

离散型 Hopfield 神经网络稳定性的研究

叶 微^{1,2}, 尹中海², 赵海燕²

(1. 西安交通大学 理学院, 陕西 西安 710049; 2. 空军工程大学 基础部, 陕西 西安 710068)

摘要:提出了离散型 Hopfield 神经网络 DHNN 模型权矩阵的等效矩阵的概念,给出了相关算法。利用等效矩阵的概念可把 DHNN 模型按其轨道是否相同进行分类。因而,获得了研究 DHNN 模型收敛性的一种新方法,并利用此方法推广了已有的有关收敛性的几乎所有结论。

关键词:离散 Hopfield 神经网络;稳定性;等效矩阵;周期解;等效向量

中图分类号:O29;TP183 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274 X(2003)06-669-04

1982年,美国生物物理学家 Hopfield 提出了如下的离散神经网络模型

$$\mathbf{V}(t+1) = T(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \mathbf{V}(t)). \quad (1)$$

其中, $\mathbf{V}(t) = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 是网络状态向量,且 $\mathbf{V} \in (-1, 1)^n$; $\mathbf{H} = \text{col}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ 是阈值, $\mathbf{W} = (w_{ij})_{n \times n}$ 是网络的权矩阵。算子 T 可描述为

$$v_i(t+1) = \begin{cases} \text{sgn}(\sum_{j=1}^n w_{ij}v_j(t) - h_i), & i \in \tau(t), \\ v_i(t), & i \notin \tau(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\tau(t) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 是神经元的指标集合函数。

Hopfield 模型按 $\tau(t)$ 的大小可分为 3 种类型:

- 1) 并行系统, $\tau(t) = \{1, 2, \dots, n\}$;
- 2) 混和系统, $\tau(t) \subset \{1, 2, \dots, n\}$;
- 3) 串行系统, $\tau(t) \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。

一个网络对应 $\mathbf{V}(t)$ 在 $\{-1, +1\}^n$ 空间中的一种运动模式。该模式可用一个有向图 $G = \{M, L\}$ 来表示。其中 $M = \{-1, +1\}^n$, $L = \{(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2); \mathbf{V}_2 = T(\mathbf{V}_1)\}$, $\mathbf{V}_1 \in \{-1, +1\}^n$ 。图 G 称为对应网络的生成图。 $L = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ 称为图 G 的由 \mathbf{V}_1 到 \mathbf{V}_2 的弧,若干个首尾相连的弧组成一个圈。若 C_1, C_2, \dots, C_k 是图 G 的全体圈, $D(C_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 是 C_i 的吸引域,则 $D(C_1), D(C_2), \dots, D(C_k)$ 是空间 M 的一个分割。若 C_i 是一个单点集,则该点是一个吸引点。若图 G 的全体圈都是吸引点,那么这个系统是一个稳定系统。有关 Hopfield 网络系统的稳定性条件的研究一直是该

项研究中的核心。传统上,在研究该项问题时,所采用的方法总是能量函数法。一个标准的能量函数的构造为 $E(\mathbf{V}) = -\frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{W}\mathbf{V} - \mathbf{V}^T\mathbf{H}$ 。这个方法的一个主要优点是能量函数的构造中不含符号函数 sgn 。因而,可以采用我们所熟知的一系列数学手法去处理它^[1~6]。但是,事物总有二重性,就在我们享受因不含符号函数而带来的巨大方便的同时,有许多重要的稳定性特征随着符号函数的忽略而同时被忽略掉了,目前的研究现状也恰恰证明了这一点。为了考查和研究这些被能量函数法所遗忘的特征,我们就必须另辟蹊径。为此目的,本文提出了一个完全不同的新方法,用此方法可以克服符号函数所带来的困难。这个新方法与能量函数法的不同,可形象地描述为:能量函数法把问题当作一个黑匣子来研究,而新方法找到了一种打开匣子盖的途径,从而使我们可以进入匣子内部进行研究。利用这个概念,我们推广了已往几乎所有有关 Hopfield 网络系统的稳定性的结果。另外,本文还顺带指出 Hopfield 网络系统存在记忆盲点。

