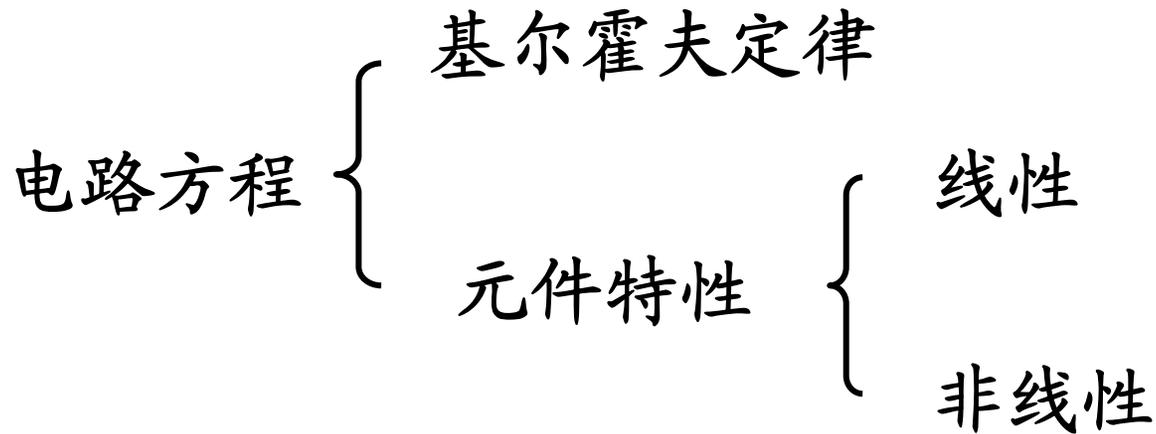
$$\begin{cases} u = u_{oc} - R_o i \\ i = g(u) \end{cases}$$



静态工作点

“曲线相交法”

§ 17.3 非线性电路的方程



对于非线性电阻电路方程是一组非线性代数方程

对于含有非线性储能元件动态电路方程是一组非线性微分方程

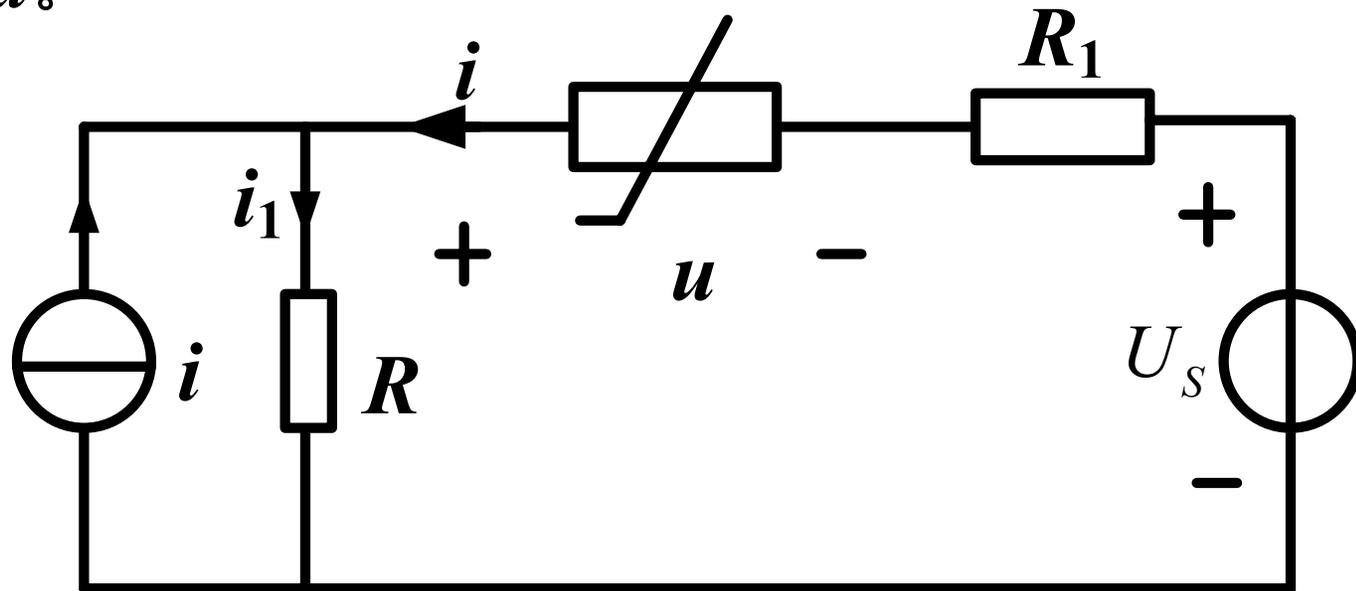
§ 17.3 非线性电路的方程

1. 非线性电阻电路的非线性代数方程

电路如图示, 已知 $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $u_s = 10V$, $i_s = 1A$

