2002 年 4 月 西北大学学报(自然科学版) Apr. 2002
第 32 卷第 2 期 Journal of Northwest University(Natural Science Edition) Vol. 32 No. 2

计算无回路 Petri 网位置不变量的几何方法

张东红[1],蔡崇春[1],邢科义[2]

(1. 安康师范专科学校 应用数学系,陕西 安康 725000;2. 西安电子科技大学 理学院,陕西 西安 710071)

摘要:基于路增益概念,证明了无回路加权事件图位置不变量的存在性,并给出了其位置不变量集合的表达形式和最小位置不变量的计算方法。讨论了两个 Petri 网基于位置并的位置不变量,通过把无回路 Petri 网分解成一些加权事件图基于位置的并,给出了无回路 Petri 网位置不变量的存在性判别及确定的几何方法。

关 键 词:路增益;无回路加权事件图;位置不变量;无回路 Petri 网

中图分类号:TP27 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2002)02-0157-04

Petri 网是可应用到很多系统和领域的图形和数学模型工具,是信息处理系统描述和模型的有力工具之一。不变量是 Petri 网系统最基本的分析方法之一。从 S-不变量(位置不变量)出发,可以进行位置有界性系统活性等性质的分析,在系统性能评价方面也有应用,如标记时间周期的确定等。S-不变量在综合离散事件系统的控制器时也起着重要作用[1]。本文证明了无回路加权事件图位置不变量的存在,给出的无回路加权事件图所有最小支持 S-不变量以及独立最小 S-不变量的计算方法,是直观简单且易于计算的。通过把无回路 Petri 网分解成一些加权事件图基于位置的并,给出了无回路 Petri 网位置不变量的存在性判别及确定的一种几何方法。这不仅对 Petri 网理论本身有重要意义而且为基于 Petri 网的控制器研究与综合提供了基础。

1 Petri 网概念及约定

本文涉及到的 Petri 网基本概念术语及符号参见文献[2]。

设 S 是一条路,S 上所有输入弧的权函数之积和所有输出弧的权函数之积分别记为 $r(S)$ 和 $y(S)$,简称为 S 的输入积和输出积。把 S 的输出积和输入积之比 $y(S)/r(S)$ 称为路 S 的增益,记作 $G(S)$。由定义知 $r(S)$、$y(S)$ 和 $G(S)$ 都非负。

定义 1 位置不变量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 称为是相容的,如果对所有同时非零的 x_i 和 y_i 都有 $x_i/y_i=C$(C 为常数)。两个相容位置不变量 X 和 Y 的直和为与 X 和 Y 同维数的向量 $Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,记作 $Z=X\oplus Y$。其中如果 $x_i\neq 0$ 且 $y_i\neq 0$,则 $z_i=ax_i=by_i$;如果 $x_i=0$ 或 $y_i=0$,则 $z_i=ax_i+by_i$。a,b 为正整数且 $b/a=C$(常数)。

定义 2 设 Petri 网 $PN_1=(P_1,T_1,I_1,O_1)$ 和 $PN_2=(P_2,T_2,I_2,O_2)$ 在相同弧上具有相同的权函数值,它们的并是一个 Petri 网 $P_N=(P_1\cup P_2,T_1\cup T_2,I_1\cup I_2,O_1\cup O_2)$,记作 $PN_1\ominus PN_2$。在 $PN_1\oplus PN_2$ 中,如果 PN_1 和 PN_2 的公共变迁的输入和输出位置都是公共位置,称 $PN_1\oplus PN_2$ 是 PN_1 和 PN_2 基于位置的并。

定义 3 Petri 网 $P_N=(P,T,I,O)$ 有 n 个位置。$PN_1=(P_1,T_1,I_1,O_1)$ 是 P_N 的一个子网,有 m 个位置。PN_1 的位置不变量分量为 x_i,$i=1,2,\cdots,m$。称 n 维列向量 Y 是 PN_1 关于 PN 的广义位置不变量,其中 Y 的分量 $y_i=\begin{cases}x_i & p_i\in P_1,\\ 0 & p_i\in P/P_1,\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$。由定义知,当 PN_1 有位置不变量时,也有关于 PN 的广义位置不变量,而且两者一一对应。

