维普资讯 http://www.cqvip.com

西北大学学报(自然科学版)
2004年2月,第34卷第1期,Feb.,2004,Vol.34,No.1
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
JNWU

集值映射向量优化的最优性和 Lagrangian 对偶

贾继红[1,2],罗学波[2]

(1.长安大学 理学院,陕西 西安 710064;2.西北工业大学 数学与信息科学系,陕西 西安 710072)

摘要:目的 研究拓扑向量空间中集值映射优化问题及 Lagrangian 型对偶问题。**方法** 将单值映射的广义次类凸概念推广到集值映射,在拓朴向量空间中建立了择一定理,通过择一定理研究集值映射优化问题的最优性必要条件,并定义了 Lagrangian 型对偶问题。**结果** 获得了集值映射优化问题的最优性必要条件和对偶定理。**结论** 其结果深化和丰富了最优化理论的内容。

关 键 词:集值映射;向量优化;广义次类凸;Lagrangian 对偶

中图分类号:O224 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274X(2004)01-0010-04

随着最优化理论研究的不断深入,及其在非线性系统、控制论、广义方程及变分问题等领域中的广泛应用,人们面临越来越多的集值函数问题。近年来,集值优化理论的研究比较丰富[1~3],而放松目标映射和约束映射的锥凸条件是向量优化理论研究的一个基本问题。文献[4]介绍了单值映射的广义次类凸,并研究了单值映射优化问题。本文将单值映射的广义次类凸概念推广到集值映射,并给出集值优化问题的最优性必要条件和对偶定理。

1 预备知识

设 Y 是拓扑向量空间,Y^* 是 Y 的拓扑对偶。设 $A \subset Y$,$\mathrm{int}A$ 和 $\mathrm{cl}A$ 分别表示 A 的内部和闭包,A 的投影锥为 $\mathrm{cone}A = \{\lambda a : \lambda \geqslant 0, a \in C\}$。设 C 是 A 的一个锥,C 的对偶锥为 $C^* = \{y^* \in Y^* : \langle y, y^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in C\}$。如果 $C \cap (-C) = \{0\}$,则称锥 $C \subset Y$ 是点锥。

设 X 是线性空间,$F: X \to 2^Y$ 是集值映射。对 $x \in X, y \in Y^*$,记 $F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$;$\langle F(x), y^* \rangle = \{\langle y, y^* \rangle : y \in F(x)\}$。$\langle F(x), y^* \rangle \geqslant 0$ 当且仅当 $\langle y, y^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in F(x)$。

定义1 称 F 在 X 上是广义 C-次类凸的,如果存在 $\theta \in \mathrm{int}C$ 使得对 $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha \in (0,1), \forall \varepsilon > 0$,存在 $x_3 \in X, \eta > 0$,使

$$\varepsilon\theta + \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) \subset \eta F(x_3) + C。\quad (1)$$

注 如果 $\eta = 1$ 且式(1)成立,则称 F 在 X 上是 C-次类凸的[3];如果 $\varepsilon = 0, \eta = 1$ 且式(1)成立,则称 F 在 X 上是 C-类凸的[1]。

引理1 $F: X \to 2^Y$ 在 X 上是广义 C-次类凸的当且仅当 $\mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$ 是凸的。

证 明 必要性 设 $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C, \alpha \in (0,1)$,则存在 $\lambda_i \geqslant 0, x_i \in X, y_i \in F(x_i), c_i \in \mathrm{int}C$ 使得

$$\nu_i = \lambda_i y_i + c_i (i = 1,2),$$

$$\bar{\nu} = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2 = \alpha\lambda_1 y_1 + (1-\alpha)\lambda_2 y_2 + \alpha c_1 + (1-\alpha)c_2。$$

置 $\bar{c} = \alpha c_1 + (1-\alpha)c_2$。因为 $\mathrm{int}C$ 是凸锥,$\bar{c} \in \mathrm{int}C$,所以存在 Y 的零元的一个邻域 U,使

$$\bar{c} + U \subset \mathrm{int}C。\quad (2)$$

若 $\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_2 = 0$,显然,$\bar{\nu} \in \mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$。不失一般性,设 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,置 $\lambda = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \beta = \alpha\lambda_1/\lambda$,则 $\beta \in (0,1)$,且 $\bar{\nu} = \lambda[\beta y_1 + (1-\beta)y_2] + \bar{c}$。