非线性电阻的特性是电压控制型的 $i = u^2 - u$

试求 u 。

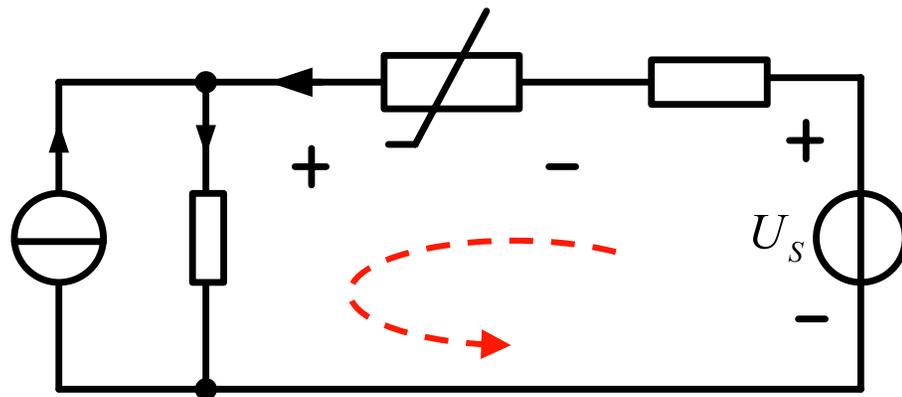


§ 17.3 非线性电路的方程

应用 KCL 有 $i_1 = i_s + i$

对于回路 1 应用 KVL, 有

$$R_1 i + R_2 i_1 - u = u_s$$



而将 $i_1 = i_s + i$ 和 $i = u^2 - u$ 代入上式, 得

$$5u^2 - 6u - 8 = 0$$

从上式解得 $u' = 2 \text{ V}, u'' = -0.8 \text{ V}$

非线性电阻电压有两个解, 这说明由于非线性电阻的参数通常不等于常数, 导致了非线性电路的解不是唯一的。

§ 17.3 非线性电路的方程

如果电路中既有电压控制的电阻，又有电流控制的电阻，建立方程的过程就比较复杂。可根据元件的特性选择支路电流法，回路电流法，结点电压法等来建立电路的方程。

§ 17.3 非线性电路的方程

2. 非线性动态电路的非线性微分方程

对于含有非线性动态元件的电路，通常选择非线性电感的磁通链和非线性电容的电荷为电路的状态变量，根据 **KCL** 和 **KVL** 列写的方程是一组非线性微分方程。