1 矩阵与向量的等效性

设 ${}^1\mathbf{W} = ({}^1w_{ij})_{n \times n}$, ${}^2\mathbf{W} = ({}^2w_{ij})_{n \times n}$ 及 ${}^1\mathbf{H} = \text{col}({}^1h_1, {}^1h_2, \dots, {}^1h_n)$, ${}^2\mathbf{H} = \text{col}({}^2h_1, {}^2h_2, \dots, {}^2h_n)$ 分别是两 Hopfield 网络系统的权矩阵及阈值,若 $\forall \mathbf{V} \in$

收稿日期:2003-03-16

基金项目:国家自然科学基金资助项目(69975016)

作者简介:叶 微(1960-),男,陕西西安人,西安交通大学博士生,从事人工神经网络研究。

$M^n = \{-1, +1\}^n$ 都有

$$\text{sgn}({}^1\mathbf{W}\mathbf{V} - {}^1\mathbf{H}) = \text{sgn}({}^2\mathbf{W}\mathbf{V} - {}^2\mathbf{H}), \quad (3)$$

则称以上两 Hopfield 网络系统是等价的。式(3)可等价地写为

$$\text{sgn}\{({}^1\mathbf{W}, {}^1\mathbf{H})\bar{\mathbf{V}}\} = \text{sgn}\{({}^2\mathbf{W}, {}^2\mathbf{H})\bar{\mathbf{V}}\},$$

$$\bar{\mathbf{V}} = (v_1, v_2, \dots, v_n, -1).$$

(\mathbf{W}, \mathbf{H}) 称为增广权矩阵。

定义 1 设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 是任意两个 n 维向量, 若 $\forall \mathbf{V} \in M^n$ 有

$$\text{sgn}(\mathbf{X}^T\mathbf{V}) = \text{sgn}(\mathbf{Y}^T\mathbf{V}), \quad (4)$$

则称 \mathbf{X} 与 \mathbf{Y} 是等效的, 记为 $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}$ 。若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 是两个 n 阶实矩阵, 且 $\forall \mathbf{V} \in M^n$ 有

$$\text{sgn}(\mathbf{A}\mathbf{V}) = \text{sgn}(\mathbf{B}\mathbf{V}),$$

则称 \mathbf{A} 是 \mathbf{B} 的等效矩阵。记为 $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ 。若有

$$\text{sgn}\{({}^1\mathbf{W}, {}^1\mathbf{H})\mathbf{V}\} = \text{sgn}\{({}^2\mathbf{W}, {}^2\mathbf{H})\mathbf{V}\},$$

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n, -1)^T,$$

则称增广矩阵 $({}^1\mathbf{W}, {}^1\mathbf{H})$ 与 $({}^2\mathbf{W}, {}^2\mathbf{H})$ 等效。

显然, 若 $\beta > 0$, 则 $\beta\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{X}$ 。

定理 1 设 $E_X = \{\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n; \mathbf{Y} \leftrightarrow \mathbf{X}\}$ 是 \mathbf{X} 所在的等效类, 则 $E_X \subset \mathbf{R}^n$ 是凸集。

证明 设 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in E_X, \mathbf{Z} = t\mathbf{Y}_1 + (1-t)\mathbf{Y}_2, 0 \leq t \leq 1$, 则 $\forall \mathbf{V} \in M^n$, 有

$$\text{sgn}(t\mathbf{Y}_1^T\mathbf{V}) = \text{sgn}((1-t)\mathbf{Y}_2^T\mathbf{V}),$$

因而

$$\text{sgn}(\mathbf{Z}^T\mathbf{V}) = \text{sgn}(t\mathbf{Y}_1^T\mathbf{V} + (1-t)\mathbf{Y}_2^T\mathbf{V}) = \text{sgn}(\mathbf{X}^T\mathbf{V}).$$

向量等效与矩阵效显然具有如下关系。

定理 2 设 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 都是实矩阵, 则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 等效的充要条件是 \mathbf{a}_i 与 \mathbf{b}_i 等效 ($i = 1, 2, \dots, n$)。其中, \mathbf{a}_i 与 \mathbf{b}_i 分别是 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的第 i 行。

