2003 年 6 月　　西北大学学报(自然科学版)　　Jun. 2003
第 33 卷第 3 期　　Journal of Northwest University(Natural Science Edition)　　Vol. 33 No. 3

偏序集拟阵的偏序集性质及其应用

毛　华[1,2],刘三阳[2]

(1. 郑州大学 数学系,河南 郑州　450052;2. 西安电子科技大学 数学系,陕西 西安　710071)

摘要:通过对偏序拟阵的偏序集性质和广义拟阵通的偏序集性质的分别研究,得到了偏序集拟阵和广义拟阵二者的关系,即每个偏序集拟阵均为广义拟阵,但反之不然。又利用这种关系得出拟阵中的贪心算法能够推广到偏序集拟阵进而组合格式中,并阐述了利用这种关系对于研究偏序集拟阵理论和广义拟阵理论的一些其他作用。

关　键　词:偏序集拟阵;偏序集性质;广义拟阵;偏序集

中图分类号:O157;O153.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-274X(2003)03-253-03

偏序集拟阵(post martoid)是将拟阵的底集用偏序集替代而成的,是拟阵理论的推广。它是 L. Pezzoli 于 20 世纪 80 年代初提出,并进行了比较系统的研究[1]。而广义拟阵是 B. Korte 和 L. Lovász 于 1981 年提出的[2,3],此后,又进一步做了大量研究工作。它的诞生是基于计算机关于计算原理的需求而发展起来的,也是拟阵理论的推广。那么,这二者之间的联系问题至今尚无结论,本文主要就是解决这些问题。

首先应注意到,文献[2,3]讨论了偏序集拟阵与广义拟阵的关系,这里所论的偏序集拟阵均为有限,即其底集为有限。另外,对于任给一个广义拟阵$(E,\mathscr{F})$,将其完全由$(\mathscr{F},\subseteq)$所决定的而无须知道关于$\mathscr{F}$的更详细内容的性质称为“偏序集性质”(这里$(\mathscr{F},\subseteq)$为$\mathscr{F}$的包含序化)[2]。为讨论方便,将偏序集拟阵理论中的对应者$(\mathscr{I},\subseteq)$的相应性质称为偏序集拟阵的偏序集性质,此处$\mathscr{I}$为一个偏序集拟阵的独立集之全体。

1　预备知识

这里将给出本文所需的预备知识。

定义 1[4] ①若集 P 上定义的二元关系$\leqslant$对于$\forall x,y,z\in P$ 满足如下条件:$(p1)x\leqslant x$;$(p2)$若$x\leqslant y$且$y\leqslant x$,则$x=y$;$(p3)$若$x\leqslant y$且$y\leqslant z$,则$x\leqslant z$。则称 P 为一个偏序集。在 P 上,若$b<a$,且不存在$x\in P$,使$b<x<a$,则称 a 覆盖 b,记为$b<a$,若$|P|<\infty$,则称 P 为有穷的偏序集。② 偏序集 P 的对偶 P^* 是在 P 上定义的反偏序关系,即在 P 上$x\leqslant y\Leftrightarrow$在$P^*$上$x\geqslant y$。③ 若在偏序集 P 上任何两个元 x,y 在 P 中均有最小上界,记为$x\vee y$,及最大下界,记为$x\wedge y$,则称 P 为一个格。称格$(L,\vee,\wedge)$的子集 X 为子格,若$a,b\in X$,必有$a\vee b,a\wedge b\in X$成立。称格 L 为半模的,若$x\neq y$且$z<x,z<y$,则$x<x\vee y,y<x\vee y$。

定义 2[1,5] 设 P 为一个偏序集。①若$x,y\in P,x\leqslant y$,则称$[x,y]=\{z\in P:x\leqslant z\leqslant y\}$为 P 的一个区间。② 如果$A\subseteq P$满足:对任何$x,y\in P$,若$y\leqslant x$且$y\in A$,必有$x\in A$,则称 A 为 P 的一个滤子(filter)。P 的滤子全体记为$\mathrm{Inc}(P)$。如果 A 满足:

当$x\leqslant y$且$y\in A$时,必导致$x\in A$成立,则称 A 为 P 的一个理想(*ideal* 也叫递减集)。③设$\mathscr{B}$为 P 的一族滤子满足条件:$(b0)\mathscr{B}\neq\varnothing$;$(b1)$任何$B_1,B_2\in\mathscr{B}$,若$B_1\neq B_2$,则$B_1\not\subset B_2$;$(b2)$当$B_1,B_2\in\mathscr{B}$,$X,Y\in\mathrm{Inc}(P)$且$X\subseteq B_1,B_2\subseteq Y,X\subseteq Y$时,必有$B\in\mathscr{B}$使$X\subseteq B\subseteq Y$,则称$\mathscr{B}$为一个偏序集拟阵,若$I\in\mathrm{Inc}(P)$且存在$B\in\mathscr{B}$使$I\subseteq B$,则称 I 为$\mathscr{B}$的独立集。$\mathscr{B}$的独立集全体记为$\mathscr{I}$。

收稿日期:2001-11-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(69972036);国家博士后基金资助项目(20609)。

作者简介:毛　华(1963-),女,四川渠县人,郑州大学博士,从事代数组合学、格论及其应用方面的研究。

本文中对于 $A\subseteq P$，$Max(A):=\{x\in A: x$ 是 A 中一个极大元$\}$。

引理 1[4] ①偏序集 P 的对偶 P^* 关于反偏序关系为一个偏序集。②一个格的任何区间均为子格。③一个半模格的任何区间子格仍是半模格。

引理 2[1,5] ①若 $I_1,I_2\in Inc(P)$，则 $I_1\cup I_2, I_1\cap I_2\in Inc(P)$。②在偏序集拟阵 $\mathscr{B}$ 中，$\mathscr{I}$ 满足如下条件：$(i0)\mathscr{I}\neq\varnothing$；$(i1)$若 $X,Y\in \mathrm{Inc}(P)$，$Y\in\mathscr{I}$ 且 $X\subseteq Y$，则 $X\in\mathscr{I}$；$(i2)$若 $X,Y\in\mathscr{I}$ 且 $|X|<|Y|$，则存在 $y\in\mathrm{Max}(Y\backslash X)$，使 $X\cup y\in\mathscr{I}$。

反之，设 $\mathscr{I}\subseteq\mathrm{Inc}(P)$ 满足 $(i0)$，$(i1)$，$(i2)$，则 $\mathscr{B}=\{I\in\mathscr{I}: I$ 是 $\mathscr{I}$ 中极大元$\}$构成一个偏序集拟阵。

基于引理 2，本文中用 $(P,\mathscr{I})$ 表示一个定义在 P 上偏序集拟阵。

定义 3[2,3] 设 E 为有限集，$\mathscr{F}\subseteq 2^E$ 为一个集系，如果满足下述条件：

$(G1)$若 $X\neq\varnothing$ 且 $X\in\mathscr{F}$，则存在 $x\in X$，使 $X\backslash x\in\mathscr{F}$；$(G2)$若 $X,Y\in\mathscr{F}$，且 $|Y|<|X|$，则存在 $x\in X\backslash Y$，使 $Y\cup x\in\mathscr{F}$。则称 $(E,\mathscr{F})$ 为一广义拟阵(greedoid)。

引理 3[2,3] ①$(E,\mathscr{F})$ 为一个广义拟阵的充要条件是 $(G1')$：$\varnothing\in\mathscr{F}$ 与 $(G2)$ 同时成立。② 设 $\mathscr{F}\subseteq 2^E$ 且 $\varnothing,E\in\mathscr{F}$，则 $(E,\mathscr{F})$ 为反拟阵 $\Leftrightarrow(\mathscr{F},\subseteq)$ 为高 $|E|$ 的半模格。(反拟阵的定义参见文献[2,3])。③ 广义拟阵 $(E,\mathscr{F})$ 为区间广义拟阵 $\Leftrightarrow(\mathscr{F},\subseteq)$ 中所有闭区间 $[\varnothing,X]$ 均为半模格。(区间广义拟阵的定义参见文献[2,3]。④ 令 P 为一个有限偏序集，E 为一个有限集，$f:P\to E$ 为一个映射，$\mathscr{F}=\{f(A)\subseteq E: A$ 为 P 的理想$\}$，则 $(E,\mathscr{F})$ 为一个反似阵。另外对于每一个反拟阵均存在某个偏序集，使得该反拟阵能以上述方式导出。

