第十二章　非正弦周期电流电路

- 非正弦周期信号
- 非正弦周期函数的傅立叶级数展开式
- 非正弦周期电流电路的计算
- 有效值、平均值和平均功率

§ 12.1 非正弦周期信号

非正弦周期信号的特点:

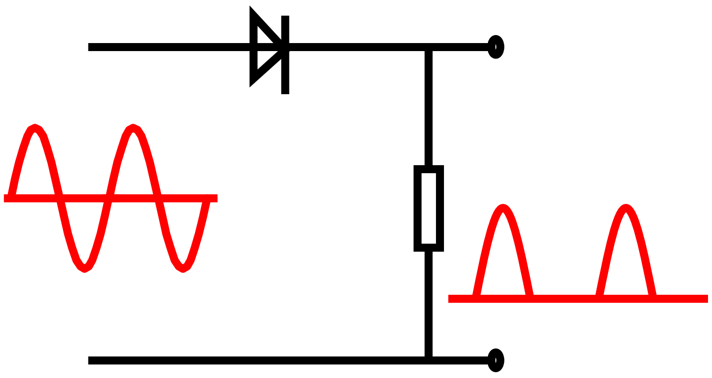
- 不是正弦波
- 按周期规律变化，满足:

$$f(t) = f(t \pm kT) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

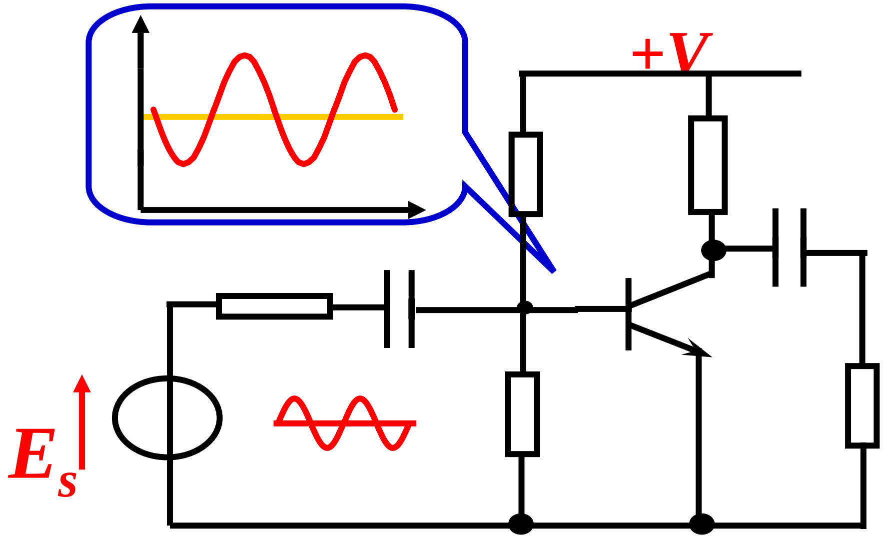
式中 T 为周期。

非正弦周期信号举例

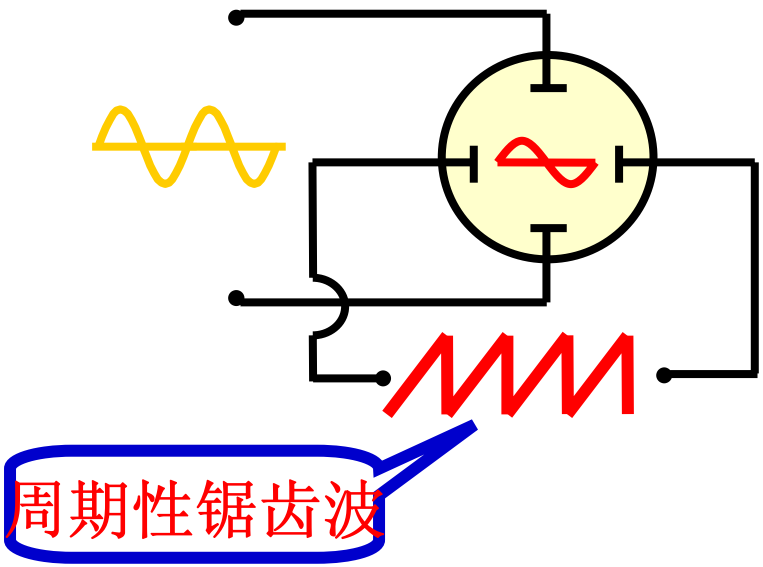
1、半波整流电路的输出信号



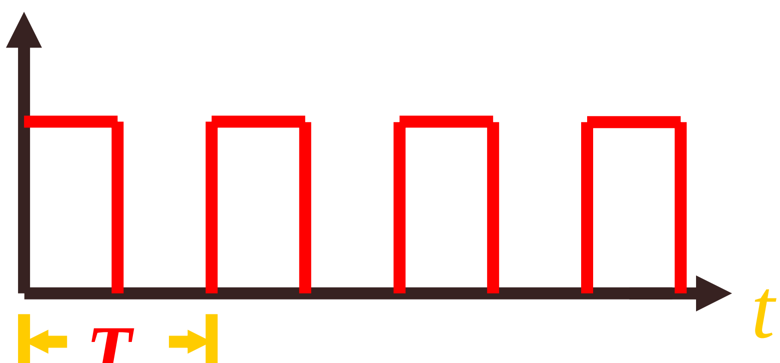
3、交直流共存电路



2、示波器内的水平扫描电压



4、计算机内的脉冲信号



§12.2 周期信号分解为傅里叶级数

任何满足狄里赫利条件的周期性时间函数 $f(t)$，其周期记为T，可以展开成由正弦函数和余弦函数项组成的三角级数，即傅里叶级数。

所谓狄里赫利条件是:

（1）$f(t)$在一个周期内只有有限个不连续点;

（2）$f(t)$在一个周期内只有有限个极大和极小值;