由于 F 是广义 C-次类凸的,所以存在 $\theta \in \mathrm{int}C$,对以上的 $\beta \in (0,1), x_1, x_2 \in X$ 和任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $x_3 \in X, \eta > 0$ 使得

$$\varepsilon\theta + \beta F(x_1) + (1-\beta)F(x_2) \subset \eta F(x_3) + C,$$

从而 $\beta y_1 + (1-\beta)y_2 \in \beta F(x_1) + (1-\beta)F(x_2) \subset \eta F(x_3) + C - \varepsilon\theta$,

收稿日期:2002-05-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19971069)

作者简介:贾继红(1965-),女,山西太原人,长安大学博士生,副教授,从事最优化和最优控制理论及应用研究。

维普资讯 http://www.cqvip.com

$\bar{\nu} \in \lambda\eta F(x_3) + \bar{c} + C - \lambda\varepsilon\theta$。

根据式(2),对θ我们能找到充分小的$\varepsilon > 0$,使得$\bar{c} - \lambda\varepsilon\theta \in \mathrm{int}C$。因而$\bar{\nu} \in \lambda\eta F(x_3) + C + \mathrm{int}C \subset \mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$,故$\mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$是凸的。

充分性　设$\theta \in \mathrm{int}C, x_1, x_2 \in X, \alpha \in (0,1)$,$\varepsilon > 0$,设$y_i \in F(x_i), i = 1,2$,则

$$y_i = \varepsilon\theta \in F(x_i) + \mathrm{int}C \subset \mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C,\quad i = 1,2。$$

因为$\mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$是凸的,所以有

$$\bar{y} = \varepsilon\theta + \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = \alpha(y_1 + \varepsilon\theta) + (1-\alpha)(y_2 + \varepsilon\theta) \subset \mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C。$$

这意味着存在$x_3 \in X$和$\lambda \geqslant 0$,使得$\bar{y} \in \lambda F(x_3) + \mathrm{int}C$。因此,$\varepsilon\theta + \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) \subset \lambda F(x_3) + \mathrm{int}C$。

如果$\lambda \neq 0$,则取$\eta = \lambda$,得证。如果$\lambda = 0$,则$\bar{y} \in \mathrm{int}C$。因此,存在$Y$的零元的一个邻域$U$,使得$\bar{y} + U \subset \mathrm{int}C$。由于$U$的吸收性,对任意固定的$x_3 \in X, y \in F(x_3)$,能选择充分小的$\eta > 0$,使得$-\eta y_3 \in U$。因此,$\bar{y} - \eta y_3 \in \bar{y} + U \subset \mathrm{int}C$,即

$$\bar{y} \subset \mathrm{int}C + \eta y_3 \subset \mathrm{int}C + \eta F(x_3)。$$

因而,$\varepsilon\theta + \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) \subset \eta F(x_3) + \mathrm{int}C$。故$F$在$X$上是广义$C$-次类凸的。

2　择一定理

定理1　设$C \subset Y$是点闭凸锥,$\mathrm{int}C \neq \varnothing$。如果$F$在$X$上是广义$C$-次类凸的,则下面的1)和2)有一个成立,但不能同时成立。

1) 存在$x \in X$,使得$F(x) \cap (-\mathrm{int}C) \neq \varnothing$;

2) 存在$y^* \in C^* \setminus \{0\}$,使得$\langle F(x), y^* \rangle \geqslant 0$,$\forall x \in X$。

证　明　显然,1)和2)不能同时成立。否则,矛盾,即$0 \leqslant \langle y, y^* \rangle < 0, y \in F(x)$。

假设1)不成立,则$0 \notin \mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$。事实上,如果$0 \in \mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$,则存在$x \in X, y \in F(x), \lambda \geqslant 0$,使得$0 \in \lambda y + \mathrm{int}C$和$\lambda > 0$(因为$0 \notin \mathrm{int}C$)。从而$-y \in \mathrm{int}C/\lambda \subset \mathrm{int}C, y \in -\mathrm{int}C$。因而,存在$x \in X$使得$F(x) \cap (-\mathrm{int}C) \neq \varnothing$。矛盾。由引理1,$\mathrm{cone}F(X) + \mathrm{int}C$是凸的,根据凸集分离定理,存在$y^* \in Y^* \setminus \{0\}$使得

$$\langle \lambda y + \varepsilon c, y^* \rangle \geqslant 0, \forall \lambda \geqslant 0,\quad y \in F(X), c \in \mathrm{int}C, \varepsilon > 0。\tag{3}$$

在式(3)中令$\varepsilon \to +\infty$,得$\langle c, y^* \rangle \geqslant 0, \forall c \in \mathrm{int}C$。

