2003 年 6 月
第 33 卷第 3 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Jun. 2003
Vol. 33 No. 3

洛希极限和引力作用范围的近似改正

钟鸣乾

(西北大学 物理学系,陕西 西安 710069)

摘要:运用广义相对论的后牛顿效应,得到洛希(Roche)极限和引力作用范围的近似改正表示式,表明洛希极限不仅与牛顿引潮力及惯性离心力有关,而且受重力后牛顿近似改正的影响。并且估计、讨论了太阳系天体的某些具体情况。

关 键 词:重力的后牛顿近似;洛希极限;引力作用范围;广义相对论

中图分类号:O412.1,P131 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)03-0263-04

在牛顿理论的基础上,采用力学模型研究太阳系天体相互作用和运动,已取得很大的成功和发展,但也仍存在一些问题。例如,太阳系天体运动和演化的三体问题及多体问题,不能严格地一般求解而成为难题,然而仍吸引着力学家和数学家不断深入研究,提出解决具体问题的多种近似方法,包含在天体力学的理论、方法中,并且在观测到新现象的情况下不断发展。在 20 世纪 90 年代,彗星 Shoemaker Levy 9 撞击木星的天文事件引起科学界的关注和兴趣[1~4]。关于近地小行星的轨道演化与地球交会问题有较系统的研究[5~7]。这些建立在牛顿动力学基础上的研究计算是较为繁复的,但最终仍是近似数值计算结果。天文学上曾用洛希极限及引力作用范围等对太阳系天体相互作用和运动作近似估计,与实际近似相符合,并且是进一步推导计算的基础。运用广义相对论的后牛顿近似关于太阳系天体引力相互作用和运动曾有一些探讨[8~10]。本文应用重力的后牛顿近似对于洛希极限和引力作用范围作近似改正,并估计、讨论行星系统和彗星的某些具体情况。

1 洛希极限的后牛顿近似改正

均匀旋转流体模型的天体在另一天体引力作用下的平衡问题探讨中,已得到著名的洛希极限。如果一绕转体与中心体距离小于一极限值,那么,这绕转天体将发生分裂而解体,这一距离就称为(中心)天体的洛希极限。建立在牛顿引力理论基础上的天体力学已给出洛希极限 r_{RN} 的近似表达式

$$r_{RN} = 2.455\,4\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{\frac{1}{3}}R, \tag{1}$$

其中:ρ 和 R 分别为一天体(如中心体)的密度和半径;ρ' 为另一天体(如绕转体)的密度(洛希极限所对应绕转体密度 ρ_R 称为洛希密度)。实际上任两天体的相互作用,相对来说都存在这极限。

下面考虑广义相对论重力的后牛顿效应对于式(1)的近似改正。从广义相对论场方程和运动方程出发推导洛希极限是复杂的,实际上该极限本身只有近似估计性质。因此,我们只考虑广义相对论重力的后牛顿改正。用较简便的近似方法得到这极限距离近似改正的一种表示式。

设天体 A 和 B 为球形,质量、半径、密度分别为 M_A, R_A, ρ_A 和 M_B, R_B, ρ_B。它们的中心距离为 r。天体 B 具有自转角速度 ω,绕中心体 A 作轨道运动的角速度 ω_0,ω 与 ω_0 一般不等,设 $\omega/\omega_0 = K_\omega =$ 常量。G 为引力常数。天体 B 表面单位质量受引力 f_G 是

$$f_G = \frac{GM_B}{R_B^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho_B R_B。 \tag{2}$$

按开普勒第三定律

$$\omega_0^2 = GM_A/r^3,$$

天体 B 表面单位质量因自转受惯性离心为

$$f_i = \omega^2 R_B = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\omega_0^2 R_B = K_\omega^2\frac{GA_A}{r^3}R_B =$$