（3）积分 $\int_0^T |f(t)|dt$ 存在。

工程上所遇到的周期函数一般都满足上述条件。

§ 12.2 周期信号分解为傅里叶级数

周期为T，角频率为 $\omega = 2\pi/T$ 的周期函数 $f(t)$可以展开成傅里叶级数

基波

（和$f(t)$同频）

$$
\begin{aligned}
f(t) = a_0 &+ a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \\
&+ a_2\cos 2\omega t + b_2\sin 2\omega t \\
&+ \cdots + a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t + \cdots
\end{aligned}
$$

直流分量

二次谐波

（2倍频）

高次谐波

即：

$$
f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t)
$$

§ 12.2 周期信号分解为傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega t + \psi_k)$$

其中：$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \longrightarrow A_0 = a_0$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

$$\longrightarrow \quad A_{km} = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}, \quad \psi_k = -\arctan\frac{b_k}{a_k}$$

求出 a_0、a_k、b_k 便可得到函数 $f(t)$ 的傅里叶展开式。

§ 12.2 周期信号分解为傅里叶级数

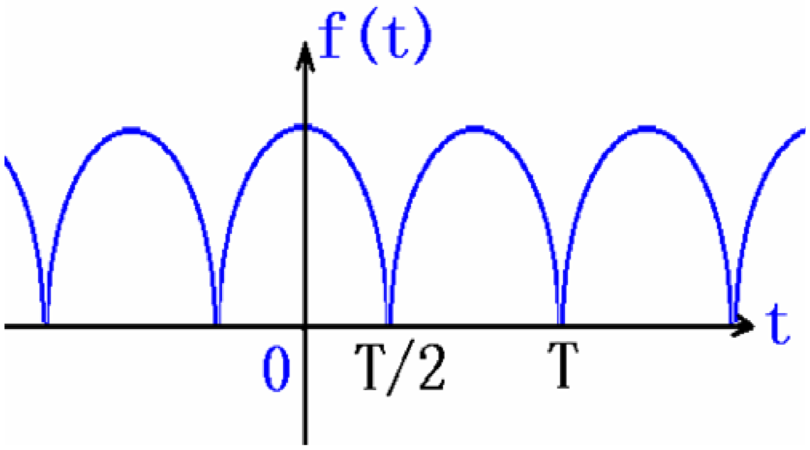
函数对称性与傅里叶系数的关系：

(1) 偶函数 $f(t) = f(-t)$

波形与纵轴对称如图所示，

满足： $b_k = 0$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega t dt$$

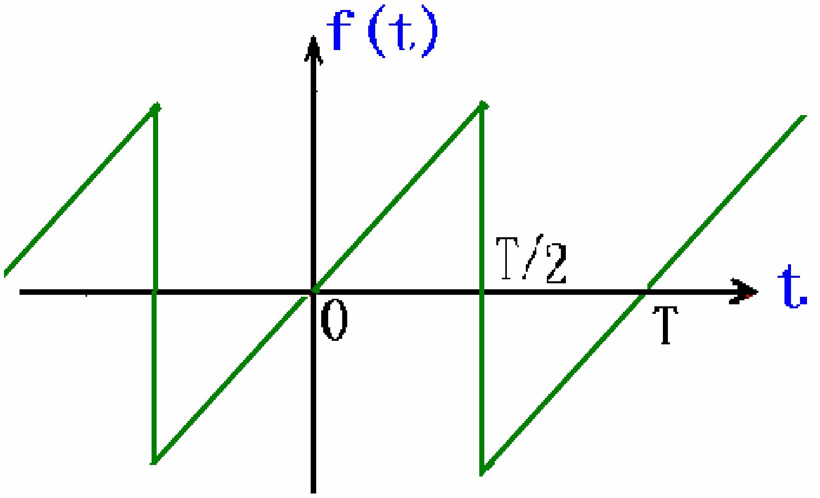


(2) 奇函数 $f(t) = -f(-t)$

波形与原点对称如图所示，

满足： $a_k = 0$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin k\omega t dt$$