对于非线性代数方程和非线性微分方程的解析解一般都是难以求出来的，但是可以利用计算机应用数值法来求解。

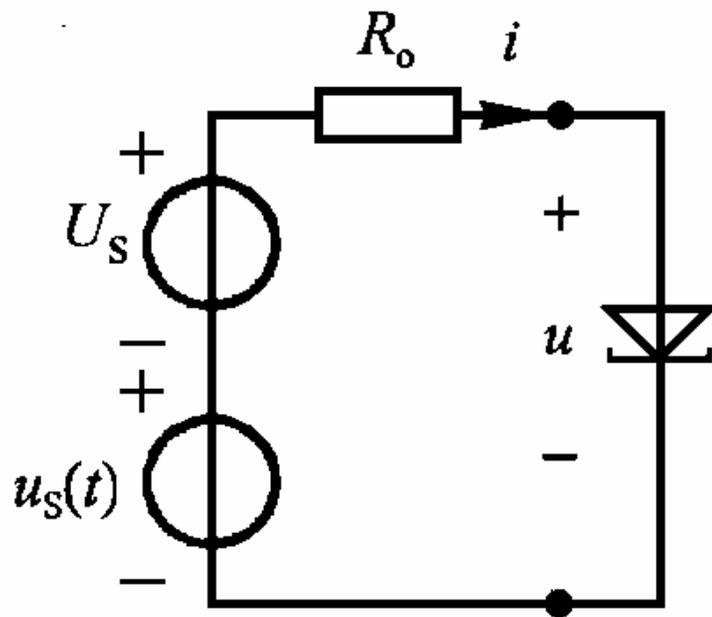
§ 17.4 小信号分析法

小信号分析是电子技术中常使用的一种分析方法。

以图所示含隧道二极管的电路为例来加以说明。

已知表示电路激励信号的时变电源 $u_S(t) = U_m \cos \omega t$ 和建立直流工作点用的直流电源 U_S ，求解电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