收稿日期:2001-11-15
基金项目:中国科学技术大学天体物理和宇宙学基金资助项目
作者简介:钟鸣乾(1938-),男,浙江湖州人,西北大学教授,从事广义相对论和天体引力的研究。

$$\frac{4\pi G K_{\omega}^{2}\rho_{A}R_{A}^{3}R_{B}}{3r^{3}}。\tag{3}$$

天体 B 表面单位质量受天体 A 产生的引潮力(潮汐力)最大值 f_{td} 近似为

$$f_{td}=\frac{2GM_{A}R_{B}}{r^{3}}=\frac{8\pi G\rho_{A}R_{A}^{3}R_{B}}{3r^{3}}。\tag{4}$$

天体B表面单位质量受天体A产生的广义相对论重力的后牛顿改正 f_{PG} 为[8~10]

$$f_{PG}=\frac{3G^{2}M_{A}^{2}}{c^{2}r^{3}}=\frac{2GM_{A}}{c^{2}}\cdot\frac{3GM_{A}}{2r^{3}}=\frac{2\pi GR_{SA}\rho_{A}R_{A}^{3}}{r^{3}},\tag{5}$$

式中:$R_{SA}=2GM_{A}/c^{2}$ 是天体 A 的 Schwarzschild 半径;c 为光速。上述各表示式中的力都是指大小,取正值。天体 B 的自引力方向指向中心,而后三者方向(或分量方向)都与自引力方向相反。关于引潮力和惯性离心力的后牛顿改正是更小的数量级,故可忽略不计。如果考虑牛顿近似,天体 B 分裂解体的情况下应满足条件

$$f_{td}+f_{i}-f_{G}\geqslant 0,\tag{6}$$

把式(2 ~ 4) 代入式(6),取等号,得到

$$\frac{4\pi GR_{B}}{3}\left(\frac{2\rho_{A}R_{A}^{3}}{r^{3}}+\frac{K_{\omega}^{2}\rho_{A}R_{A}^{3}}{r^{3}}-\rho_{B}\right)=0,$$

给出牛顿近似条件下洛希极限表示式

$$r_{RN}=(2+K_{\omega}^{2})^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\rho_{A}}{\rho_{B}}\right)^{\frac{1}{3}}R_{A},\tag{7}$$

式(7) 中 r_{RN} 与 ρ_{A},ρ_{B} 和 R_{A} 的关系,与式(1) 是相同的,只是两者系数略有不同,这是由于所用的方法略有不同。如果考虑天体 B 受天体 A 的重力后牛顿近似改正,天体 B 分裂解体应近似满足如下条件

$$f_{td}+f_{i}+f_{PG}-f_{G}\geqslant 0。\tag{8}$$

把式(2 ~ 5) 代入式(8),取等号,就可得到

$$\frac{4\pi GR_{B}}{3}\left(\frac{2\rho_{A}R_{A}^{3}}{r^{3}}+\frac{K_{\omega}^{2}\rho_{A}R_{A}^{3}}{r^{3}}+\frac{3R_{SA}\rho_{A}R_{A}^{3}}{2R_{B}r^{3}}-\rho_{B}\right)=0,$$

$$r_{RP}=r=\left(2+K_{\omega}^{2}+\frac{3}{2}\frac{R_{SA}}{R_{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho_{A}}{\rho_{B}}\right)^{\frac{1}{3}}R_{A}。\tag{9}$$

r_{RP} 是包含了后牛顿改正的洛希极限。式(9) 是包含牛顿效应和后牛顿近似改正的洛希极限表示式。后牛顿改正的影响主要体现在改正系数决定于天体 A 的 Schwarzschild 半径与天体 B 半径之比,即 R_{SA}/R_{B}。总的说来,r_{RP} 是决定于两天体的密度和半径(或者说质量和体积大小)及自转角速度。也就表明,洛希极限不仅与牛顿引潮力、自转惯性离心力密切有关,而且受重力后牛顿改正的影响。对于恒星(如太阳)邻近的小天体,或大行星附近的小卫星,或双星中质量较大的主星与邻近的小伴星,重力后牛顿改正会对洛希极限产生显著的影响。