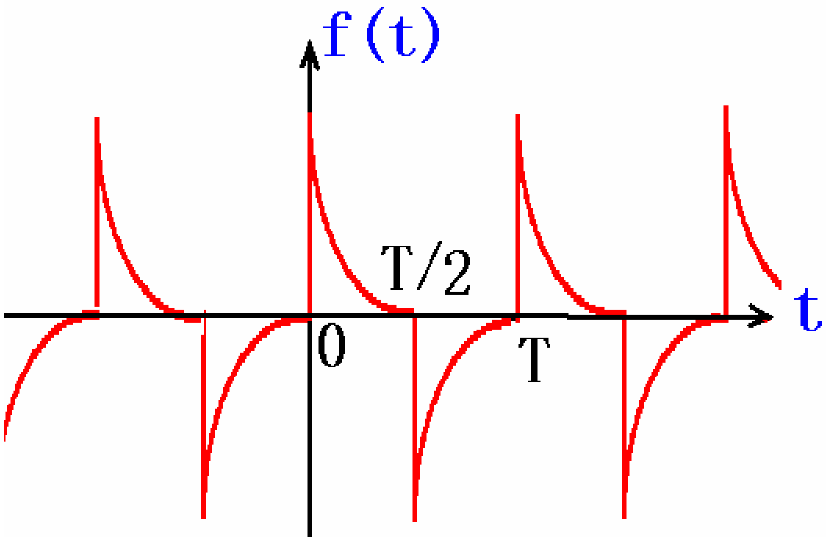


§ 12.2　周期信号分解为傅里叶级数

(3) 奇谐波函数（无偶次谐波）

波形镜对称如图所示，满足：

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$



$$a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$$

(4) 若函数是偶函数又是镜对称时，则只含有奇次的余弦项，即

$$a_0 = a_{2k} = b_k = 0$$

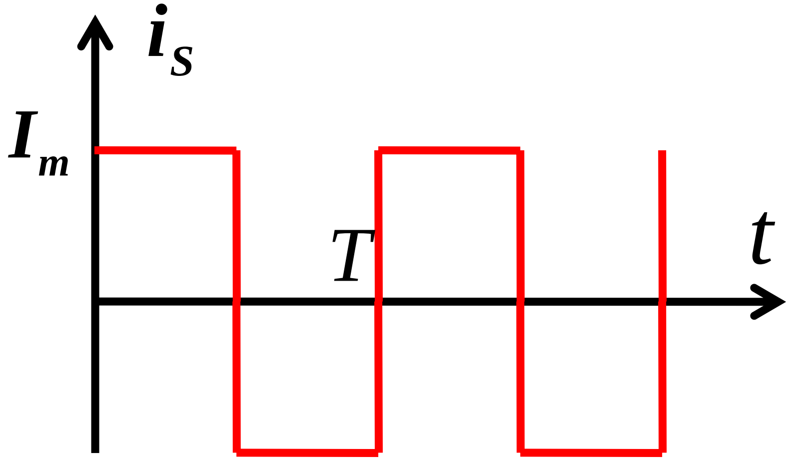
(5) 若函数是奇函数又是镜对称时，则只含有奇次的正弦项，即

$$a_0 = a_k = b_{2k} = 0$$

§ 12.2 周期信号分解为傅里叶级数

例1. 把图示周期性方波电流分解成傅里叶级数。

解: 右图示周期性方波电流为函数表达式为



$$i_S(t) = \begin{cases} I_m & 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -I_m & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$$

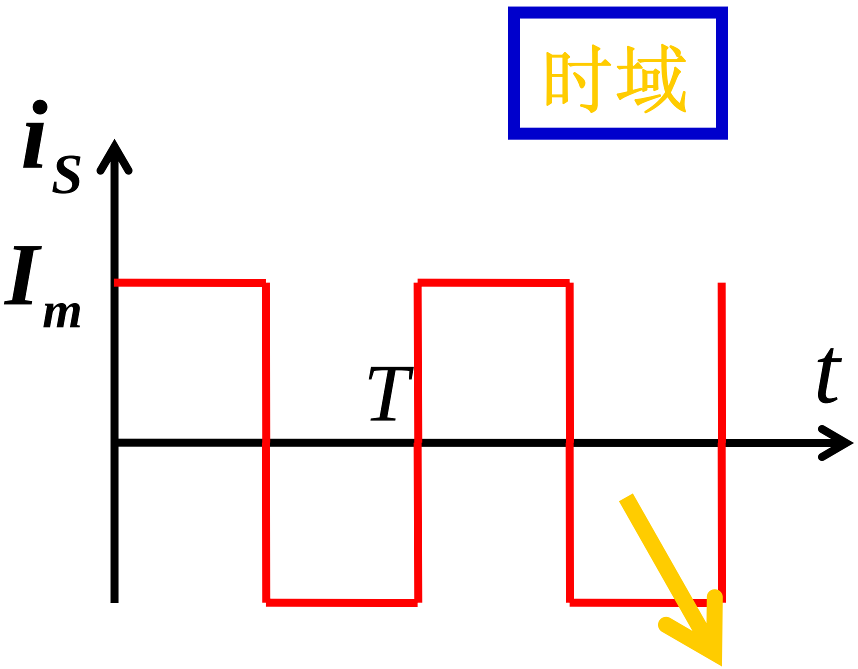
右图示周期性方波电流为奇谐波函数，则有

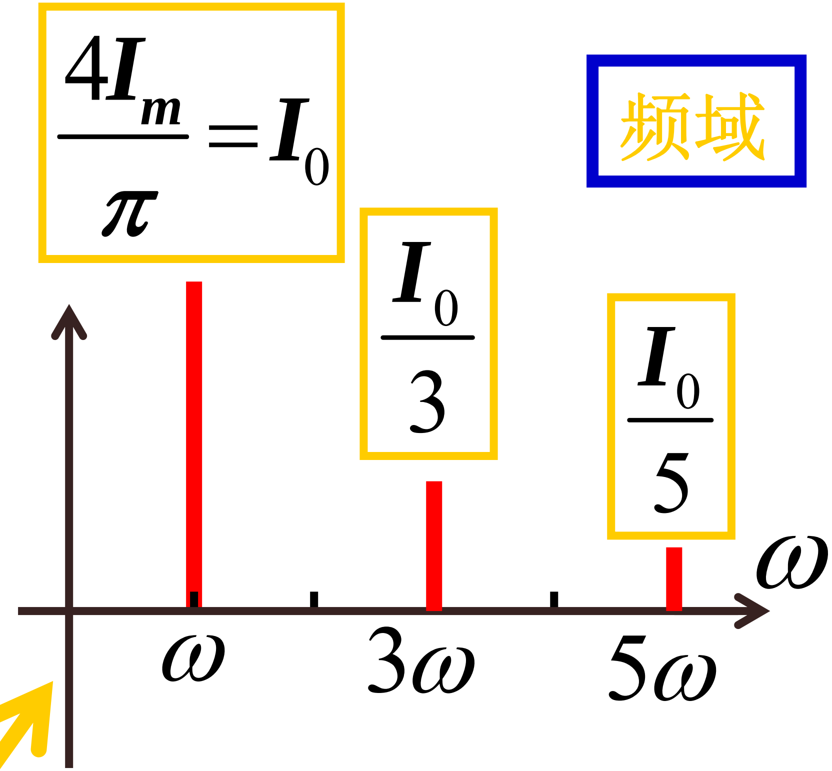
$$a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$$

k为奇数时，有

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\sin(k\omega t)d\omega t = \frac{I_m}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos k\omega t\right]_0^{\pi} = \frac{2I_m}{k\pi}$$

频谱图





$$i_S = \frac{4I_m}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$$

时域

周期性函数

频域

离散谱线

§ 12.3 非正弦周期电流电路的计算

具体步骤:

1. 利用付里叶级数，将非正弦周期函数展开成若干种频率的谐波信号;

