2003年4月
第33卷第2期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Apr. 2003
Vol. 33 No. 2

极小极大值理论的历史发展

尚宇红

(西北大学 数学与科学史研究中心,陕西 西安 710069)

摘要:就博弈论早期史这一问题,采用考证原著的方法,针对极小极大值理论早期发展的历史进行了研究。认为:历史上第一个极小极大值解是法国数学家瓦德哥锐于1713年得到的,但在此后的两个世纪中,这一结果一直没有引起人们的注意。直到20世纪20年代,波莱尔在研究二人零和博弈时才重新得出了极小极大值解的概念,而极小极大值定理的正式提出和证明则是由冯·诺伊曼于1928年完成的。此后,这一定理的证明又进一步得到了简化和完善。

关 键 词:极小极大值理论;博弈论;历史

中图分类号:O112 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)02-0245-04

随着博弈论的发展尤其是近20年的发展,它已经成为西方经济学的主流。在我国,博弈论也越来越受到人们的关注。但是,在博弈论的早期发展中起关键作用的概念:"极小极大值理论"的历史却鲜为人知,美国数学家奥曼(Robert J Aumann)认为极小极大值解是发展博弈理论的"关键基石",这是因为博弈论中最基本的概念——扩展形式、纯策略、策略形式、随机化、效用函数等都是因极小极大值理论的研究而被引伸出来的,现代博弈理论中的最基本概念"古诺-纳什均衡"也是极小极大值理论的派生物[1]。因此,对极小极大值的历史发展的研究和对博弈论早期史的研究是很有意义的。

极小极大值理论的核心思想是:在某一博弈中如果一个局中人根据极小极大值理论的标准来选择他可以采取的策略,那么就是说对他的每一种策略,他首先考虑他采取该策略后能收到的最低支付,然后他在所有最低支付中选择能得到最大支付值的那个策略。极小极大值理论表明二人零和有限纯策略(或连续纯策略和连续纯凸支付函数)的博弈是确定的(即有解)。

1 第一个极小极大值解的发现

历史上,第一个极小极大值解是由法国数学家瓦德哥锐(Jame Waldegrave,1684—1741)在1713年研究一个二人纸牌博弈(Le Her)时提出的。这个结果记录在法国数学家蒙特姆(de Montmort)写给数学家尼古拉斯·伯努利(Nicolas Bernoulli,1695—1726)的一封信中[2]。

在Le Her博弈中,保罗拿了一副普通的纸牌,从中任意抽出一张后发给彼得,然后再随机给自己抽出一张,博弈的目的是看谁手中的牌值大,牌值的大小顺序为A,2,3…11,12,13。现在,如果彼得对手中的牌不满意,他可以要求和保罗交换牌,但如果这时保罗的牌是"13"则不能进行交换;如果保罗对自己手中第一次拿到的牌不满意或对被迫和彼得交换的牌不满意,则他可以再随机地抽取一张牌来换掉他手中的牌。但是,如果抽到的是"13"则不可以交换,必须保留原来的那张牌;如果保罗、彼得最终的牌值一样大,则算彼得输。

保罗的策略是如果手中的牌值比8大则保留,如果比8小则换牌,而彼得的策略是如果手中的牌比7大则保留,如果比7小则换掉。经计算可知:如果保罗总是换掉8而彼得也总是换掉7,或保罗总是保留8而彼得也总是保留7,那么保罗将取胜;反之,如果保罗总是换掉8,而彼得总是保留7,或保罗总是保留8,而彼得总是换掉7,那么彼得将取胜。因此,保罗希望二人总是采取相同的策略,而彼得则希

收稿日期:2002-04-08
基金项目:国家自然科学基金天元基金资助项目(2000)
作者简介:尚宇红(1970-),男,山西晋城人,西北大学博士生,讲师,从事数学史研究。

望二人采取相反的策略。

瓦德哥锐考虑的是:是否能有一种策略可以使得局中人在无论对手采取何种策略时,他都能获得最大的赢得概率。在允许采用混合策略获胜的模型中,瓦德哥锐得出:保罗和彼得均有一种策略,采用这个策略可以使得无论对方如何行动,他都能保证一定的最低收入,而另一局中人采用他的"好"策略则可以防止对手获得更大利益。对于这个具体的例子来讲,就是保罗应以 5/8 的概率保留 8,而以 3/8 的概率换掉 8,而彼得应以 3/8 的概率保留 7,而以 5/8 的概率换掉 7。

