

渗滤分离过程的数值模拟

付 英

(西北大学 数学系, 陕西 西安 710069)

摘要:建立了渗滤分离过程的偏微分方程组,并给出了数值解的迭代公式。通过 Fortran 编程进行数值模拟,对模拟效果进行了分析。

关键词:多孔介质;多相系;渗滤;模拟

中图分类号:O241.8 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274X(2002)02-0123-04

在土壤污染分析和水的净化过程、石油开发、油田地质勘探与油气运移研究中,经常会遇到一些两相体系和多相体系的渗滤分离过程,而渗滤系数是反映渗滤分离过程特性的重要指标之一^[1~6]。本文通过分析渗滤系数,建立了相应的数学模型,给出了这一过程的数值模拟方法。

1 数学模型的建立

1.1 条件假设

在忽略不同物质相系的不同化学特性的前提下,建立模型的先决假设条件有:

1) 进入渗滤状态的多相系是基本均匀的、稳定的、非絮凝的悬浮体;

2) 多孔介质是基本均匀的,其渗透性在各个方向都是一致的,各向同性的。

1.2 模型的建立

1.2.1 建立渗滤动力学方程 考察某个分离过程,作为本体的某一相在多孔介质中发生均匀渗滤,作为负载体的另一相在多孔介质中发生梯度分离,负载体逐步被多孔介质固着、截留,负载体的浓度 C 是时间 t 和多孔介质层层深 l 的函数,即 $C = C(l, t)$,在文献[3]早在1937年就提出说明以上数学假设的方程

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\lambda C, \quad (1)$$

λ 为滤过系数(滤过效率的度量),

若有以下假设: C_0 为悬浮液的人口浓度, λ_0 为 $t = 0$ 时过滤系数初始值。那么在渗滤开始时刻,即 $t = 0$ 时积分式(1)可得

$$C(l, 0) = C_0 e^{-\lambda_0 l}. \quad (2)$$

对于渗滤系数 λ ,它受渗滤速度 v ,多孔介质填充情况,介质的比表面积,介质的初始孔隙率 m ,单位体积介质的截留载质量(比截留量 δ) 等因素的影响,故有 $\lambda = \lambda(\delta, m, v, \dots)$ 。

1969年, Ives 提出了通用公式^[7,8]

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta \delta / m)^x (1 - \delta / m)^y (1 - \delta / \delta_{max})^z. \quad (3)$$

式中: x, y, z 均为实验指数, m 为清洁介质填充粒度有关的几何常数, δ_{max} 为比截留量的最终值或饱和值, λ_0 为介质的初始状态下的滤过系数。

对于通用公式,前人有过各种途径的探求:文献[3]假设

$$\lambda = \lambda_0 (1 - \beta \delta / m); \quad (4)$$

文献[1,2]假设

$$\lambda = \lambda_0 + a\delta - b\delta^2 / (m - \delta); \quad (5)$$

文献[4]假设

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta \delta / m)^x (1 - \delta / m)^y; \quad (6)$$

文献[6]假设

$$\lambda = \lambda_0 (1 - \delta / m); \quad (7)$$

文献[5]假设

$$\lambda = \lambda_0 (1 - \delta / \delta_{max}). \quad (8)$$

比截流量 δ ,对不同深度,不同时间的介质也各不相同,即有 $\delta = \delta(l, t)$,那么在渗滤动力学方程中有 $C = C(l, t)$, $\delta = \delta(l, t)$ 两个函数关系存在。

收稿日期:2000-10-26

基金项目:陕西省教育厅专项基金资助项目(00JK119);西北大学科研基金资助项目(98NW02C)

作者简介:付英(1977-),女,河南柘州人,西北大学助教,主要从事数值计算方面的研究。

1.2.2 建立渗滤连续性方程 对某介质建立质量平衡,某介质断面:〔进入的负载体质量〕-〔流出的负载体质量〕=〔介质层增加的质量〕+〔介质层内悬浮体中负载体质量变化值〕。

设单元介质面积为 S , 介质层厚度为 dl , 渗滤速度为 v , 进入浓度 C , 出去浓度 $C + dC$, 渗滤时间为 dt , 清洁介质孔隙率为 m , 比截留量为 δ , 因此有 $SvCdt - Svdt(C + dC) = Sdl\delta + S(m - \delta)dC$,

化简后为

$$-vdC = dl \frac{\partial \delta}{\partial t} + (m - \delta) \frac{\partial C}{\partial t},$$

对于厚度为 dl 介质层来说, 由于与通过介质层的悬浮体量相比, 介质层内的悬浮体量是很少的, 因此, 最末一项通常可省去。即

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad (9)$$

此即为渗滤连续性方程。

2 模型的求解

把式(1)和式(9)联立起来, 再把初值条件及边值条件加上即构成以下偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = -\lambda C, \\ \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \delta}{\partial t}, \\ C(0, t) = C_0, \quad \delta(l, 0) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(l, t) = \delta_{\max}. \end{cases}$$