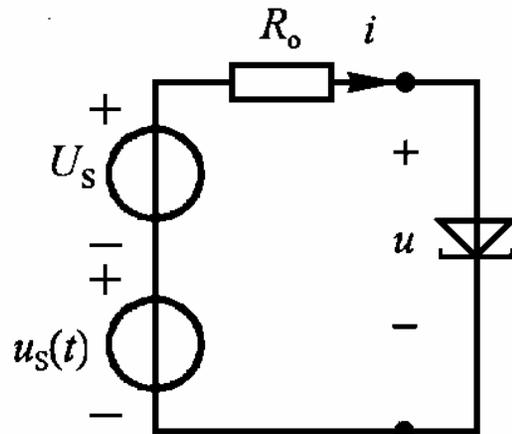
$$U_m < U_S$$



§ 17.4 小信号分析法

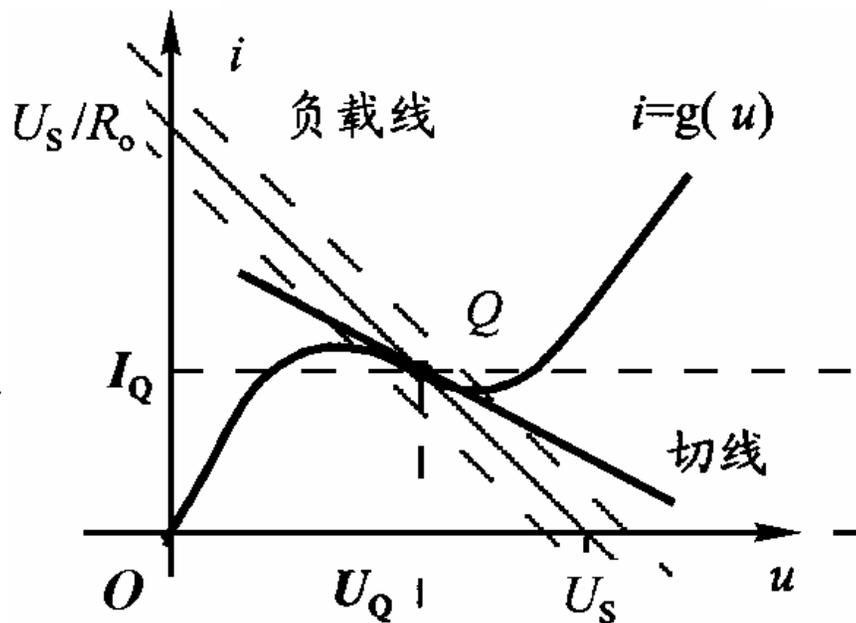
列出含源线性电阻单口和隧道二极管的VCR方程为

$$\begin{cases} u(t) = U_S + u_S(t) - R_o i(t) \\ i(t) = g\{u(t)\} \end{cases}$$



首先令 $u_S(t)=0$ ，求直流电源单独作用时的电压电流。

作负载线，与隧道二极管特性曲线相交于 Q 点

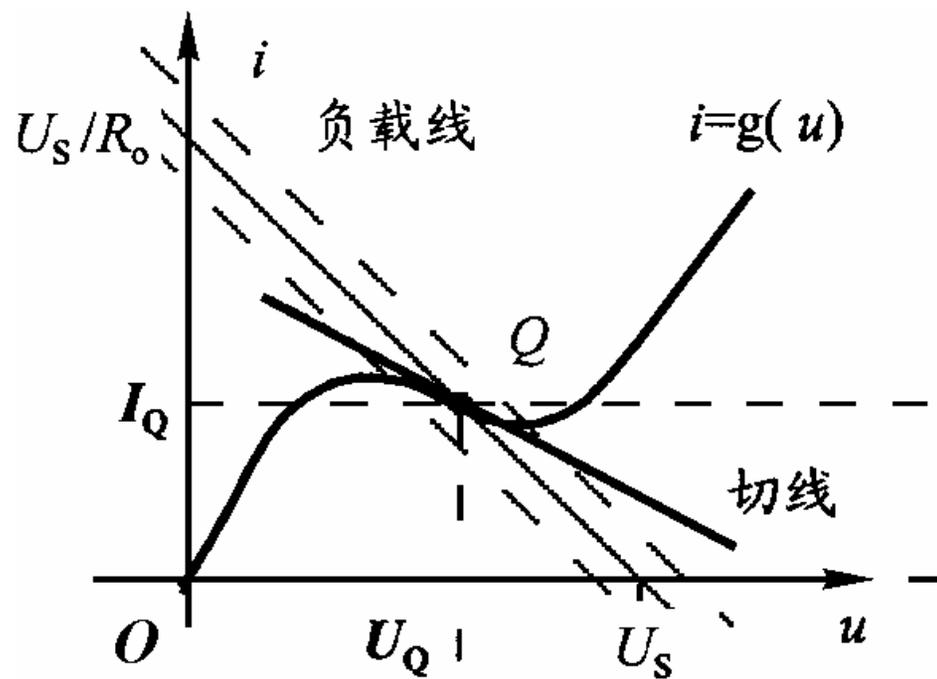


§ 17.4 小信号分析法

在图上，通过 $(U_S, 0)$ 和 $(0, U_S/R_0)$ 两点作负载线，与隧道二极管特性曲线相交于 Q 点。此直流工作点的电压 U_Q 和电流 I_Q 满足以下方程