这实际上就是以上博弈例子的一个极小极大值解,只不过作者当时并未用到极小极大值这个术语。但是,极小极大这个思想可以从中看出来,遗憾的是瓦德哥锐认为混合策略不满足一般博弈的规则,因而未把这一结果推广到其他博弈之中。1721 年,他离开法国到英国从事外交工作之后,便不再做数学研究了。

虽然,蒙特姆出版了他与尼古拉斯·伯努利的通信,其中包括他关于 Le Her 的信,并以此作为其一本书第 2 版的一个附录。由于这个附录是进行"圣彼得堡悖论(St Petersbury Paradox)"讨论的起点,故变得很有名,但瓦德哥锐关于 Le Her 的极小极大值仍然被大大地忽视了。

此后,在 1865 年,法国数学家吐德哈特(Isaac Todhunter)在他简明的《概率的数学理论史》中曾提到过这个解[3],并作了一些说明,但这在当时并未引起概率论专家的注意。极小极大的解和思想,一直到 1921 年才又一次被著名的法国数学家波莱尔(Emile Borel,1871—1956)发现。

2 极小极大值解的再次发现

从 1921 年到 1927 年,波莱尔发表了 4 篇关于策略博弈的注记和其中一篇的堪误表[4],对现在称为"二人零和博弈"的情况给出了一个比较合理和系统的处理,正是在这些文献中记录了波莱尔对极小极大值解的重新发现。波莱尔的工作正如他 1924 年的注记所说的:他对策略博弈的研究开始于法国数学家贝特朗(Joseph Bertrand)在 1899 年分析的一种纸牌(Baccarat)赌博博弈,可以认为他并不知道瓦德哥锐的 Le Her 解。

波莱尔 1921 年的文章定义了一些概念,并为以后的几个注记建立了框架结构,只是以后的记法常常改变。波莱尔认为博弈的"获胜是通过机会和选手技巧来得到的",而不像投骰子一类的纯机会博弈,技巧对结果没有什么影响。定义一个策略为:"一种决定在每种可能情况下人们应该怎样做的方法"。波莱尔认为博弈的数学分析的目的是:"是否可能找到一种策略比其他的策略都好"。

他首先考虑的博弈是一个对称的二人策略博弈,其中局中人的纯策略的数目假设是有限的。他因此推断如果两个局中人都采用相同的策略,他们获胜的概率是相等的。

在 1921 年的论文中,他对于在剔除劣策略后剩下 3 个纯策略的情况下给出的混合策略的解恰好是一个极小极大值解。然而,他却错误地臆断:在当 n(指局中人可选策略的数目)大于 7 时的情况下,只要一个选手采用一种混合策略,而且他的策略选择是可以观测得到的,那么"另一个选手就能变换他的策略选择方式,从而占有优势"。波莱尔在此对他的这个不正确的臆测除了说显而易见外,并未多加任何解释和证明。

波莱尔还补充说:"很容易把前面的方法推广到可选策略是无限连续统的博弈中",但却没有解释当 n 大于 7 时推广都是不可能的情况下,如何容易地把 $n=3$ 的情况推广到具有无限多纯策略的情况。

波莱尔在《论包含机会和局中人技巧的博弈》一文中指出:考虑到概率的计算起源于对最简单的机会博弈的研究,建议包含局中人技巧(策略选择的方法)和机会的博弈研究应开始于最简单的例子。波莱尔除讨论了贝特朗对 baccarat(一种纸牌博弈)的分析外,还讨论了 $n=3$ 和 $n=5$ 的情况,以及一个非对称的二人博弈的例子。虽然,在这篇文章中他没有说当 n 大于 7 时就无解了,但像他前面的那篇文章一样在没有任何推理的情况下,他坚持臆测在大数目纯策略的博弈中没有极小极大值解。由于这个申明并不是来自于他论文的分析结果,因而这就导致了他不正确的推断:"如果一个选手面对的另一个选手是心智狡黠且善于算计,而他又不去观测他的对手的心理并修改他的行事方式的话,那么他必然要遭到损失"。然而,他对 $n=3$ 或 5 时的对称博弈分析却正好与此相反,说明在这些博弈中,不管对手如何行事,第一个选手都有一个混合策略使得他赢得期望 $G=0$,同样不管第一个选手如何行事。他的对手也总有一个混合对策能防止他赢得期望 G 大于零,当然这个混合策略就是这个博弈的极小极大值解。