因而$\langle c, y^* \rangle \geqslant 0, \forall c \in C = \mathrm{cl}C = \mathrm{clint}C$。故$y^* \in C^* \setminus \{0\}$。

在式(3)中令$\lambda = 1, \varepsilon \to 0$,得$\langle y, y^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in F(X)$。因而2)成立。

3　最优性必要条件

考虑优化问题

(P) $\min F(x)$

s.t. $G(x) \cap (-D) \neq \varnothing$。

其中$F: X \to 2^Y, G: X \to 2^Z$。$X$任意给定的非空抽象集,$Y$和$Z$是实拓扑向量空间,$C \subset Y$和$D \subset Z$是点闭凸锥,$\mathrm{int}C \neq \varnothing, \mathrm{int}D \neq \varnothing$。(P)的可行域记为$A = \{x \in X: G(x) \cap (-D) \neq \varnothing\}$。

定义2　$\bar{x} \in A$称为(P)的弱有效解,如果存在$\bar{y} \in F(\bar{x})$,使得对每个$x \in A$无$y \in F(x)$,使得$\bar{y} - y \in \mathrm{int}C$。

推　论[3]　$\bar{x} \in A$是(P)的弱有效解当且仅当存在$\bar{y} \in F(\bar{x})$,使得$(F(A) - \bar{y}) \cap (-\mathrm{int}C) = \varnothing$。

Z到Y的连续线性算子空间记为$B(Z,Y)$,记$B_+(Z,Y) = \{H \in B(Z,Y): H(D) \subset C\}$。$X$到$Y \times Z$的集值映射记为$(F,G)$,定义为$(F,G)(x) = F(x) \times G(x)$。(P)的Lagrangian映射$L: X \times B_+(Z,Y) \to 2^Y$定义为$L(x,H) = F(x) + H[G(x)]$。

不难获得下列结果:

引理2　如果(F,G)在X上是广义$C \times D$-次类凸的,则①对每个$y^* \in C^* \setminus \{0\}$,$(\langle F, y^* \rangle, G)$在$X$上是广义$R_+ \times D$-次类凸的;②对每个$H \in B_+(Z,Y)$,$F + HG$在$X$上是广义$C$-次类凸的。

定理2　设$\bar{x} \in A$是(P)的弱有效解,(F,G)在X上是广义$C \times D$-次类凸的。则存在$\bar{y} \in F(\bar{x}), \bar{z} \in G(\bar{x})$,$(y^*, z^*) \in C^* \times D^* \setminus \{0,0\}$,使得

$$\langle z, z^* \rangle = 0,$$

$$\langle F(x), y^* \rangle + \langle G(x), z^* \rangle \geqslant \langle \bar{y}, y^* \rangle, \forall x \in X。$$

证　明　由推论,存在$\bar{y} \in F(\bar{x})$,使得

$$(F(A) - \bar{y}) \cap (-\mathrm{int}C) = \varnothing。\tag{4}$$

下证

$$(F(x) - \bar{y}, G(x)) \cap (-\mathrm{int}(C \times D)) = \varnothing,\quad \forall x \in X。\tag{5}$$

假设相反,则存在$x_0 \in X$,使得$(F(x_0) - \bar{y}, G(x_0)) \cap (-\mathrm{int}(C \times D)) \neq \varnothing$。从而$G(x_0) \cap (-\mathrm{int}D) \neq \varnothing$和$(F(x_0) - \bar{y}) \cap (-\mathrm{int}C) \neq \varnothing$,这与式(4)矛盾。因此式(5)成立。

根据引理2和定理1,存在

$$(y^*, z^*) \in C^* \times D^* \setminus \{0,0\}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

使得

$$\langle F(x)-\bar{y},y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle\geqslant 0,\forall x\in X,$$

因而

$$\langle F(x),y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle\geqslant\langle\bar{y},y^*\rangle,\quad\forall x\in X。\tag{6}$$

由于$\bar{x}\in A$,则存在$\bar{z}\in G(\bar{x})\cap(-D)$。但$z^*\in D^*$,所以$\langle\bar{z},z^*\rangle\leqslant 0$。

另一方面,在式(6)中取$x=\bar{x}$,得$\langle\bar{z},z^*\rangle\geqslant 0$。因而$\langle\bar{z},z^*\rangle=0$。

4 Lagrangian 对偶

现在介绍(P)的 Lagrange 对偶问题。集值映射$\Phi:B_+(Z,Y)\to 2^Y$定义为$\Phi(H)=\min\bigcup_{x\in X}(F+H[G])(x)$。考虑(P)的 Lagrange 对偶问题(D)