定义 4 给定一个 Petri 网 $PN=(P,T,I,O)$,如果 PN 有位置不变量,则位置 $p\in P$ 在 Petri 网 PN 下的权值是 p 对应于 PN 的位置不变量分量;如

收稿日期:2000-05-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(69974028);陕西省教委专项科研基金资助项目(99JK.139)

作者简介:张东红(1972-),男,陕西安康人,安康师范专科学校讲师,硕士,从事自动控制研究。

果 PN 无位置不变量,则位置 $p \in P$ 在 Petri 网 PN 下的权值是零。

定义5 Petri 网 PN 是 Petri 网 PN_1 和 PN_2 基于位置的并,PN_1 和 PN_2 关于 PN 的广义位置不变量集分别为 X 和 Y。如果存在广义位置不变量 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 有 x 和 y 是相容的,则称 X 和 Y 是相容的,并记 X 和 Y 的直和 $X \oplus Y = \{x \oplus y | x \in X, y \in Y\}$。

2 无回路加权事件图的 S-不变量

每一个位置只有一个输入变迁和输出变迁,弧权值都为1的 Petri 网称为事件图,也称标识图。而仅当弧权值不一定为1时,这种 Petri 网称为加权事件图。

定理1 设 Petri 网 $PN=(P,T,I,O)$,对于任意变迁 $t \in T$ 都有 t 的所有输入弧权函数与相应的输入位置权值乘积的代数和等于 t 的所有输出弧权函数与相应的输出位置权值乘积的代数和。

证　明 当 Petri 网 PN 无位置不变量时,PN 的所有位置的权值均为零,故结论成立。当 PN 具有位置不变量时,PN 有位置不变量必要和充分条件是 $X^TD=0$ 成立,其中 X 为非负整数非零列向量,D 为 PN 的关联矩阵。$X^TD=0$ 等价于 $X^TD^+=X^TD^-$,其中 $D^-=(O(t_j,p_i))$ 的 (i,j) 元素是 $O(t_j,p_i)$,$D^+(i,j)=(I(p_i,t_j))$ 的 (i,j) 元素是 $I(p_i,t_j)$。把等式 $X^TD^+=X^TD^-$ 展开并由权值定义,即知结论成立。故定理成立。

定义在无回路的 Petri 网 PN 中,无标记流入的位置称为 PN 的起始位置,无标记流出的位置称为 PN 的终止位置。S-不变量 x 的支持 $\|x\|$ 是位置的集合,这些位置在 x 中相对应的元素为非零正整数。一个 S-不变量的支持 $\|x\|$ 是最小的,如果除了它本身和空集以外,$\|x\|$ 不再包含另一个不变量的支持。

定理2 如果 Petri 网 PN 是一个无回路的加权事件图,则 PN 一定具有位置不变量。设 PN 的起始位置到终止位置所有的路共有 n 条,记为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$。路 S_i 关于 PN 的一个广义位置不变量基为 X_i。那么:

1) $\sum_{i=1}^{n}k_iX_i$ 是 PN 的位置不变量。其中 k_i 是使 k_iX_i 的分量为整数的不全为零的非负整数。

2) $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 是 Petri 网 PN 的所有最小支持 S-不变量。

3) PN 的位置不变量集是 $\sum_{i=1}^{n}k_iX_i$。

证　明 1) $\sum_{i=1}^{n}k_iX_i$ 是非零整数向量,对于 PN 上任意一个变迁 t,$\sum_{i=1}^{n}k_iX_i$ 的分量作为 PN 中相应位置的权值,保证了 t 的所有输入弧权函数与相应的输入位置权值乘积的代数和等于 t 的所有输出弧权函数与相应的输出位置权值乘积的代数和。故 $\sum_{i=1}^{n}k_iX_i$ 是 PN 的位置不变量。