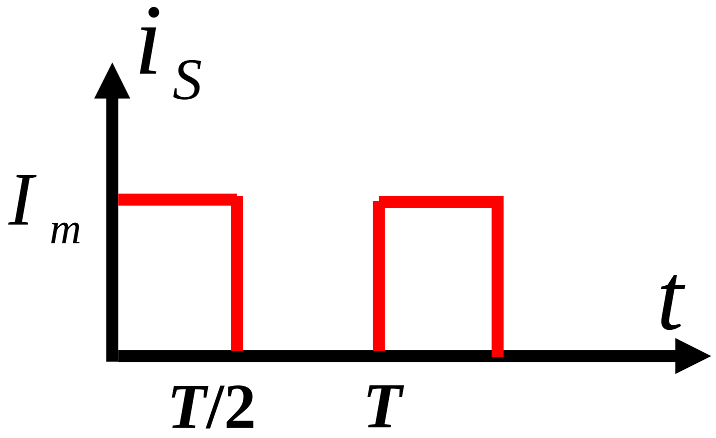
2. 利用正弦交流电路的计算方法，对各谐波信号分别计算。

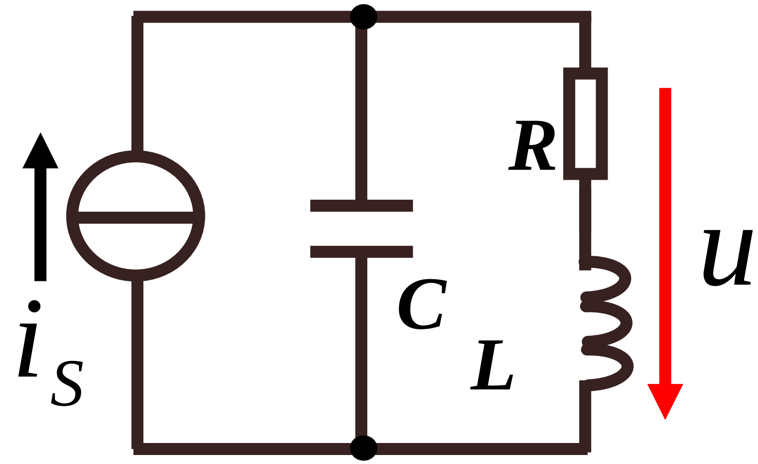
（注意：对交流各谐波的 X_L、X_C不同，对直流C相当于开路、L相当于短路。）

3. 将以上计算结果，用瞬时值迭加。

§ 12.3 非正弦周期电流电路的计算

例2. 方波信号激励的电源。





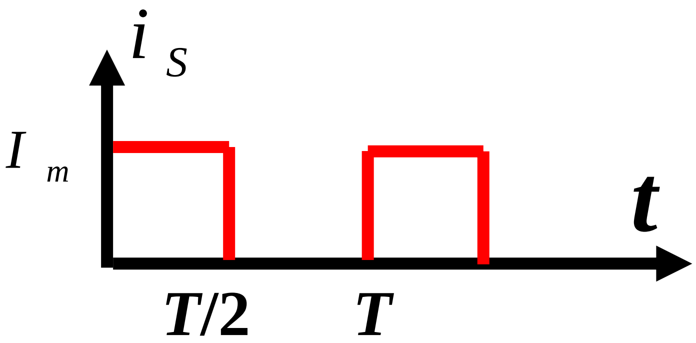
已知：$R = 20\ \Omega$ 、 $L = 1\text{mH}$ 、 $C = 1000\ \text{pF}$

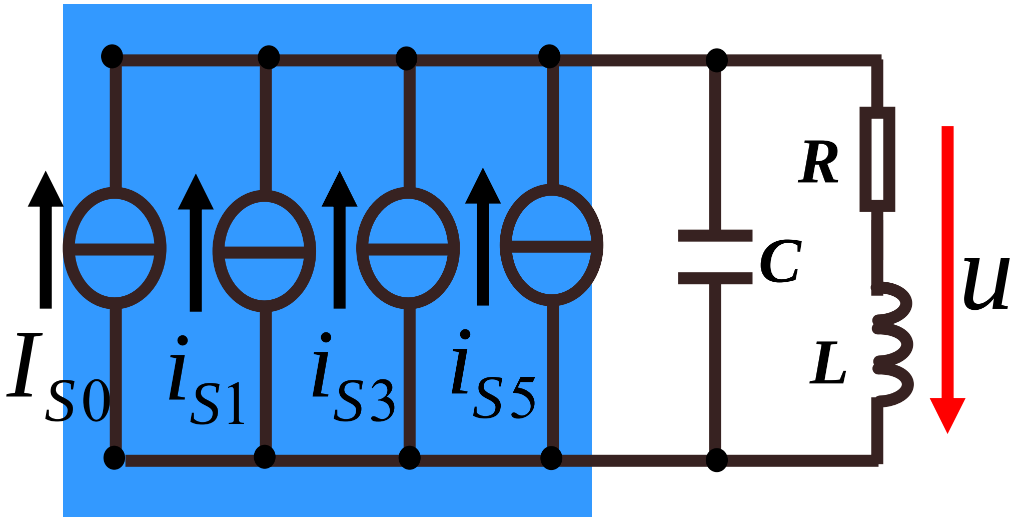
$I_m = 157\ \mu\text{A}$ 、 $T = 6.28\ \mu\text{S}$