洛希极限是根据旋转不可压缩均匀流体模型得到的,关于平衡时的自转角速度有一定限制,是较小的数值。一般实际天体不是不可压缩的均匀流体,洛希极限只能作初步近似估计,但天体的分裂解体是所观察到的。因此,对于具体不同天体估计的正确程度可能会产生较大差别。

太阳系某些天体由于潮汐摩擦等的作用,它的自转周期与轨道运动周期相等,例如月球就是这样。于是 $K_{\omega}=1$,这时式(7,9) 成为

$$r_{RN}=3^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\rho_{A}}{\rho_{B}}\right)^{\frac{1}{3}}R_{A},\tag{7a}$$

$$r_{RP}=\left(3+\frac{3R_{SA}}{2R_{B}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\rho_{A}}{\rho_{B}}\right)^{\frac{1}{3}}R_{A},\tag{9a}$$

$$r_{RP}=\left(1+\frac{R_{SA}}{2R_{B}}\right)^{\frac{1}{3}}r_{RN}。\tag{10}$$

式(10) 表明,质量大的天体(R_{SA} 大) 对半径小(R_{B} 小) 的天体的洛希极限的后牛顿近似改正起较显著的作用。

根据洛希极限的后牛顿近似表达式,可定性或半定量解释太阳系的某些现象。由式(9,10) 可知,对于质量、半径、密度大的某一天体和另一小天体,两者对应量相差越大,后牛顿改正越显著,小天体易进入大天体的洛希极限发生分裂解体,也可能分裂得越来越小而完全被粉碎。太阳系中质量大、半径大的天体是太阳和木星。太阳的平均密度 1.41 g/cm^{3},比地球(5.52 g/cm^{3})、金星(5.25 g/cm^{3}) 和水星(5.43 g/cm^{3}) 小,在演化的某一时期,以太阳为中心的一定范围内,质量、半径、密度小的天体,易进入太阳、水星、金星和地球的洛希极限而瓦解,落入大天体,于是只剩下水星、金星、地球和月亮,前两者就没有卫星。木星是太阳系中质量、半径(体积) 最大的行星,但其密度比火星小(平均密度:木星 1.33 g/cm^{3},火星 3.95 g/cm^{3}),在木星周围区域,可能存在密度较大的小天体,在太阳和木星的洛希极限之外,形成木星的较多的卫星及木星与火星之间的小行星带。1993 年发现的彗星 Shoemaker-Levy 9,在 1992 年 7 月已进入木星的洛希极限,原来彗核的直径约 2.3 km,分裂成约 20 块,每块平均直径 0.74 km[11],分裂成的块状物的平均密度为 0.3 ~ 0.7 g/cm^{3}[12],1994 年 7 月撞击木星[1~4],它可能受重力后牛顿近似的影响[10]。实际上天文学已知彗星数目极多,分裂也是常有的。有的大致分裂成两块或数块,有的分离出小部分,有的彻底瓦解而粉碎,成为

地球上观测到的流星雨。彗星 Shoemaker-Levy 9 的分裂与木星碰撞只是许多彗星分裂现象中一种比较特殊的情况。

2　后牛顿近似对引力作用范围的影响

在太阳、大行星和大卫星组成的系统作用下的小天体（小行星、彗星和小卫星等）的运动，一般是天体力学的三体问题或多体问题。即使是三体问题，普遍的严格解未能得到，于是也可先粗略地使用引力作用范围的概念。设有质量为 M 和 m 的两天体，另一质量 m_0 的小天体受到它们的作用，M 与 m 之间距离 D。考虑重力的后牛顿改正，如式(5) 所示，较小质量 m 的天体的引力作用范围 x 可用下式确定

$$\frac{Gmm_0}{x^2}-\frac{3}{2}\frac{2Gm}{c^2}\frac{Gmm_0}{x^3}=\frac{2GMm_0x}{D^3},\qquad(11)$$