2 偏序集性质及其应用

本节首先分别讨论偏序集拟阵的偏序集性质和广义拟阵的偏序集性质，再讨论二者的关系。其次利用这些关系给出它们的一些应用。

定理 1 若 $(P,\mathscr{I})$ 为一个偏序集拟阵，则 $(\mathscr{I},\subseteq)$ 满足下述性质：① $\varnothing$ 为 $(\mathscr{I},\subseteq)$ 中的最小元；② 对于任意 $X\in\mathscr{I}$，$[\varnothing,X]=2^X\cap\mathrm{Inc}(P)$；③ 对于任意 $X,Y\in\mathscr{I}$，若 $|Y|<|X|$，则存在 $x\in X\backslash Y$ 使 $Y\pi Y\cup x$。

反之，若 $\mathscr{I}\subseteq\mathrm{Inc}(P)$ 满足①～③，则 $(P,\mathscr{I})$ 必为一个偏序集拟阵。

证 明 因 $(P,\mathscr{I})$ 为一个偏序集拟阵，由 $(i0)-(i2)$ 易得①～③。

反之，由①，②易得 $(i0)$，$(i1)$。由③可知 $Y\cup x\in\mathscr{I}\subseteq\mathrm{Inc}(P)$，其中 $x\in X\backslash Y$，断言 $x\in\mathrm{Max}(X\backslash Y)$，否则必至少存在 $z\in\mathrm{Max}(X\backslash Y)$，使得 $x\pi z$。这样 $Y\cup x\in\mathrm{Inc}(P)$ 必导致 $z\in Y$ 矛盾。故 $(i2)$ 成立。

定理 2 若 $(E,\mathscr{F})$ 为一个广义拟阵，则 $(\mathscr{F},\subseteq)$ 满足下述性质：

$(F1)\varnothing$ 为 $(\mathscr{F},\subseteq)$ 中的最小元；$(F2)$ 对于任意 $X,Y\in\mathscr{F}$，若 $|Y|<|X|$，则均存在 $x\in X\backslash Y$ 使 $Y\pi Y\cup x$。

反之，若 $\mathscr{F}\subseteq 2^E$ 为一个集系满足 $(F1)$，$(F2)$，则 $(E,\mathscr{F})$ 为一个广义拟阵。

证 明 因 $(E,\mathscr{F})$ 为一个广义拟阵，由 $(G1')$ 和 $(G2)$ 可知 $(F1)$，$(F2)$ 成立。反之由 $(F1)$ 知 $(G1')$ 成立。而 $(F2)$ 蕴含 $Y\cup x\in\mathscr{F}$，即 $(G2)$ 成立。

定理 1 表明①～③为偏序集拟阵的偏序集性质。定理 2 显示出 $(F1)$ 和 $(F2)$ 作为广义拟阵的偏序集性质的必然性。另外，很容易验证 $(\mathscr{I},\subseteq)$ 适合 $(F1)$，$(F2)$。也就是说，偏序集拟阵是广义拟阵。那么每个广义拟阵是否也必为偏序集拟阵呢？通过下面的定理可给予否定的回答。

定理 3 任一个偏序集拟阵为区间广义拟阵。

证 明 任给一个偏序集拟阵 $(P,\mathscr{I})$。令 P^* 为 P 的对偶偏序集，则由定义 1 和定义 2 可知 $A\subseteq P$ 为 P 的滤子之充要条件是 A 为 P^* 的理想。

任取 $X\in\mathrm{Inc}(P)$，$X\in\mathscr{I}$ 及 $z\in\mathrm{Max}(X)$，则显然 $\{z\}\in\mathrm{Inc}(P)$。

令 $f:P^*\to X$ 定义如下：$f:x\to x(\forall\ x\in X)$，$y\to z(\forall\ y\in P^*\backslash X)$，因此对于 P^* 的每一个理想 A，由 $A=(A\cap X)\cup(A\cap(P^*\backslash X))$ 得

$$f(A)=(A\cap X)\cup z。$$

由引理 2 及上面讨论有 $A\cap X$ 为 P^* 的理想，或等价地说 $A\cap X\in\mathrm{Inc}(P)$。再者 $\{z\}\in\mathrm{Inc}(P)$ 及引理 2 有 $f(A)=(A\cap X)\cup z\in\mathrm{Inc}(P)$ 且 $f(A)\subseteq X$。所以 $\mathscr{F}=\{f(A): A$ 为 P^* 的理想$\}\subseteq 2^X\cap\mathrm{Inc}(P)$。