设 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 是两等效实矩阵, 则分别以 \mathbf{A} 及 \mathbf{B} 为增广权矩阵的两 Hopfield 网络系统是等价的。此时, 它们具有相同的生成图, 亦即这两个网络系统在空间 M^n 中具有完全相同的动力学行为。由此, 即得以下定理。

定理 3 两 Hopfield 网络系统等价的充要条件是它们的增广权矩阵等效。

由上所述, 向量等效是矩阵等效的基础, 为此, 我们来考查等效向量在 \mathbf{R}^n 中的分布。显然, 等效关系“ \leftrightarrow ”是 \mathbf{R}^n 中的一个等价关系。而且, 由于空间 M^n 中元素有限, 因而, 由“ \leftrightarrow ”所生成的 \mathbf{R}^n 中的等价类 $\mathbf{R}^n / \leftrightarrow$ 是一个有限集。因为 $\mathbf{X} = 0$ 的情形是平凡的, 所以, 为方便起见, 在以下的讨论中总假设 $\mathbf{X} \neq 0$ 。两向量是否等效可利用式(5)进行判定。

设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \mathbf{Y} = (y_1, y_1, \dots, y_n)^T$ 是

任意两个向量, 且 $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}$, 则 $\forall \mathbf{V} \in M^n$ 有

$$\text{sgn}(\mathbf{X}^T\mathbf{V}) = \text{sgn}(\mathbf{Y}^T\mathbf{V}).$$

由符号函数性质即得

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{V}, \mathbf{Y}^T\mathbf{V}) = \mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{Y} > 0. \quad (5)$$

现设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbf{R}^n, |X_i| = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 则 $\mathbf{X}/|X_i| \leftrightarrow \mathbf{X}$ 而 $\mathbf{X}/|X_i|$ 在以 M^n 中元素为顶点的超立方体 B^n 的表面 B^n_s 上。这样即有, $\forall \mathbf{V} \in \mathbf{R}^n$ 都 $\exists \mathbf{Y} \in B^n_s$ 使 $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}$, 我们就仅须考查等效向量在 B^n_s 上的分布即可。由定理 1 知, 等效类 E_X 在 B^n_s 上限制也是连通的凸集。 B^n_s 中凸集的含义为: 若 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in E_X \cap B^n_s$, 且 $\mathbf{Z} = t\mathbf{Y}_1 + (1-t)\mathbf{Y}_2 \in B^n_s$, 这里 $0 \leq t \leq 1$, 则 $\mathbf{Z} \in B^n_s$ 。下面在二维和三维的情形下, 详细地考查等效向量的分布。

由式(5)不难算得二维等效向量在 B^2_s 上共有以下 8 类: $(1, 0), (1, 1), (1, -1), (0, 1), (0, -1), (-1, 1), (-1, -1), (-1, 0)$ 。

上述 8 个向量是其所在等效类的重心。

三维等效向量在 B^3_s 上共有以下 50 类: $(1, 0, 0); (1, 1/2, 1/2), (1, -1/2, 1/2), (1, 1/2, -1/2), (1, -1/2, -1/2); (1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, -1, 0), (1, -1, -1), (1, 0, -1), (1, 1, -1), (1, 1, 1), (1, 1, 0); (1/2, 1, 1/2), (1/2, 1/2, 1), (1/2, -1/2, 1), (1/2, -1, 1/2), (1/2, -1, -1/2), (1/2, -1/2, -1), (1/2, 1/2, -1), (1/2, 1, -1/2); (0, 1, -1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (0, -1, 1), (0, -1, 0), (0, -1, -1), (0, 0, -1); (-1/2, 1, -1/2), (-1/2, 1, 1/2), (-1/2, 1/2, 1), (-1/2, -1/2, 1), (-1/2, -1, 1/2), (-1/2, -1, -1/2), (-1/2, -1/2, -1), (-1/2, 1/2, -1); (-1, 1, 1), (-1, 0, 1), (-1, -1, 1), (-1, -1, 0), (-1, -1, -1), (-1, 0, -1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 0); (-1, 1/2, 1/2), (-1, -1/2, 1/2), (-1, 1/2, -1/2), (-1, -1/2, -1/2); (-1, 0, 0)。$