求：u

§ 12.3 非正弦周期电流电路的计算

解：(1)将激励电源i_S展开：



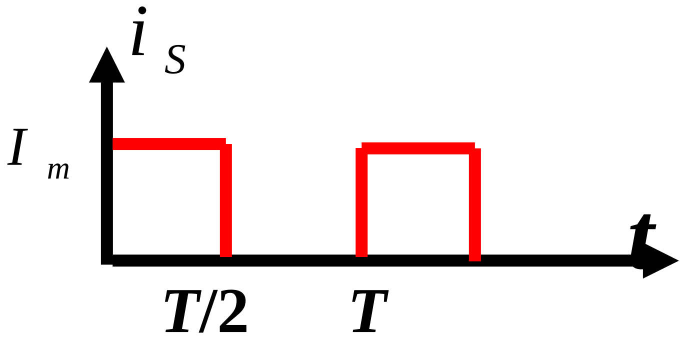


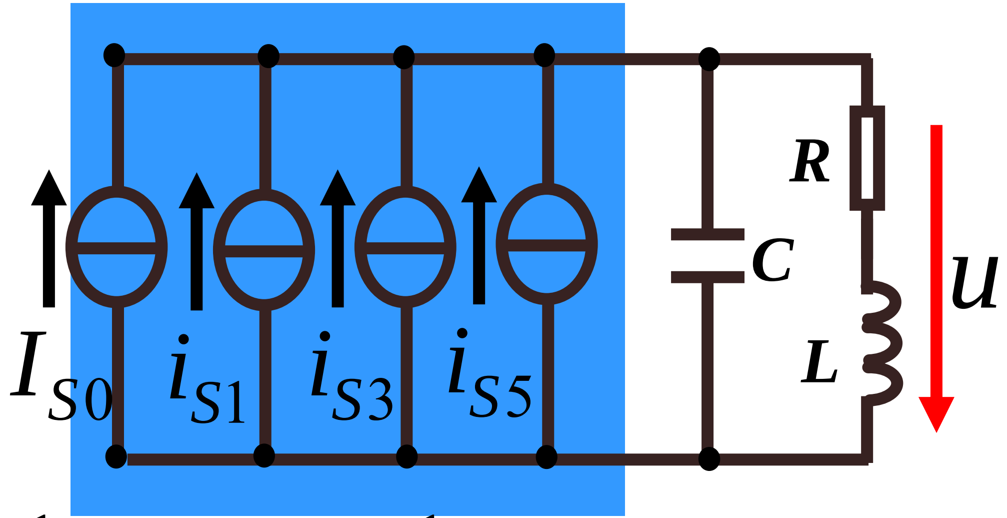
$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots)$$

$$= \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}\sin \omega t + \frac{2I_m}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{2I_m}{5\pi}\sin 5\omega t + \ldots$$

$$i_S = I_{s0} + i_{s1} + i_{s3} + i_{s5} + \ldots$$

§ 12.3 非正弦周期电流电路的计算





$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots)$$

代入已知数据： $\boxed{I_m = 157\ \mu\text{A},\ \ T = 6.28\ \mu\text{s}}$

$$i_s(t) = 78.5 + 100\sin\omega t + 33.3\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t + \ldots$$

这里：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{6.28\times 10^{-6}} = 10^{6}\ \text{rad/s}$$

§ 12.3 非正弦周期电流电路的计算

(2) 对各种频率的谐波分量单独计算:

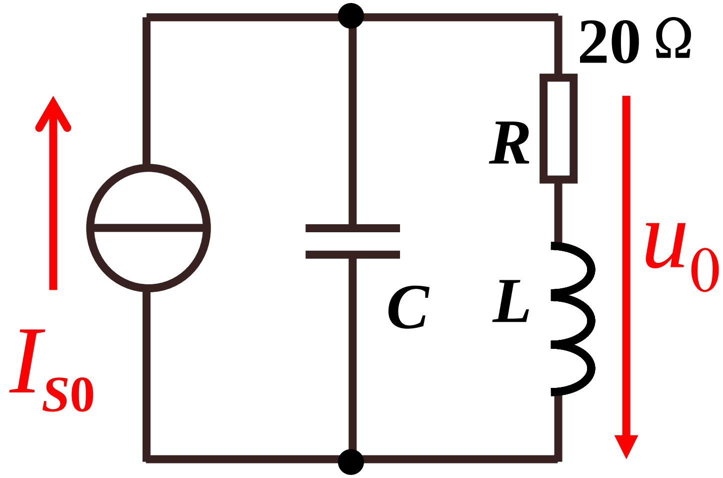
① 直流分量 I_{S0} 作用

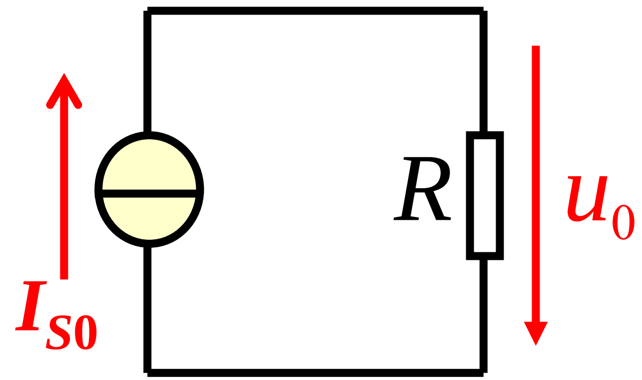
$$I_{S0} = 78.5\mu\text{A}$$

对直流，电容相当于断路；电感相当于短路。画出等效电路图。

得出输出的直流电压分量为:

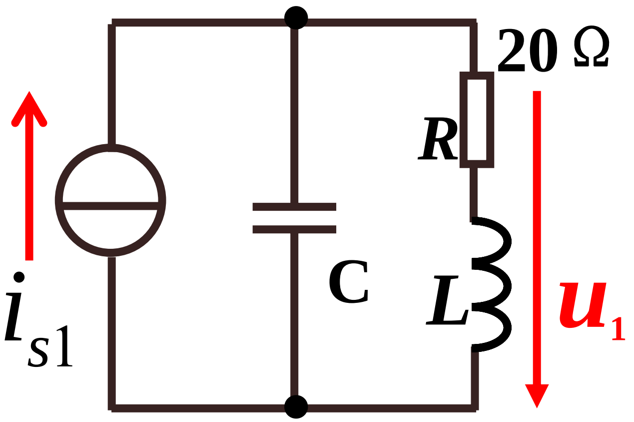
$$\boxed{\begin{aligned} U_0 &= RI_{S0} \\ &= 20\times78.5\times10^{-6} \\ &= 1.57\ \text{mV} \end{aligned}}$$