$$U_Q = U_S - R_0 I_Q$$

可以用改变 U_S 和 R_0 数值的方法来改变直流工作点 Q ，而改变电压 U_Q 和电流 I_Q 。

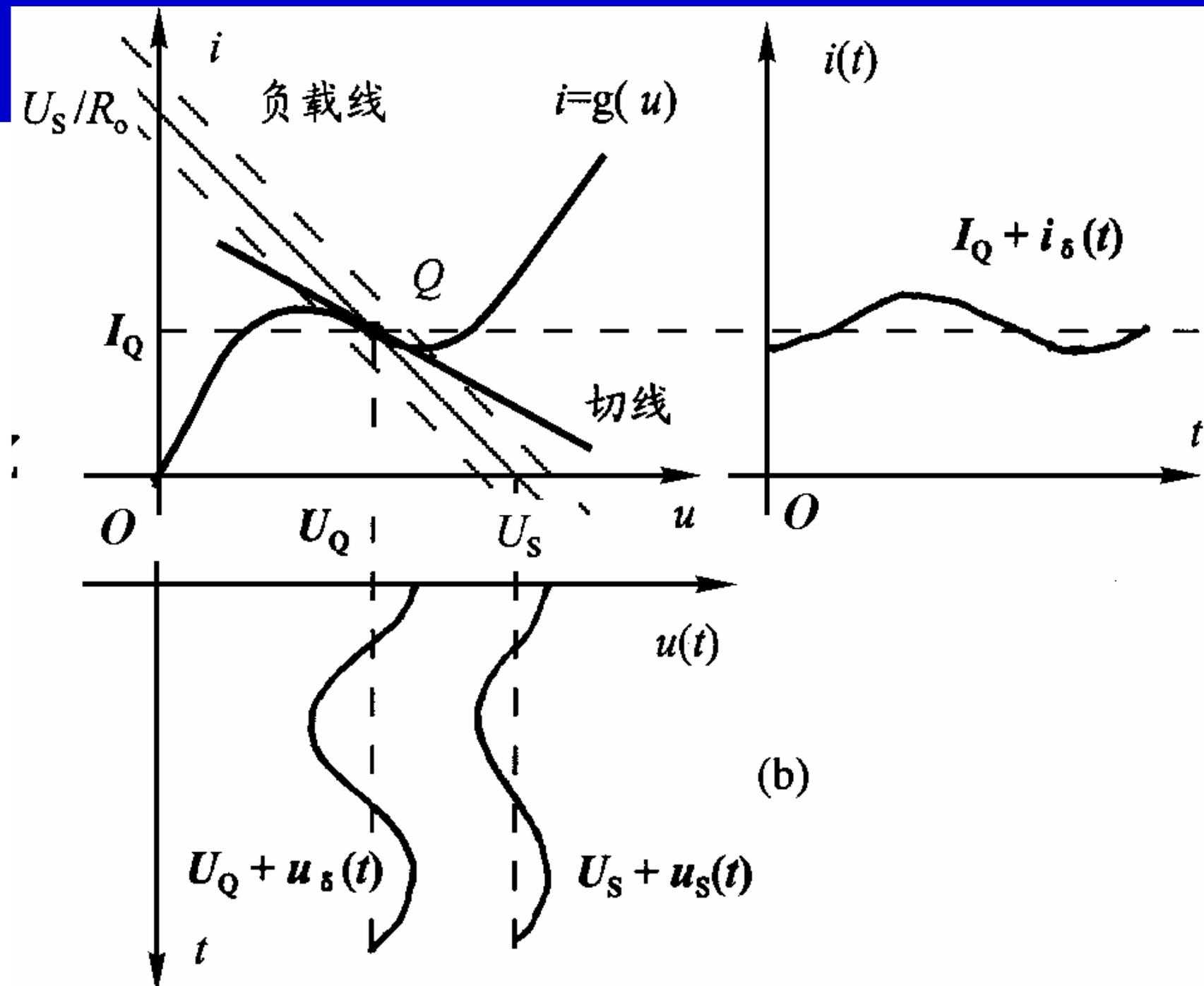


§ 17.4 小信号分析法

再考虑时变电源 $u_s(t) = U_m \cos \omega t$ 的作用，它使得负载线随时间平行移动，工作点也将在隧道二极管特性曲线上移动，可以用作图的方法逐点画出输出电流电压的波形，如图所示。它们在直流分量 U_Q 和 I_Q 的基础上增加了一个时变分量 $u_\delta(t)$ 和 $i_\delta(t)$ ，其数学表达式为

$$u(t) = U_Q + u_\delta(t)$$

$$i(t) = I_Q + i_\delta(t)$$



§ 17.4 小信号分析法

当输入信号的振幅较大时,这种图解分析法很直观,能看出直流偏置电源变化时,对输出波形的影响,适合于输入信号比较大的情况,称为大信号分析。

当输入信号的振幅很小时,其工作点非线性电阻特性曲线的一个非常小的区域变动,输出电压电流的时变分量很小,而当我们对此时变分量的计算感兴趣时,可以用泰勒级数将 $i(t)$ 在 U_Q 处展开,如下所示

$$\begin{aligned}i(t) &= I_Q + i_\delta(t) \\ &= g\{U_Q + u_\delta(t)\} \\ &= g(U_Q) + \left. \frac{di}{du} \right|_{U_Q} u_\delta(t) + \text{高次项}\end{aligned}$$

§ 17.4 小信号分析法

作为近似分析，忽略高次项，得到以下方程

$$i_{\delta}(t) \approx \left. \frac{di}{du} \right|_{U_Q} u_{\delta}(t) = Gu_{\delta}(t) \quad (17-7)$$

其中

$$G = \frac{1}{R_d} = \left. \frac{di}{du} \right|_{U_Q} \quad (17-8)$$

G 称为小信号电导，其值由特性曲线在工作点 Q 的斜率确定。式(17-8)表示时变分量 $u_{\delta}(t)$ 和 $i_{\delta}(t)$ 服从欧姆定律，隧道二极管表现为一个线性电阻。即

$$u_{\delta}(t) = R_d i_{\delta}(t)$$

§ 17.4 小信号分析法

$$\begin{cases} u(t) = U_S + u_S(t) - R_o i(t) & (17-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(t) = g\{u(t)\} & (17-4) \end{cases}$$