上述向量的含义与二维相同。

图 1 是二维等效向量的几何示意图, 其中点的坐标依字母次序依次为: $(1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 1)$ 。A, C, E, G 的等效类是自身; B, D, F, H 的等效类依次为 AC, CE, EG, GA 的内部。

图 2 是三维等效向量的几何示意图(为方便记, 仅标出了型如 $(1, *, *)$ 的点), 其中点的坐标依字母次序依次为 $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, -1), (1, -1, 0), (1, -1, 1), (1,$

0,1), (1,1/2,1/2), (1,1/2,-1/2), (1,-1/2,-1/2), (1,-1/2,1/2), (1,0,0)。A,C,E,G 的等效类依次为三角形 ABH,BCD,DEF,FGH 的内部; B,D,F,H 的等效类依次为 AC,CE,EG,GA 的内部; I,J,K,L 的等效类依次为 HB,BD,DF,FH 的内部; M 的等效类为四边形 BDFH 的内部。

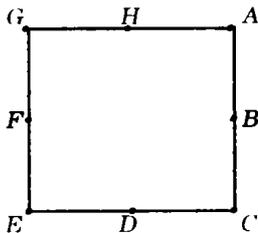


图 1 二维等效向量几何示意图

Fig.1 Equi-active class of 2-dimension vectors

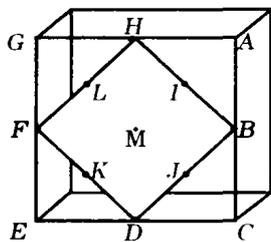


图 2 三维等效向量几何示意图

Fig.2 Equi-active class of 3-dimension vectors

2 Hopfield 网络系统的稳定性

利用上述讨论的结果,我们可以把由能量函数法所能得到的所有结果都予以推广。为叙述方便起见,以下总假设 Hopfield 网络系统(1)的阈值 $H = 0$ 。

传统结果 1 若 $W = W^T, w_{ii} \geq 0$, 则网络(1)串行稳定。

传统结果 2 若 $W = W^T, W$ 半正定, 则网络并行稳定。

传统结果 3 若 $W = W^T$, 则网络在并行方式下,或收敛于稳定点,或收敛于周期为 2 的极限环。

由等效的定义,我们可以把以上诸结果依次推广为:

定理 4 若 $W \leftrightarrow \hat{W}$, 且 $\hat{W} = \hat{W}^T, w_{ii} \geq 0$, 则网络(1)串行稳定。

定理 5 若 $W \leftrightarrow \hat{W}, \hat{W} = \hat{W}^T, \hat{W}$ 半正定, 则网络并行稳定。

定理 6 若 $W \leftrightarrow \hat{W}, \hat{W} = \hat{W}^T$, 则网络在并行方式

下,或收敛于稳定点,或收敛于周期为 2 的极限环。

设 $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 由 $\beta W \leftrightarrow W$ 可得如下推论:

推论 1^[3] 若存在对角正定矩阵 $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 使得 βW 对称, $w_{ii} \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则网络(1)串行稳定。

推论 2^[3] 若存在对角正定矩阵 $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 使得 βW 对称, 且 βW 半正定, 则网络并行稳定。

推论 3^[3] 若存在对角正定矩阵 $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 使得 βW 对称, 则网络在并行方式下,或收敛于稳定点,或收敛于周期为 2 的极限环。

例

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

上例中,第一个阵正定,第二个阵半正定,第三个阵既不正定,也不半正定。由定理 4 知,它们对应的网络系统都稳定,且具有完全相同的生成图。此例说明网络系统的权矩阵正定与否,似乎并不是判定网络系统是否稳定的关键,另外,还说明定理 5 确实推广了传统结果 2。对于定理 4 和 6 亦容易举出类似的例子。

由于二维等效向量仅含有 8 类,所以含有两个神经元的 Hopfield 网的权矩阵,在等效意义下共有 81 种(含 $X=0$),且它们中的任意两种都有不同的生成图,而含有两个神经元的 Hopfield 网有 4 种不同类型。所以,它们的生成图是含有 4 个顶点的有向图,而 4 个顶点的有向图共有 256 种不同类型。对于三维情形,这两个数字分别是 51^3 和 64^4 。此即说明,当阈值为 0 时,由 Hopfield 网的权矩阵所产生的生成图种类,远小于其所对应的顶点个数相同的有向图种类。这个事实说明, Hopfield 网络系统的记忆存在缺陷。

参考文献:

[1] HOPFIELD J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons [J]. Biophysics, 1984, 81 (4): 3 088-3 092.