(D) $\max\Phi(H)$,

s.t. $H\in B_+(Z,Y)$。

$H\in B_+(Z,Y)$称为(D)的可行点,如果$\Phi(H)\neq\varnothing$。

定义3 (D)的可行点$\bar{H}$称为(D)的弱有效解,如果存在$\bar{y}\in\Phi(\bar{H})$使得对(D)的每个可行点H,有$(\bar{y}-\Phi(H))\cap(-\mathrm{int}C)=\varnothing$。

定理3 假设$\bar{x}$是(P)的可行解且$\bar{H}$是(D)的可行点,则$[\Phi(\bar{H})-F(\bar{x})]\cap\mathrm{int}C=\varnothing$。

证 明 假设相反,则存在$\bar{y}\in F(\bar{x})$,$\bar{\nu}\in\Phi(\bar{H})$使得

$$\bar{\nu}-\bar{y}\in\mathrm{int}C。\tag{7}$$

因为$\bar{\nu}\in\Phi(\bar{H})=\min\bigcup_{x\in X}(F+\bar{H}[G])(x)$,因此,对任何$\bar{x}_1\in X$(取$y_1\in F(x_1)$,$z_1\in G(x_1)$),得到$\bar{\nu}-(y_1+\bar{H}(z_1))\notin\mathrm{int}C$。即

$$(\bar{\nu}-F(x_1)-\bar{H}[G(x_1)])\cap\mathrm{int}C=\varnothing。\tag{8}$$

但是,由于$\bar{x}\in X$,特别地,对$\bar{y}\in F(\bar{x})$,$\bar{z}\in G(\bar{x})\cap(-D)$,由式(8)可得

$$(\bar{\nu}-\bar{y}-\bar{H}(\bar{z}))\cap\mathrm{int}C=\varnothing。\tag{9}$$

而$\bar{z}\in -D$,故

$$\bar{H}(-\bar{z})=-\bar{H}(\bar{z})\in C。\tag{10}$$

由式(7)和式(10)得$\bar{\nu}-\bar{y}-\bar{H}(\bar{z})\in\mathrm{int}C+C\subset\mathrm{int}C$,这与式(9)矛盾。

定理4 设①(F,G)在X上是广义$C\times D$-次类凸的;②存在$x'\in X$,使得$G(x')\cap(-\mathrm{int}D)\neq\varnothing$。如果$\bar{x}$是(P)的弱有效解,则存在$\bar{H}\in B_+(Z,Y)$,使得$\bar{H}$是(D)的弱有效解。

证 明 根据定理2,存在$\bar{y}\in F(\bar{x})$,$\bar{z}\in G(\bar{x})$,$(y^*,z^*)\in C^*\times D^*\setminus\{0,0\}$使得

$$\langle F(x)-\bar{y},y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle\geqslant 0,\quad\forall x\in X,\tag{11}$$

$$\langle\bar{z},z^*\rangle=0。\tag{12}$$

首先证明$y^*\neq 0$。假设$y^*=0$,由式(11)得$\langle G(x),z^*\rangle\geqslant 0,\forall x\in X$。但由假设知,存在$z'\in G(x')\cap(-\mathrm{int}D)\Rightarrow\langle z',z^*\rangle<0$,矛盾。因而$y^*\neq 0$。

选择$e\in\mathrm{int}C$使得$\langle e,y^*\rangle=1$。定义$\bar{H}:Z\to Y$为$\bar{H}(z)=\langle z,z^*\rangle e,\forall z\in Z$。则$\bar{H}(\bar{z})=\langle\bar{z},z^*\rangle e=0$(用式(12)),$\bar{H}(D)\subset C$及

$$\langle\bar{H}(z),y^*\rangle=\langle\langle z,z^*\rangle e,y^*\rangle=\langle z,z^*\rangle,\quad\forall z\in Z。\tag{13}$$