上式可写成

$$x^4-\frac{m}{2M}D^3x+\frac{3m}{4M}r_sD^3=0。\qquad(12)$$

式中 $r_s=2Gm/c^2$ 是质量 m 的天体的 Schwarzschild 半径。

求解四次代数方程(12) 相当于求解以下三次方程和二次方程

$$y^3-\frac{3m}{M}r_sD^3y-(\frac{m}{2M})^2D^6=0,\qquad(13)$$

$$x^2-y^{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{2}[y-(y^2-\frac{3mr_sD^3}{M})^{\frac{1}{2}}]=0,\qquad(14)$$

可求得式(13) 解的实根为

$$y=\frac{1}{2}(\frac{m}{M})^{\frac{2}{3}}D^2\{[1+\sqrt{(1-64(\frac{M}{m})(\frac{r_s}{D})^3}]^{\frac{1}{3}}+[1-\sqrt{(1-64(\frac{M}{m})(\frac{r_s}{D})^3}]^{\frac{1}{3}}\}。\qquad(15)$$

式(14) 有意义的实根是

$$x=\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\{y-2[y-(y^2-\frac{3mr_sD^3}{M})^{\frac{1}{2}}]\}^{\frac{1}{2}}。\qquad(16)$$

式(15,16) 是后牛顿近似的引力作用范围表示式。如考虑重力后牛顿近似改正的影响，对于质量为 M 和 m 任意两天体，式(15,16) 都是适用的。

关于太阳系里的天体，式(15) 中的 $64(M/m)(r_s/D)^3$ 是小量，可忽略不计，就有

$$y\approx(m/M)^{\frac{2}{3}}D^2,\qquad(17)$$

式(17) 代入式(16) 取一级近似，给出

$$x\approx(\frac{m}{M})^{\frac{1}{3}}D[1-\frac{3r_s}{4D}(\frac{M}{m})^{\frac{1}{3}}]。\qquad(18)$$

关于圆限制性三体问题的拉格朗日平动解所确定的希耳(Hill) 引力作用范围 x_H 近似为

$$x_H\approx(\frac{m}{M})^{\frac{1}{3}}D,\qquad(19)$$

于是式(18) 可写为

$$x\approx x_H(1-\frac{3r_s}{4x_H})\approx x_H。\qquad(20)$$

上述计算推导结果表明，如考虑重力后牛顿近似改正，在太阳系里，行星和大卫星对于彗星、小行星及其他小天体的引力作用范围，只是对于牛顿理论的圆限性三体问题确定的希耳引力作用范围的很微小改正，比对洛希极限的影响小得多。也就是说，在太阳系里，后牛顿近似改正对引力作用范围的影响可忽略不计，可认为牛顿近似与后牛顿近似两者相等。

从引力作用范围可定性讨论小天体（彗星、小行星等）与大行星或卫星的碰撞的可能性问题。按式(19,20) 很易算出 x 与 D 之比值，即相当于以 D 为单位的引力作用范围。由两天体组成的系统，x/D 值反映其中一天体对第三天体作用和影响的大小。木星质量是地球的 318 倍，太阳与木星组成的系统，木星的 x/D 值为 0.098；日地系统，地球的 x/D 值为 0.015。就是说，木星的引力作用范围约为太阳与木星距离的 10%，而地球的引力作用只有日地距离的 1.5%。因此，太阳系里木星对彗星的影响较大，碰撞可能性也较大，与地球的碰撞可能性较小。关于木星及其卫星系统，有 16 个卫星，木星质量远大于它的卫星质量，是它的 4 个大卫星质量的 10^4 倍以上。所以它的卫星的 x/D 值比较小，可算出木卫一为 0.036，木卫二 0.030，木卫三 0.043，木卫四 0.039。当彗星或其他小天体经过木星系统天区时，木星的卫星对它们的作用影响较小，而木星对它们的影响较大，与木星碰撞的可能性大。因此，彗星 Shoemaker-Levy 9 在 1994 年 7 月与木星碰撞[1~4]，是可以定性理解的。