[2] HOPFIELD J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities [J]. Biophysics, 1982, 79(4): 2 559-2 558.

[3] 廖晓昕. 离散 Hopfield 神经网络的稳定性研究[J]. 自动化学报, 1999, 25(6): 721-727.

- [4] 沈世镛. 神经网络系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [5] HAYKINS. Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Second Edition [M]. Hamilton, Ontario: Prentice-Hall Inc, 1999.
- [6] JENNIT S. Analysis and synthesis of a class of discrete-time neural networks with multilevel threshold Neurons [J]. IEEE Trans, Neural Networks, 1995, 6(1): 105-115.

(编辑 姚远)

On stability of time Hopfield neural network

YE Wei^{1,2}, YIN Zhong-hai², ZHAO Hai-yan²

(1. Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710069, China; 2. Department of Basic, Engineering University of Air Force, Xi'an 710068, China)

Abstract: A new concept on the equivalent matrices of discrete Hopfield neural network (DHNN) is introduced. A related algorithm on equivalent matrices is presented. Based on the new concept, a classification of DHNN with neurons is established in such a way that two DHNN belonging to the same class have completely the same dynamic property. A new way to study the stability about DHNN is given and almost all of results on the stability about DHNN are expanded from this.

Key words: discrete Hopfield neural network; stability; equivalent matrices; equivalent vector; preiodic solution

• 学术动态 •

2003 年诺贝尔自然科学奖揭晓

10月6日,瑞典卡罗林斯卡医学院宣布,2003年诺贝尔生理学或医学奖授予美国科学家保罗·劳特布尔(Paul C. Lauterbur, 1927年生于美国俄亥俄州,1962年获费城匹兹堡大学化学博士,现为美国伊利诺伊大学生物医学核磁共振实验室主任)和英国彼得·曼斯菲尔德(Peter Mansfield, 1933年生于伦敦,1962年获伦敦大学物理学博士,现为英国诺丁汉大学物理学系教授),表彰他们在核磁共振成像技术领域的突破性成就。他们的研究为临床诊断和医学研究应用核磁共振技术奠定了理论基础。一位化学家和一位物理学家分享本年度生理学或医学奖,这是一次意义深长的反串。

10月7日,瑞典皇家科学院宣布,本年度诺贝尔物理学奖授予两位俄罗斯科学家维塔利·京茨堡(Vitaly L. Ginzburg, 87岁),阿列克谢·阿布里科索夫(Alexei A. Abrikosov, 75岁)和英国科学家安东尼·莱格特(Anthony J. Leggett, 65岁),表彰他们发现了量子理论中的两种现象:超导性和超流体性。这是极端低温状态下发生的两种现象,这一理论奠定了核磁共振技术的基础。他们开创性的贡献早为人知,由于东西方冷战使一些科学家受到冷落,2003年的物理学奖多少含有一点对历史“补偿”的意味。

10月8日,瑞典皇家科学院宣布,本年度诺贝尔化学奖授予两位美国科学家彼得·阿格雷(Peter Agre, 1949年生于美国明尼苏达州,1974年获约翰·霍普金斯大学医学院医学博士,现为该院生物化学教授)和罗德里克·麦金农(Roderick Mackinnon, 1956年生于美国波士顿,1982年获塔夫茨医学院医学博士,现为洛克菲勒大学生物物理学教授),表彰他们在细胞膜通道方面做出的开创性贡献。这一研究有助于理解基本的生命过程。从2003年诺贝尔科学奖的研究成果看,当代科学研究朝着交叉学科、边缘学科迈进,对科研人员的要求,除具备深厚的专业知识外,还应具有相邻学科的基础知识。2003年诺贝尔生理学或医学奖由一位物理学家和一位化学家获得,而两位医学博士摘取了今年的化学奖,这都说明了科研选题正在朝着各学科交叉互融的方向发展。

(邵 琦)