波莱尔 1927 年的论文非常简明,他重新定义了

对称博弈和策略的概念。他以前(1921年)定义的最优策略是"能给使用这一策略的局中人超出不用此策略的对手以更大的优势"。他现在认为博弈的中心问题是:"是否局中人 B 能选择一个策略,使得对手 A 虽然知道这个策略,却无法找到一个使 G 大于零的策略"。波莱尔在1921年的论文中寻找的是是否能给出"优势"策略,碰巧和他选择研究的那个博弈中的极小极大值相一致,而现在1927年的论文中他寻找的正是极小极大值策略而不是寻找"优势"策略了。最后,他通过简要说明波莱尔的总结,认为有7个纯策略的博弈也有这样一个解,而且这样的解可能更一般地存在。

极小极大值理论的部分表达式为: $\min_y \max_x G = \max_x \min_y G$。

虽然,在波莱尔研究的那些例子中,用他最优的定义能得出这个等式,但我们并不知道他是否把这个等式作为均衡的必要条件。正如冯·诺依曼1953年所说的[5],波莱尔一定没有证明极小极大值理论,他可能甚至都未曾论述这个理论。波莱尔主要研究的是二人对称零和博弈,在这种博弈中,波莱尔的均衡使得 B 有能力防止 A 的赢得 $G>0$,而 A 亦有能力防止 B 使得 $G<0$。这就自动暗含了双方的均衡策略,使得他们的期望赢得为零,即均衡是: $G=0$。不过,在1924年的论文中,他也正确地给一个非对称博弈找到了一个极小极大值策略。

另一个相关人物是波兰数学家斯廷豪斯(Hugo Steinhauws,1887—1972),他在《博弈论与追踪的定义》一文中讨论了以策略(他称为行事方式)为独立变量的支付函数,并把最好的行事方式(策略)定义为最大化了的最小期望支付(这和极小极大值是等价的),这里也包括了连续的策略选择情况。他没有区分策略和混合策略,而在这一点上波莱尔作了区分。后来,斯廷豪斯于1959年的一封同意发表的英文信中回忆说:"在我已经发现了极小极大值和极大极小值的概念后,我清楚地意识到极小极大的追踪时间长于或等于极大极小的追踪时间,但是我不知道在类似的博弈中这些规律是否也是如此"[6]。遗憾的是斯廷豪斯的工作是非常孤立的,没有引起其他人的注意。

3　极小极大值定理的证明

第一个有限纯策略的二人机会与技巧博弈的极小极大值定理是由冯·诺依曼(John von Neumann,1903—1957)于1928年发表的《关于伙伴游戏理论》给出的[7],结果表明所有的双人零和博弈都有一个极小极大值解,而这个证明已经出现在他于1926年12月7日提交给哥廷根数学会的一篇论文中。冯·诺依曼在1928年的这个证明是复杂的,其中既有初等的概率,也有拓扑学的概念,而且不易为读者所读懂。但是,这个证明是有效的。在一个脚注中,冯·诺依曼注明:"当这篇文章快最后完成时,我得知了波莱尔的工作,波莱尔明确用公式表示了一个对称的二人博弈的双线性形式问题,并且说找不到 maxmin<minmax 的例子。我们以上的结果则回答了他的疑问"。而且,冯·诺依曼把他的结果寄给了波莱尔,波莱尔又于1928年6月把它交给了法国科学院。

第一个初等的(非拓扑)的极小极大值原理的证明,是波莱尔的学生威莱(Jean Ville)于1938年给出的,收录在波莱尔丛书中[8]。这个证明用到了凸性的论证和支撑超平面的概念。同年,威莱对连续纯战略的情况做出了第一个极小极大值原理的证明。冯·诺依曼和摩根斯坦在1944年出版的书中对极小极大值的证明正是以威莱1938年的证明作为基础的,而不是以冯·诺伊曼1928年的证明作为基础。