因 X 为 P^* 的理想且 $f(X)=X$ 有 $X\in\mathscr{F}$，又因对任何 $Y\in\mathrm{Inc}(P)$，$Y\subseteq X$ 有 $f(Y)\in\mathscr{F}$，故得到 $\mathscr{F}=2^X\cap\mathrm{Inc}(P)$。

另一方面，由引理 3 知 $(X,\mathscr{F})$ 为一个反拟阵且 $(\mathscr{F},\subseteq)$ 为一个半模格。再结合上面的结论有 $(2^X\cap\mathrm{Inc}(P),\subseteq)$ 为半模格。

也就是说，在 $(\mathscr{I},\subseteq)$ 中的每个区间 $[\varnothing,X]=2^X\cap\mathrm{Inc}(P)$ 为一个半模格，从而引理 3 导致广义拟阵 $(P,\mathscr{I})$ 为一个区间广义拟阵。

由定理 3 以及文献[2,3]有关区间广义拟阵的理论可知:每个广义拟阵不一定为偏序集拟阵。

我们看到利用偏序集拟阵的偏序集性质可得到偏序集拟阵为广义拟阵。利用这个结论可以解决偏序集拟阵理论中一些尚未解决的问题,如文献[1]中提出的公开问题 5:"拟阵中的贪心算法(greedy algorithm)或许也可以推广到组合格式(combinatiorial scheme)中?"这里我们直接运用广义拟阵中已成熟的贪心算法于偏序集拟阵[2,3],再由文献[1]中关于组合格式是偏序集拟阵的等价定义很容易得到在组合格式中的贪心算法。

由文献[2,3]还可知区间广义拟阵是广义拟阵中的一个大家族,它对于研究广义拟阵有着重要作用,特别是它的闭包算子有许多重要而特殊的性质,而在偏序集拟阵理论中有关闭包算子的内容至今未见定论。所以,由定理 3 和区间广义拟阵闭包算子的性质,建立并完善偏序集拟阵闭包算子已成可能,这对于研究偏序集拟阵理论必有益处,这项工作留于今后完成。

另一方面,利用偏序集拟阵是广义拟阵这一关系,还可以将偏序拟阵的某些性质推广到广义拟阵中,如偏序集拟阵自同构群的理论可推广到议义拟阵[6],这也是今后的一项工作。

当然,利用这里的定理 1～定理 3 还会得到许多令人满意的结果,不再一一赘述。

参考文献:

[1] BARNABEI M, NICOLETTI G, PEZZOLI L. Matroids on partially ordered stes [J]. Adv in Appl Math, 1998, 21: 78-112.

[2] BJöRNER A. ZIEGLER G M. Introduction to greedoids. N. White. Matroid Application [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 284-357.

[3] KORTE B, LOVáSZ L, SCHRADER R. Greedoids [M]. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heideberg, 1991.

[4] BIRKHOFF G. Lattice Theory. 3rd ed [M]. Providence: Amer. Math Soc, 1979.

[5] BARNABEI M, NICOLETTI G, PEZZOLI L. The symmetric exchange property for poset matroids [J]. Adv in Math, 1993, 102: 230-239.

[6] 毛　华,刘三阳. 偏序集拟阵自同构群的特征定理[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2001, 28(2): 261-263.

(编　辑　曾大刚)

The poset properties of poset matroids and some applications

MAO Hua, LIU San-yang

(1. Department of Mathematics, Zhengzhou University Zhengzhou 450052, China; 2. Department of Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The relations between poset matroids and greedoids are obtained through dealing with the poset properties of poset matroids and greedoids respectively, i. e. poset matroids are greedoids, but not vice versa. Using the above relations, That the greedy algorithm was getten for matroid can be generalized to poset matroid and further to combinatorial scheme; and at the same time, some other applications are expounded to studying on the poset matroid theory and the greedoid theory.

Key words: poset matroid; poset property; greedoid; poset