关于地月系统，地球质量是月球的 81 倍，月球的 x/D 值为 0.23，即 x 值约是月地距离的 1/4。月球相对于月地距离的引力作用范围比木卫相对木星的对应值大。假使有彗星经过地月系统天区，月球对彗星的作用和影响比较大（与木卫对应比较而言），相当于减小地球对彗星的影响，这也是减小彗星或其他小天体撞击地球的可能性的因素之一。

3 结 语

研究太阳系天体相互作用及其运动,通常是建立适当的力学模型,在一定条件下进行严格的数学分析与推导得到结果,与实际情况较好相符合或近似相符合。即使是数学上严格精确地推导计算,建立的模型与实际比较,总是近似的,牛顿力学得到的结果是最低级近似的。于是用严格数学推导得到的结论与实际也可能不符合,甚至可能导致谬误。其他引力理论,如广义相对论,是比牛顿理论更精确更普遍的理论,但如果建立比较符合实际的复杂的模型,要严格地数学推导就十分繁复和困难,甚至难于下手。然而,利用近似方法,仍可定性或半定量地估计解释某些具体问题,并且是进一步较严格推导计算的基础。所以本文考虑太阳系天体重力的广义相对论后牛顿近似改正,对洛希极限和引力作用范围的影响,得到近似改正表示式,并讨论对于大行星的卫星数目的影响及小天体与大行星碰撞的可能性问题,有一定的意义。

参考文献:

[1] CHAPMAN C R. Comet on target for Jupiter[J]. Nature, 1993, 363: 492-493.

[2] CHAPMAN C R. Preparing for the comet crash[J]. Nature, 1993, 365: 784-785.

[3] SEKANINA Z. Disintegration phenomena expected during collision of comet Shoemaker-Levy 9 with Jupiter[J]. Science, 1993, 262: 382-387.

[4] WEAVER H A. Hubble space telescope observations of comet P/Shoemaker-Levy 9 (1993e)[J]. Science, 1994, 263: 787-791.

[5] 刘 林,季江徽. 关于近地小行星轨道演化的初步探索[J]. 天文学报, 1997, 38(4): 337-352.

[6] 刘 林,季江徽,廖新浩. 近地小行星轨道演化的数值研究与辛算法有效性的探讨[J]. 天文学报, 1998, 39(2): 141-151.

[7] 季江徽,刘 林. 近地小行星与地球交会问题[J]. 中国科学(A辑), 2000, 30(4): 379-384.

[8] 钟鸣乾. 重力加速度的后牛顿效应[J]. 科学通报, 1991, 36(11): 875-876.

[9] 钟鸣乾. 太阳系天体的后牛顿重力[J]. 西北大学学报(自然科学版), 1999, 29(5): 381-383.

[10] 钟鸣乾. 行星重力的后牛顿近似对卫星作用的估计. 物理学报, 2001, 20(12): 2 497-2 500.

[11] SCOTTI J V, MELOSH H J. Estimate of the size of comet Shoemaker-Levy 9 from tidal breakup model[J]. Nature, 1993, 365: 733-735.

[12] ASPKAUG E, BENZ W. Density of comet Shoemaker-Levy 9 deduced by modelling breakup of the parent" rubble pile[J]. Nature, 1994, 370: 120-124.

(编 辑 曹大刚)

Approximate corrections for Roche limit and sphere of gravitational action

ZHONG Ming-qian

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Using post-Newtonian effect of gravity to general relativity, the appoximate expressions of corrections for the Roche limit and sphere of graviational action are obtained. It is represented that the Roche limit not only depends on Newtonian tidal forces and inertial centrifugal forces, but also may be affected by post-Newtonian correction of gravity. Also, Some situations of celestial bodies in solar system were estimated and disucssed.

Key words: post-Newtonian approximation to gravity; Roche limit; sphere of gravitational action; general relativity