1944年,冯·诺依曼和奥地利经济学家奥·摩根斯坦合作的《博弈论与经济行为》一书的出版,标志着博弈论的创立。此后以美国数学家卢密斯(Loomis)的完全代数方法的极小极大值定理的证明为开端,在数学界发起了一场进一步证明极小极大值定理的运动。其中,以赫尔曼·外尔(Hermann Weyl)1950年给出的一个更简明的极小极大值定理的初等证明为高潮,这个证明依据了他早期关于凸多面体的工作。所有的这些证明大致可以分为两个类别:一个类别是以不动点理论或迭代程序为基础,另一类别是以凸集理论为基础。

综上所述,尽管瓦德哥锐的贡献是孤立的,被人们忽视了,但最先发现极小极大值混合策略解的荣誉应归功于他。属于波莱尔的荣誉应有:第一个用现代公式表示混合策略,首次给出了找到具有3个或5个纯策略的博弈的极小极大值解的一般方法。冯·诺依曼则应得到第一个证明极小极大值定理的荣誉。然而,第一个用初等方法证明极小极大值定理的荣誉应属于威莱,而且他还把这一原理推广到了具有无限多的连续策略的博弈例子中。

参考文献:

[1] AUMANN R J. Game theory[A]. Eatwell J Milgate M, Newman P. Game Theory[C]. New York: W W Norton, 1989. 1-53.

[2] BAUMOL W J, GOLDFELD S. Precursors in mathematical economics: an anthology , reprints of scarce works in political economy[J]. London School of Economics, 1968, 19(1): 6-7.

[3] TODHUNTER I. A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Passcal to that of Laplace[M]. New York: Chelsea Publishing, 1865. 105-108.

[4] BOREL E. The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels[J]. Econometrica, 1953, 21: 91-117.

[5] von NEUMANN J. Communication on the Borel notes[J]. Econometrica, 1953, 21: 124-125.

[6] STEINHAUWS H. Definition for a theory of Games and Pausuit[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1960, 7(1): 105-108.

[7] 李旭辉. 冯·诺伊曼[A]. 吴文俊. 世界著名数学家传记[C]. 北京:科学出版社, 1995. 1 589.

[8] VILLE J. Sur le theorie generale des jeux ou intervient l'habilite des joueurs[A]. Borel E. Applications des Jeux de Basard[C]. Paris: Garthier-Villars, 1938. 105-113.

(编 辑 姚 远)

A tentative discussion on the evolution of the minmax theorem

SHANG Yu-hong

(Research Centre of Mathematics and Science History, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: A study on literatures of early games theory indicated that the first minimax solution in history was found by Jame Waldegrave in 1713. But Waldegrave's solution has almost been neglected for two centuries. It was E. Borle who found the minimax solution again in 1920s. And von Neumann gave the first proof of the minimax theorem for two-person strategy games in 1928. The proof of the minimax has been improved and perfected from then.

Key words: the minimax theorem; game theory; history

(上接第230页)

[4] 王玛丽, 任 毅, 张满祥, 等. 秦岭藓类植物新记录属种[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2002, 32(1): 74-76.

[5] 陈邦杰. 中国藓类植物志(上册)[Z]. 北京: 科学出版社, 1963. 129; 155.

[6] 中国科学院青藏高原科学考察队. 西藏苔藓植物志[Z]. 北京: 科学出版社, 1985. 32; 58.

(编 辑 徐象平)

New records of musci from Qinling Mountains

WANG Ma-li[1], LI Zhi-xuan[1], ZHANG Man-xiang[2]

(1. School of Life Science, Northwest University, Xi'an, 710069; 2. Xi'an Botanical Garden, Xi'an 710061)

Abstract: Accoding to field work and identification of moss in Qinling MTS, newly recorded family and one newly recorded genus are reported. The newly recorded family is Leucobryaceae and the newly recorded genus is *Dicranodotium*. Analysing datum show that *Leucobryum bowringii* is distributed in tropical and subtropical area, so far Qinling Mountains is most northern margin of its distribution, which has special significant for dividing the flora of Qinling Mountains. This provides datum for studying musci of Qinling MTS.

Key words: musci; new record; Qinling MTS; *Leucobryum bowringii*