§ 12.3 非正弦周期电流电路的计算

② 基波作用



$L = 1\text{mH}$

$C = 1000\,\text{pF}$

$\omega = 10^6 \text{rad/s}$

$$i_{s1} = 100 \sin 10^6 t \quad \mu\text{A}$$

$$\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 1\text{k}\Omega$$

$$\omega_1 L = 10^6 \times 10^{-3} = 1\text{k}\Omega$$

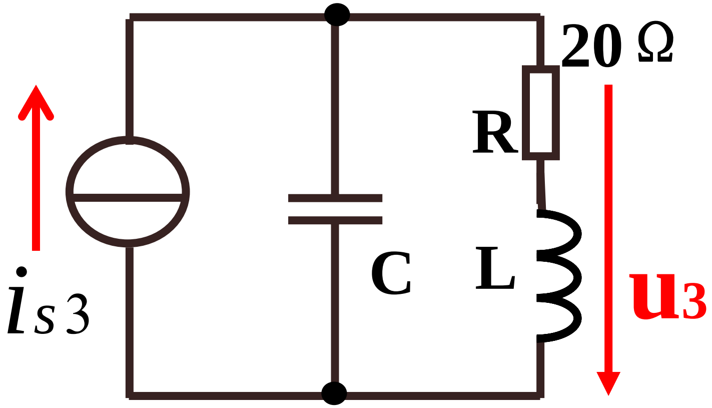
$$Z(\omega_1) = \frac{(R + jX_L)\cdot(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)}$$

$$\approx \frac{X_L X_C}{R} = \frac{L}{RC} = 50\,\text{k}\Omega$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{S1} \cdot Z(\omega_1) = \frac{100 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} \cdot 50 = \frac{5000}{\sqrt{2}}\ \text{mV}$$

§12.3 非正弦周期电流电路的计算

③三次谐波作用



$$i_{s3}=\frac{100}{3}\sin 3\cdot 10^{6}t\quad \mu A$$

$$\frac{1}{\omega_3 C}=\frac{1}{3\times 10^{6}\times 1000\times 10^{-12}}=0.33K\Omega$$

$$\omega_3 L=3\times 10^{6}\times 10^{-3}=3k\Omega$$

$$Z(3\omega_1)=\frac{(R+jX_{L3})(-jX_{C3})}{R+j(X_{L3}-X_{C3})}=374.5\angle -89.19^{\circ}\ \Omega$$

$$\dot{U}_3=\dot{I}_{S3}\cdot Z(3\omega_1)=33.3\times\frac{10^{-6}}{\sqrt{2}}\times 374.5\angle -89.19^{\circ}$$

$$=\frac{12.47}{\sqrt{2}}\angle -89.2^{\circ}\ \mathrm{mV}$$

五次谐波作用分析略

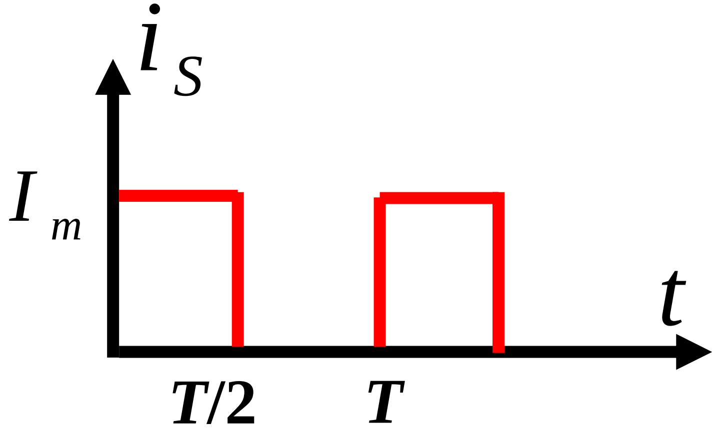
§ 12.3 非正弦周期电流电路的计算

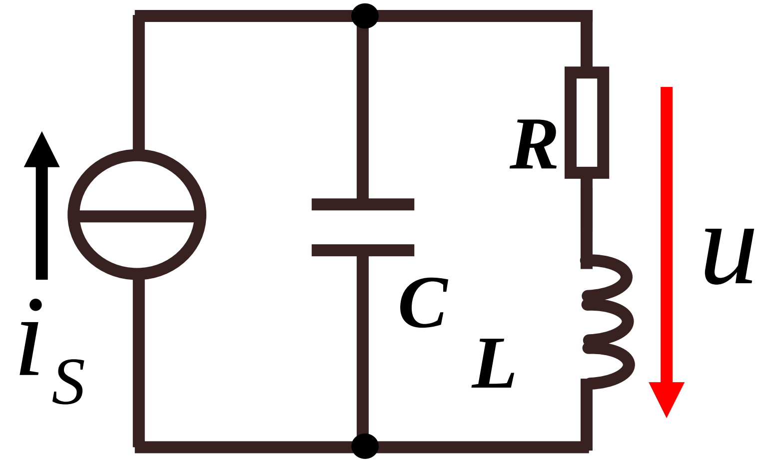
(3) 各谐波分量计算结果瞬时值迭加:

$$U_0 = 1.57\,\text{mV} \qquad \dot{U}_3 = \frac{12.47}{\sqrt{2}}\angle -89.2^\circ\,\text{mV}$$

$$\dot{U}_1 = \frac{5000}{\sqrt{2}}\,\text{mV} \qquad \dot{U}_5 = \frac{4.166}{\sqrt{2}}\angle -89.53^\circ\,\text{mV}$$

$$\begin{aligned} u &\approx U_0 + u_1 + u_3 + u_5 \\ &= 1.57 + 5000\sin\omega t \\ &\quad + 12.47\sin(3\omega t - 89.2^\circ) \\ &\quad + 4.166\sin(5\omega t - 89.53^\circ)\ \text{mV} \end{aligned}$$





已知：$R = 20\,\Omega$、$L = 1\text{mH}$、$C = 1000\ \text{pF}$

$I_m = 157\,\mu\text{A}$、$T = 6.28\,\mu\text{S}$

求：u

结果

$$\boxed{\begin{aligned} u &= U_0 + u_1 + u_3 + u_5 \\ &\approx 1.57 + 5000\sin\omega t \\ &\quad + 12.47\sin(3\omega t - 89.2^\circ) \\ &\quad + 4.166\sin(5\omega t - 89.53^\circ)\ \text{mV} \end{aligned}}$$

§12.3 非正弦周期电流电路的计算

计算非正弦周期电流电路应注意的问题:

1. 最后结果只能是瞬时值迭加。

不同频率正弦量不能用相量相加。

$$\dot{U} \neq U_0 + \dot{U}_{\omega 1} + \dot{U}_{\omega 3} + \dot{U}_{\omega 5} + \cdots$$

2. 不同频率对应的 X_C、X_L不同。

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

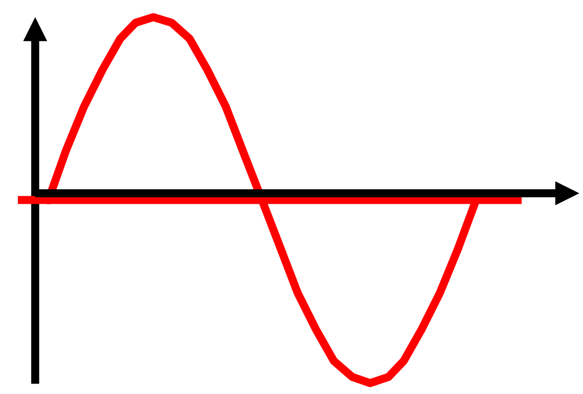
1. 数学预备知识： 三角函数的性质

(1) 正弦、余弦信号一个周期内的积分为**0**。

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

（***k***为整数）



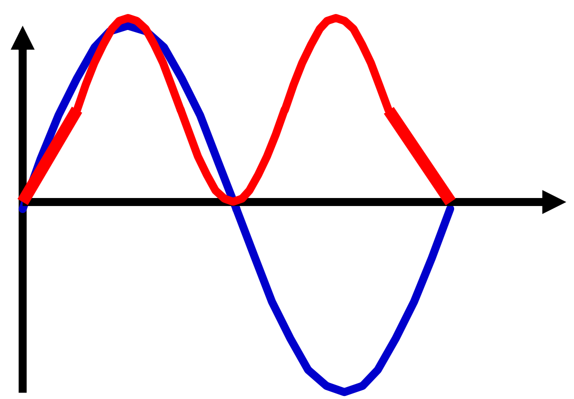
§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

（2） **sin²*t* , cos²*t*** 在一个周期内的积分为 π

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t) = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t) = \pi$$

（ k 为整数）



§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

(3) 三角函数的正交性

$$\int_0^{2\pi} \cos \boldsymbol{k\omega t} \cdot \sin \boldsymbol{p\omega t} \mathrm{d}(\boldsymbol{\omega t}) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \boldsymbol{k\omega t} \cdot \cos \boldsymbol{p\omega t} \mathrm{d}(\boldsymbol{\omega t}) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \boldsymbol{k\omega t} \cdot \sin \boldsymbol{p\omega t} \mathrm{d}(\boldsymbol{\omega t}) = 0$$

$$(k \neq p)$$

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

2. 非正弦周期函数的有效值

若非正弦周期电流函数 $i(t)$ 可展开为傅里叶级数

$$i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega t+\psi_k)$$

根据周期函数有效值的定义 $I \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$

则此正弦周期电流函数 $i(t)$ 的有效值为：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)\right]^2 d(\omega t)}$$

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)\right]^2 dt}$$

上式展开后有:

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 dt=I_0^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{km}^2\cos^2\left(k\omega t+\psi_k\right)dt=\frac{I_{km}^2}{2}=I_k^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)dt=0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)I_{qm}\cos\left(q\omega t+\psi_q\right)dt=0 \qquad k\neq q$$

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

$$\therefore \quad I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}$$

由此得到结论:

周期函数的有效值为直流分量
及各次谐波分量有效值平方和的方根

此结论可以推广用于其他非正弦周期量。

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

例3. 非正弦周期电压、电流分别为

$$u = 100 + 50\sin\omega t + 10\sin 2\omega t \quad \text{V}$$

$$i = 10 + 4\sin\left(\omega t + 30^\circ\right) + 2\sin\left(3\omega t - 45^\circ\right) \quad \text{A}$$

求电压,电流的有效值

解:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{100^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2} = 100.9 \text{ V}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 10.5 \text{ A}$$

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

3. 非正弦周期函数的平均值

设非正弦周期电流可以分解为傅里叶级数:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega t + \psi_k)$$

则其平均值定义为:

$$I_{av} \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T \left|i(t)\right| dt$$

即: 非正弦周期电流的平均值等于此电流绝对值的平均值。

§12.4 平均值、有效值和平均功率

按上式可求得正弦电流的平均值为:

$$I_{av} \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T \left|I_m \cos(\omega t)\right| dt = 0.637 I_m = 0.898 I$$

注意:

1）测量非正弦周期电流或电压的有效值要用电磁系或电动系仪表，测量非正弦周期量的平均值要用磁电系仪表。

2）非正弦周期量的有效值和平均值没有固定的比例关系，它们随着波形不同而不同。

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

4. 非正弦周期交流电路的平均功率

设任意一端口电路的非正弦周期电流和电压可以分解为傅里叶级数:

$$u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{km}\cos(k\omega t+\psi_{uk})$$

$$i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}\cos(k\omega t+\psi_{uk}-\varphi_k)$$

则一端口的平均功率为:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u\cdot i\,\mathrm{d}t$$

§12.4 平均值、有效值和平均功率

代入电压、电流表示式并利用三角函数的性质，得:

$$P=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k$$
$$=P_0+P_1+P_2+\cdots$$

由此得出结论:

非正弦周期电流电路的平均功率
= 直流分量的功率 + 各次谐波的平均功率

§12.4 平均值、有效值和平均功率

应该特别注意的是电路在频率相同的几个正弦信号激励时，不能用平均功率叠加的方法来计算正弦稳态的平均功率。

应该先计算出总的电压和电流后，再用公式 $P = UI\cos\varphi$ 来计算平均功率。

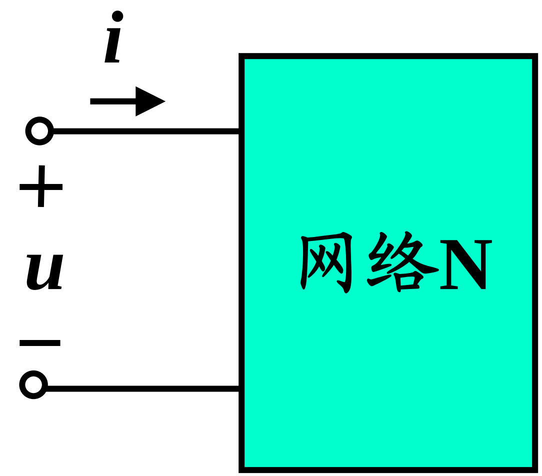
§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