2) 反证法,由定理1,可以验证 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 是 Petri 网 PN 的 S-不变量。假设 X_i 不是 PN 的最小支持 S-不变量。则一定存在一个 S-不变量 X_i^*,$\|X_i^*\| \subset \|X_i\|$。$X_i$ 是路 S_i 关于 PN 的广义位置不变量,故 $\|X_i\|=\{p|p$ 是路 S_i 上的位置$\}$,$\|X_i^*\|$ 中的所有位置都在路 S_i 上且至少存在一个位置 $p \in \|X_i\|$,$p \notin \|X_i^*\|$,p 对应于 X_i^* 的分量为零,即路 S_i 上的位置 p 在 PN 下的权值为零,根据定理1,$\|X_i^*\|$ 中所有位置在 PN 下的权值均为零,这与 X_i^* 是 S-不变量相矛盾,故 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 都是 Petri 网 PN 的最小支持 S-不变量。设 X 是 PN 的一个最小支持 S-不变量,任取一个位置 $p \in \|X\|$,故 p 在 PN 下的权值为正整数。由 PN 的图结构和定理1,至少有一条从 PN 的某一起始位置经过位置 p 到某一终止位置的路 S_i,有 $\{p|p$ 是路 S_i 上的位置$\} \subseteq \|X\|$。路 S_i 关于 PN 的广义位置不变量 X_i 是一个 S-不变量,而 X 是最小支持 S-不变量,故 $X_i \equiv X$,因而 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 是 Petri 网 PN 的所有最小支持 S-不变量。

3) Petri 网的每一个 S-不变量都可以由最小支持 S-不变量的不全为零的非负整系数的线性组合来表达[4,7],再由2)的结论知,3)结论成立。

3 基于位置并的 Petri 网的 S-不变量

Petri 网 PN 是 Petri 网 PN_1 和 PN_2 基于位置的并。PN_1 和 PN_2 的任意一个公共位置 p 在 Petri 网 PN_1,PN_2 和 PN 下的权值分别记为 v_p^1,v_p^2 和 v_p。其相互之间关系如表1。

定理3 Petri 网 $PN=(P,T,I,O)$ 是 Petri 网 $PN_1=(P_1,T_1,I_1,O_1)$ 和 $PN_2=(P_2,T_2,I_2,O_2)$ 基于位置的并,PN_1 和 PN_2 都有位置不变量并且关

于 PN 的广义位置不变量集分别为 X 和 Y。如果 PN_1 和 PN_2 的公共位置集中每一个位置分别在 PN_1 和 PN_2 下的权值可同时为正数或可同时为零,并且 X 和 Y 是相容的,则 Petri 网 PN 有位置不变量,其位置不变量集为 $X\oplus Y$。