对于式(7)的 λ 值, 其解析解见文献[7], 式(4, 8)解法与式(7)类似, 不再赘述。对于那些 λ 为 δ 的非线性函数如式(5, 6), 对应的偏微分方程组, 解析解不易得到, 我们采用以下的数值解法。

2.1 建立迭代方程组

考察平面区域 $G = \{(l, t) | 0 \leq l \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ 上的渗滤问题, 我们用平行直线族 $l_i = i\Delta l, t_j = j\Delta t$ 将 lt 平面分割成矩形网格, 网格点 (l_i, t_j) 简记为 (i, j) , Δl 和 Δt 为常数, 且 $\Delta l = L/k, \Delta t = T/n$, 其中 k, n 均为正整数, 于节点 (l_i, t_j) 即 (i, j) 处微商与差商存在以下近似关系

$$\frac{\delta(i, j+1) - \delta(i, j)}{\Delta t} = \left[\frac{\partial \delta}{\partial t} \right]_{i,j} + o(\Delta t),$$

$$\frac{C(i-1, j) - C(i, j)}{\Delta l} = \left[\frac{\partial C}{\partial x} \right]_{i,j} + o(\Delta l),$$

于是式(1.9)可用下列方程近似代替

$$\begin{cases} \delta(i, j+1) = \Delta tvC(i, j)\lambda[\delta(i, j)] + \delta(i, j), & (10) \\ C(i+1, j) = C(i, j)\{1 - \Delta t\lambda[\delta(i, j)]\}. & (11) \end{cases}$$

其中

$$\lambda[\delta(i, j)] = [\lambda_0(1 + \beta\delta/m)^{\alpha}(1 - \delta/m)^{\beta} \cdot (1 - \delta/\delta_{\max})^{\gamma}]_{i,j},$$

由初边值条件有

$$\delta(l, 0) = 0, C(0, t) = C_0,$$

故 $C(l, 0) = C_0(1 - \Delta t\lambda_0)^l$,

$$\delta(l, t_1) = \Delta tv\lambda_0 C_0(1 - \Delta t\lambda_0)^l. \quad (12)$$

我们可以通过以下迭代过程得出以上的 $\delta(i, j)$ 及 $C(i, j)$ 值:

1) 由 t_j 时刻的 $\delta(i, j), C(i, j)$ 通过式(10)得出 $\delta(i, j+1)$;

2) 由 $\delta(i, j+1)$ 及 $C(i, j+1)$ 通过式(11)可依次得出 $C(i+1, j+1), C(i+2, j+1) \dots$ 由此循环即可得出各网格点处的 C 及 δ 值, 且其截断误差阶为 $o(\Delta l + \Delta t)$ 。

2.2 稳定性及收敛性分析

为了讨论方便, 先引入 Euclid 范数: 用 u^k 表示以第 k 层上网格函数值 $u_j^k (j = 1, 2, \dots, N-1)$ 为分量的向量: $u^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k)^T$, 其 Euclid 范数:

$$\|u^k\| = \sqrt{h \sum_j (u_j^k)^2}, \text{ 其中 } h \text{ 为迭加方向上的步长。}$$

由于滤过系数本身的性质, 可知 $\lambda(\delta)$ 是一个有界量且有 $0 < \lambda(\delta) \leq 1$, 故对式(11)有以下估计 $C(i+1, j) = C(i, j)\{1 - \Delta t\lambda[\delta(i, j)]\} < C(i, j)$, 故

$$\|C^{i+1}\| = \sqrt{\Delta t \sum_j [C(i+1, j)]^2} <$$

$$\sqrt{\Delta t \sum_j [C(i, j)]^2} = \|C^i\|.$$

因此, 式(11)的迭代格式是稳定且收敛的^[9]。

对于式(10)的原微分方程 $\frac{\partial \delta}{\partial t} = vC\lambda$, 在式(11)收敛的条件下可知 $C \leq C_0$, 则下式成立

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = vC\lambda < vC_0 = M (M \text{ 为正常数}),$$

对式(10)可作出以下估计

$$\delta(i, j+1) = \delta(i, j) + \Delta tvC(i, j)\lambda[\delta(i, j)] < \delta(i, j) + \Delta tM,$$

$$\text{故 } \|\delta^{i+1}\| = \sqrt{\Delta t \sum_j [\delta(i, j+1)]^2} <$$

$$\sqrt{\Delta t \sum_j [\delta^2(i, j) + 2\Delta tM\delta(i, j) + M^2\Delta t^2]} <$$

$$\sqrt{\Delta l \sum_j \delta^2(i, j)} + \sqrt{\Delta l \sum_j [2\Delta t M \delta(i, j) + M^2 \Delta t^2]} = \|\delta^i\| + \sqrt{M \Delta l \Delta t \sum_j [2\delta(i, j) + M \Delta t]}$$