例4. 单口网络的端电压和端电流分别为

$$u = 2 + 10\sin\omega t + 5\sin 2\omega t + 2\sin 3\omega t \ \ \text{V}$$

$$i = 1 + 2\sin(\omega t - 30^\circ) + \sin(2\omega t - 60^\circ) \ \ \text{A}$$

计算网络吸收的平均功率。



解: $P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2$

$$= 2\times 1 + \frac{10}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\cos 30^\circ$$

$$+ \frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 60^\circ$$

$$= 11.9 \ \ \text{W}$$

此电路中，电压中有三次谐波，但电流中没有三次谐波，所以三次谐波的功率为零

§ 12.4 平均值、有效值和平均功率

例5. 已知流过5Ω电阻的电流为

$$i(t)=(5+10\sqrt{2}\cos t+5\sqrt{2}\cos 2t)\mathrm{A}$$

试求电阻吸收的平均功率。

解：分别计算各种频率成分的平均功率再相加，即

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{I}_0^2\boldsymbol{R}+\boldsymbol{I}_1^2\boldsymbol{R}+\boldsymbol{I}_2^2\boldsymbol{R}$$
$$=5^2\times5+10^2\times5+5^2\times5=125+500+125=750\mathrm{W}$$

或 $$P=(5^2+10^2+5^2)\times5=\left(\sqrt{150}\right)^2\times5=750\mathrm{W}$$

式中的 $I=\sqrt{150}$ 是周期性非正弦电流的有效值。

12－6 已知一*RLC*串联电路的端口电压和电流为：

$$u(t)=\left[100\cos(314t)+50\cos(942t-30^{\circ})\right]\text{V}$$

$$i(t)=\left[10\cos(314t)+1.755\cos(942t+\theta_3)\right]\ \text{A}$$

试求：（1）*R, L, C* 的值　　（2）θ_3的值

（3）电路消耗的功率

解： 由端口电压和电流的瞬时表达式可知，电压和电流含有一次谐波和三次谐波，即

$$\omega_1=314\ \text{rad/s},\ \ \omega_3=3\omega_1=942\ \text{rad/s}$$

则有

$$u=u_1+u_3,\ \ i=i_1+i_3$$

$$u(t)=\left[100\cos(314t)+50\cos(942t-30^{\circ})\right]\text{V}$$

$$i(t)=\left[10\cos(314t)+1.755\cos(942t+\theta_3)\right]\ \text{A}$$

对于基波分量，*RLC*串联电路阻抗Z_1为

$$Z_1=R+j\left(\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}\right)=\frac{\dot{U}_{1m}}{\dot{I}_{1m}}=\frac{100\angle 0^{\circ}}{10\angle 0^{\circ}}=10\,\Omega$$

$$\therefore R=10\Omega,\ \ \omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}=0$$

对于三次谐波分量，*RLC*串联电路阻抗Z_3为

$$Z_3=R+j\left(3\omega_1 L-\frac{1}{3\omega_1 C}\right)=\frac{\dot{U}_{3m}}{\dot{I}_{3m}}=\frac{50\angle(-30^{\circ})}{1.755\angle\theta_3}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{R}=10\Omega,\ \omega_1\boldsymbol{L}-\frac{1}{\omega_1\boldsymbol{C}}=0 \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{j}\left(3\omega_1\boldsymbol{L}-\frac{1}{3\omega_1\boldsymbol{C}}\right)=28.49\angle\left(-30^\circ-\theta_3\right)\Omega$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{R}^2+\left(3\omega_1\boldsymbol{L}-\frac{1}{3\omega_1\boldsymbol{C}}\right)^2=28.49^2 \qquad (2)$$

将式（1）代入式（2），可以得到

$$\left(3\frac{1}{\omega_1\boldsymbol{C}}-\frac{1}{3\omega_1\boldsymbol{C}}\right)^2=28.49^2-10^2$$

$$\left(\frac{8}{3\omega_1\boldsymbol{C}}\right)^2=28.49^2-10^2\Rightarrow\frac{1}{\omega_1\boldsymbol{C}}=10.004$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{C} = \frac{1}{314 \times 10.004} = 318.34 \ \mu\text{F}$$

$$\boldsymbol{L} = \frac{10.004}{314} = 31.86 \ \text{mH}$$

（2）计算 θ_3

$$\because \ \boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}\left(3\omega_1 \boldsymbol{L} - \frac{1}{3\omega_1 \boldsymbol{C}}\right) = 28.49\angle\left(-30^\circ - \boldsymbol{\theta}_3\right)$$

$$\therefore \quad 10 + \boldsymbol{j}\left(\frac{8}{3\omega_1 \boldsymbol{C}}\right) = 28.49\angle\left(-30^\circ - \boldsymbol{\theta}_3\right)$$

$$\boldsymbol{\theta}_3 = -30^\circ - \arctan\left(\frac{8 \times 10.004/3}{10}\right) = 69.45^\circ$$

$$u(t)=\left[100\cos(314t)+50\cos(942t-30^{\circ})\right]\text{V}$$

$$i(t)=\left[10\cos(314t)+1.755\cos(942t+\theta_3)\right]\ \text{A}$$

（3）电路消耗的功率

$$\begin{aligned}P&=U_1I_1\cos\varphi_1+U_3I_3\cos\varphi_3\\&=\frac{100}{\sqrt{2}}\times\frac{10}{\sqrt{2}}+\frac{50}{\sqrt{2}}\times\frac{1.755}{\sqrt{2}}\cos(69.45^{\circ})\\&=515.4\ \text{W}\end{aligned}$$