表1 权值 v_p^1、v_p^2 和 v_p 的相互关系

Tab. 1 The relation among weighted value v_p^1、v_p^2 and v_p

	v_p^1	v_p^2	v_p
	0	0	0
P	0	非零	0
	非零	0	0

证 明 设 PN_1 和 PN_2 的位置集分别为 $P_1=\{p_1,\cdots,p_k,p_{k+1},\cdots,p_{k+m}\}$ 和 $P_2=\{p_{k+1},\cdots,p_{k+m},p_{k+m+1},\cdots p_{k+n}\}$,$X$ 和 Y 相容,故存在 $x\in X$ 和 $y\in Y$,x 和 y 相容。设 $x=(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_{k+m},0,\cdots,0)^T$,$y=(0,\cdots,0,y_{k+1},\cdots,y_{k+m},y_{k+m+1},\cdots,y_{k+n})^T$,故 $x\oplus y=(ax_1,\cdots,ax_k,ax_{k+1},\cdots,ax_{k+m},by_{k+m+1},\cdots,by_{k+n})^T$。其中 $ax_i=by_i,i=k+1,\cdots,k+m$,$a$、$b$ 为正整数。PN 是 PN_1 和 PN_2 基于位置的并,因此对任意变迁 $t\in T_1\cup T_2$,当 $t\in T_1$ 时,t 的输入和输出位置 $p\in P_1$,t 的输入和输出弧都在 I_1 和 O_1 中。x、ax 都是 PN_1 的位置不变量,故 ax 使得变迁 t 的输入弧的权函数加权和等于其输出弧的权函数加权和。同理,当 $t\in T_2$ 时,by 使得变迁 t 的输入弧的权函数加权和等于其输出弧的权函数加权和。故对任意变迁 $t\in T_1\cup T_2$,$x\oplus y$ 使得变迁 t 的输入弧的权函数加权和等于其输出弧的权函数加权和,因此 PN 存在位置不变量,$x\oplus y$ 是 PN 的一个位置不变量。由定义6,PN 的位置不变量集为 $X\oplus Y$。

4 无回路 Petri 网 S-不变量的判定和求解方法

定义6 设 Petri 网 $PN=(P,T,I,O)$,如果对位置 $p\in P$ 有 $|{}^\cdot p|\geqslant 2$ 或 $|p^\cdot|\geqslant 2$ 则称位置 p 为 PN 的一个枢纽位置。

定义7 Petri 网 $PNi=(P_i,T_i,I_i,O_i),i=1,2$ 是 Petri 网 $PN=(P,T,I,O)$ 的两个子网,并且 $PN=PN_1\oplus PN_2$。如果 $T_1\cap T_2=\varnothing$,$I_1\cap I_2=\varnothing$,$O_1\cap O_2=\varnothing$,$P_1\cap P_2\neq\varnothing$,且至少有一个枢纽位置 $p\in P_1\cap P_2$,那么称 Petri 网 PN 是基于枢纽位置 p 的分解。由定义知,Petri 网 PN 是 PN_1 和 PN_2 基于位置的并。

定理4 无回路 Petri 网一定可以分解为一些加权事件图基于位置的并。

证 明 设无回路 Petri 网 $PN=(P,T,I,O)$,对 PN 基于枢纽位置的分解,所得两个 Petri 子网 $PN_i,i=1,2$。再对 $PN_i,i=1,2$ 基于其上的枢纽位置的分解,…,一直这样分解下去,直到所得的 Petri 子网中无枢纽位置为止。由定义8和加权事件图的定义,最终分解得到的 Petri 子网是加权事件图,PN 是这些加权事件图基于位置的并。

定理5 Petri 网 $PN=(P,T,I,O)$ 是 Petri 网 $PN_1=(P_1,T_1,I_1,O_1)$ 和 $PN_2=(P_2,T_2,I_2,O_2)$ 基于位置的并。如果 PN_1 无位置不变量,则对任意位置 $p\in P_1$,p 在 Petri 网 PN 下的权值为零。

证 明 反证法。假设存在一个位置 $p\in P_1$,p 在 Petri 网 PN 下的权值 $vp>0$。由定义5,Petri 网 PN 具有位置不变量,记为 X。P_1 中的所有位置对应于 X 的分量而成的向量记为 X',由假设知 X' 非零。PN 是 PN_1 和 PN_2 基于位置的并,因而 X' 是 PN_1 的位置不变量,这与 PN_1 无位置不变量矛盾。故定理成立。

对于无回路 Petri 网 PN 的 S-不变量存在性及确定,给出一种几何方法,其步骤如下:

步骤1 由定理4,把无回路 Petri 网 PN 分解成一些加权事件图基于位置的并。设加权事件图为 PN_1、PN_2、…,PN_n,故 $PN=PN_1\oplus PN_2\oplus\cdots\oplus PN_n$。