下证$\bar{y}\in\Phi(\bar{H})$。事实上,若$\bar{y}\notin\Phi(\bar{H})$,则存在$x_0\in X$且$y_0\in F(x_0)$,$z_0\in G(x_0)$,使得$\bar{y}-(y_0+\bar{H}[z_0])\in\mathrm{int}C$。因此,$\langle\bar{y}-(y_0+\bar{H}[z_0]),y^*\rangle>0$,即$\langle y_0-\bar{y},y^*\rangle+\langle\bar{H}(z_0),y^*\rangle<0$。由式(13)可得$\langle y_0-\bar{y},y^*\rangle+\langle z_0,z^*\rangle<0$,这与式(11)矛盾。故$\bar{y}\in\Phi(\bar{H})$,$\bar{y}$是(D)的可行点。根据定理3,对(D)的每个可行点H得$[F(\bar{x})-\Phi(H)]\cap(-\mathrm{int}C)=\varnothing$。由于$\bar{y}\in F(\bar{x})$,所以$[\bar{y}-\Phi(H)]\cap(-\mathrm{int}C)=\varnothing$。故$\bar{H}$是(D)的弱有效解。

参考文献:

[1] LI Z F. Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Appllications,1998,98(3):623-649.

[2] BHATIA D,MEHAR A. Lagrangian duality for preinvex set-valued function[J]. Journal Mathematical Analysis and Applications, 1997,214(2):599-612.

[3] LI Z. A theorem of the alternative and its application to the optimization of set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Appllications, 1999,100(2):365-375.

[4] CHEN G Y,RONG W D. Charaterizations of the Benson proper efficiency for nonconvex vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Appllications,1998,98(2):365-384.

[5] CORLEY H W. Optimality conditions for maximizations of set-valued functions[J]. Journal of Optimization Theory and Appllications,1988,58(1):1-10.

(编 辑 亢小玉)

(下转第55页)

维普资讯 http://www.cqvip.com

[5] 庄国顺,陈 松,艾宏稻.固液界面吸附活化能的测定及其原理[J].化学学报,1984,42(10):1 085-1 089.

(编 辑 陈镱文)

A kinetic study on the Zn(Ⅱ)-chitosan coordination

CAI Jian, LANG Hui-yun, WANG Zhen-jun, JIA Ying-qi

(Department of Chemistry, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Aim The study of the adsorption kinetics showed that the rate of adsorption effect of zinc ion on chitosan can be interpreted in terms of first order reaction. **Methods** The absorption effect of znic ions on chitosan was investigated by adsorption method. **Results** The composition and structure of chitosan-Zn(Ⅱ) complex were investigated by element analysis, UV-visible and infrared spectrometry. The results show that the ratio of Zn(Ⅱ) with chitosan was 3: 1, and the possible composition of the complex was $[Zn(CTS)_3] \cdot SO_4 \cdot 6H_2O$. **Conclusion** The expertimental data of adsorption equilibrum from zinc ion solutions were satisfied with the Langmuir and Fruendlich isotherm equation.

Key words: chtiosan; Zn; adsorptive kinetics; complex

(上接第9页)

参考文献:

[1] APSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[2] ESTERMANN T. On Kloosterman's sum[J]. Mathematica, 1961, 8(1): 83-86.

[3] CHOWLA S. On Kloosterman's sum[J]. Norkse Vid Selbsk Fak Frondheim, 1967, 40(1): 70-72.

[4] MALYSHEV A V. A generalization of Kloosterman sums and their estimates[J]. Vestnik Leningrad Univ, 1960, 15(2): 59-75.

[5] IWANIEC H. Topics in classical automorphic forms[J]. Graduate Studies in Mathematics, 1997, 17(2): 61-63.

(编 辑 亢小玉)

On the fourth power mean of the quadratic Kloosterman sums

LIU Hong-yan[1,2], WANG Xiao-ying[1]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Department of Mathematics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: Aim To study the fourth power mean of the quadratic kloosterman sums. **Methods** It is used to the properties of quadratic residue, quadratic nonresidue and trigonometric sum are used. **Results** It gives the calculating formula of fourth power mean of the quadratic kloosterman sums.

Key words: quadratic Kloosterman sums; power mean; calculating formula

(上接第12页)

Optimality and Lagrangian duality for vector optimization of set-valued maps

JIA Ji-hong[1,2], LUO Xue-bo[2]

(1. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China; 2. Department of Mathematics and Information Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aim In topological vector spaces, the optimization of set - valued maps and Lagrangian type dual problems are studied. **Methods** The concept of genralized subconvexlikeness of single-valued maps is extended to set-valued maps. An alternative theorem is established in topological vector spaces. Then, an optimality necessary conditon for the optimization of set-valued maps is studied using this alternative theorem. A Lagrangian type dual is defined. **Results** An optimality necessary condition for the optimization of set-valued maps and duality results are established. **Conclusion** These results deepen and enrich content of optimization theory.

Key words: set-valued maps; vector optimization; generalized subconvexlikeness; Lagrangian duality