$$u(t) = U_Q + u_\delta(t) \quad (17-6a)$$

$$i(t) = I_Q + i_\delta(t) \quad (17-6b)$$

将式 (17-6) 代入式(17-3)中得到

$$U_Q + u_\delta(t) = U_S - R_o I_Q + u_S(t) - R_o i_\delta(t)$$

$$u_\delta(t) = u_S(t) - R_o i_\delta(t) \quad (17-9a)$$

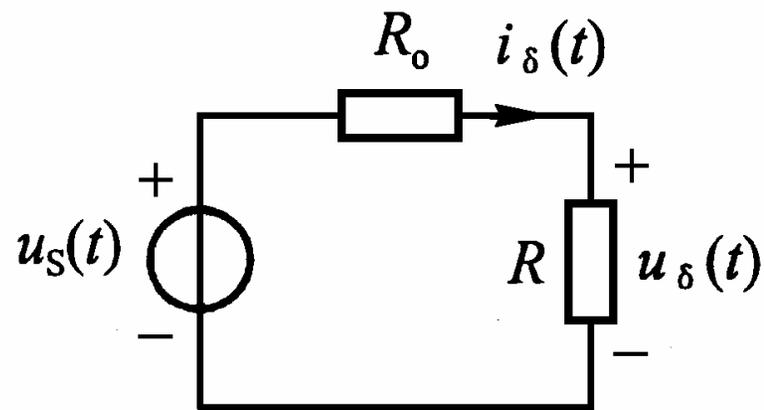
$$u_\delta(t) = R_d i_\delta(t) \quad (17-9b)$$

§ 17.4 小信号分析法

$$u_{\delta}(t) = u_S(t) - R_o i_{\delta}(t) \quad (17-9a)$$

$$u_{\delta}(t) = R_d i_{\delta}(t) \quad (17-9b)$$

根据式(17-9)，可以得到一个相应的电路模型。根据式(17-9a)画出的等效电路是电压源 $u_S(t)$ 和电阻 R_o 的串联，根据式(17-9b)画出的等效电路是一个线性电阻，如图所示。



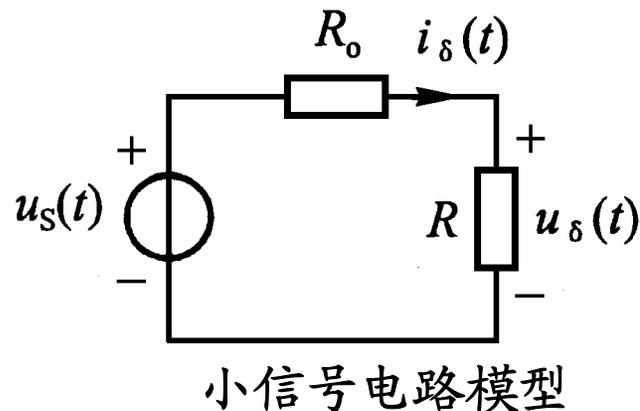
小信号电路模型

§ 17.4 小信号分析法

由此电路模型可以得到:

$$i_{\delta}(t) = \frac{u_S(t)}{R_o + R}$$

$$u_{\delta}(t) = \frac{R}{R_o + R} u_S(t)$$



如果 $R_o = 600\Omega$ 和 $R = -1000\Omega$, 则

$$u_{\delta}(t) = \frac{R}{R_o + R} u_S(t) = \frac{-1000}{600 - 1000} u_S(t) = 2.5u_S(t)$$

这说明隧道二极管工作于负电阻区域时, 输出信号可以比输入信号大, 电路能够作为一种电压放大器使用。

§ 17.4 小信号分析法

用小信号分析方法的步骤是：

- 1) 求解非线性电路的静态工作点；
- 2) 求解非线性电路的动态电导或动态电阻；
- 3) 作出给定的非线性电阻在静态工作点处的小信号等效电路；
- 4) 根据小信号等效电路进行求解。

小结

1. 非线性电阻的特性通常用电压电流特性曲线表示。
2. 含非线性电阻的串联、并联和混联电阻电路，其端口的VCR特性曲线可用曲线相加法求得。
3. 对于仅含一个非线性电阻的电路，宜采用曲线相交法求解。此时，应先把非线性电阻以外的线性含源单口网络化为戴维宁等效电路。戴维宁等效电路的电压电流特性与非线性电阻电压电流特性的交点的坐标值就是欲求的解。

小结

4. 小信号分析的实质是用通过直流工作点的切线代替曲线，用线性电阻（小信号增量电阻）代替非线性电阻对小信号增量电压、电流进行分析。