步骤2 $j:=1$,计算 PN_j 和 PN_{j+1} 关于 PN 的广义位置不变量集,分别记为 X_j 和 X_{j+1}。

步骤3 判别:当 $j-1<n$ 时,转步骤4。当 $j+1=n$ 时,转步骤7。

步骤4 利用本文第3节有关结论,判断 $PN_j\oplus PN_{j+1}$ 位置不变量存在性,当 $PN_j\oplus PN_{j+1}$ 位置不变量存在时,记其关于 PN 的广义位置不变量集为 X_{j+1}。令 $PN_{j+1}:=PN_j\oplus PN_{j+1}$;计算 PN_{j+2} 关于 PN 的广义位置不变量集,记为 X_{j+2}。转步骤5。当 $PN_j\oplus PN_{j+1}$ 无位置不变量,由定理5有,$PN_j\oplus PN_{j+1}$ 上所有位置在 Petri 网 PN 下的权值均为零。故 Petri 网 $PN_i(j+2\leqslant i\leqslant n)$ 与 $PN_j\oplus PN_{j+1}$ 的公共位置在 PN 下的权值也为零,由定理1确定出 $PN_i(j+2\leqslant i\leqslant n)$ 上其他权值为零的位置。转步骤6。

步骤5 $PN_j:=PN_{j+1}$,$PN_{j+1}:=PN_{j+2}$,

$X_j := X_{j+1}$，$X_{j+1} := X_{j+2}$。转步骤3。

步骤6 判别：当 $PN_i(j+2 \leqslant i \leqslant n)$ 上所有位置权值均为零时，Petri 网 PN 无位置不变量。否则，删除 $PN_i(j+2 \leqslant i \leqslant n)$ 上被确定权值为零的所有位置以及其输入输出弧和孤立的变迁，得到 $m(m \leqslant n-j-1)$ 个 Petri 子网，记为 PN_i'，$i=1,2,\cdots m$。(PN_i' 可能是不连通的 Petri 网)。令 $j:=i$；$n:=m$；$PN_j := PN_i'$，转步骤2。

步骤7 当 $PN_{n-1} \oplus PN_n$ 有位置不变量时，记 $PN_{n-1} \oplus PN_n$ 位置不变量集为 X_n，PN 有位置不变量，其位置不变量集为 X_n。当 $PN_{n-1} \oplus PN_n$ 无位置不变量时，PN 无位置不变量。

5 结束语

本文从几何的角度出发讨论了无回路 Petri 网位置不变量，给出了其位置不变量的存在性判别及确定的几何方法。在基于 S- 不变量设计离散事件系统的 Petri 网控制器时，使得构造 S- 不变量变得简单，易于得到且具有直观的几何意义，为基于 Petri 网离散事件系统控制器的研究和综合提供了基础。进一步地工作是研究一般的 Petri 网位置不变量的存在性和确定方法。

参考文献：

[1] YAMALIDOU K, MOODY J, LEMMON M, *et al*. Feedback control of Petri nets based on the place invariants[J]. Automatica, 1996, 32(1): 15-28.

[2] PETERSON J L. Petri 网理论与系统模拟[M]. 吴哲辉译. 北京：中国矿业大学出版社, 1989.

[3] BEST E, FERNANDEZ C. Notions and terminology on Petri net theory-revised version[J]. Petri Net Newsletter, 1986, 23(4): 21-46.

[4] 张东红. Petri 网位置不变量的几何意义[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2000, 27(6): 717-721.

(编 辑 曹大刚)

A geometrical approach to compute loop-free petri net place invariant

ZHANG Dong-hong[1], CAI Chong-chun[1], XING Ke-yi[2]

(1. Department of Application mathematics, Ankang Teacher's College, Ankang 725000, China; 2. College of science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Based on the concept of path gain the existance of loop-free weighted event graph place invariant is proved and the form of its place invariant and the minimum place invariant are embodied. The place invariant of Petri net which is merged by two Petri nets on places is discussed. A geometrical approach to compute place invariant and judge its existence is presented via decomposing loop-free Petri net into some weighed event graphs merged on places.

Key words: path gain; loop-free weighted event graph; place invariant; loop-free Petri net