由于 $\delta(i, j) < \delta_{\max}$, 故有

$$\|\delta^{i+1}\| < \|\delta^i\| + \sqrt{M J L \Delta t (2\delta_{\max} + M \Delta t)}$$

而对固定的 Δt 来说, $\sqrt{M J L \Delta t (2\delta_{\max} + M \Delta t)}$ 是一个正常数, 所以此格式是稳定的且收敛的^[9]。为了达到给定的精度, 可采用以下迭代过程:

1) 利用式(2)编程使 $C(l, t)$ 达到所给精度, 即让 $C(l, 0) = C_0(1 - \Delta l \lambda_0)^l$ 逼近 $C(l, 0) = e^{-\lambda_0 l}$, 以确定 Δl 的最大值;

2) 利用式(12)编程使 $\delta(l, t)$ 达到所给精度, 即让 $\delta(l, t_1) = \Delta t v \lambda_0 C_0 (1 - \Delta l \lambda_0)^l$ 逼近 $\delta(l, t_1) =$

$\Delta t v \lambda_0 C_0 e^{-\lambda_0 l}$ 以确定 Δt 的最大值;

3) 给定已知参数恰当的值, 利用上两步中 Δl 及 Δt 之值编程实现式(10, 11)中的迭代过程。

3 两个数值例子

3.1 基于式(5)λ的数值模拟

给定参数值如下: $a = 1.0, b = 2.0, v = 0.5, T = 3.0, L = 1.0, m = 0.3, \lambda_0 = 0.5, C_0 = 0.4$ 。用 Fortran77 语言编写 3 个程序, 首先确定 $\Delta l_{\max} = 0.005$ 可使得 $C(l, 0)$ 精度为 0.001, 即在各网格点处 $C(l, 0)$ 与 $C(l, 0) = C_0 e^{-\lambda_0 l}$ 之差的绝对值不超过 0.001, 同样可确定 $\Delta t_{\max} = 0.375$, 可使得 δ 的精度达到 0.000 1。选用 $\Delta l = 0.005, \Delta t = 0.375$ 编程, 使 δ 满足 $0 < \lambda(\delta) \leq 1$, 且利用迭代式(10, 11)即可得一组数据, 选取其中部分作图 1 与理论图 2^[9] 比较。

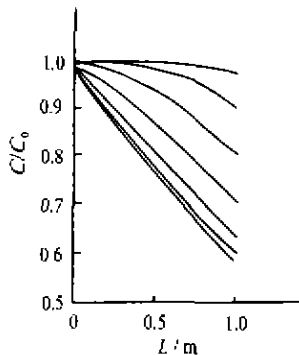


图 1 例 3.1 数据图

Fig. 1 Data figure of example 3.1

从图 1.2 可知, 数值解与理论解很好吻合。

3.2 基于式(6)λ的数值模拟

给定参数值如下: $\lambda_0 = 0.5, \gamma = -1, z = 2, \beta = 0.4, m = 0.3, C_0 = 0.4, v = 0.5, T = 3.0, L = 1.0$ 。首先确定 $\Delta l_{\max} = 0.005$, 使 $C(L, 0)$ 精度为 0.001, 同样确定 $\Delta t_{\max} = 0.375$, 使 δ 的精度达 0.000 1。选用 $\Delta l = 0.005, \Delta t = 0.375$ 编程, 使 δ 满足 $0 < \lambda(\delta) \leq 1$, 利用迭代式(10, 11)即可得一组数据, 选取其中部分数据作图 3。

图 3 与理论图像有一定差距, 主要是式(6)的模型不如式(5)准确所致。

4 数学模型的应用例示

现在利用该模型来研究地层中油气运移的一种最简单的情况。油气运移分为初次运移和二次运移,

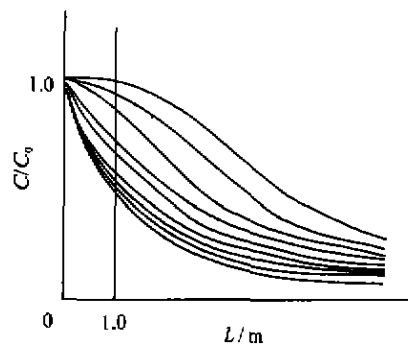


图 2 理论图

Fig. 2 Figure in theory

在二次运移过程中, 当油气遇到圈闭时就发生聚集。聚集有渗滤和排替两种观点。在油气聚集初期, 水可以通过上覆亲水盖层而发生渗滤; 当油气聚集到一定程度之后, 水就很难通过上覆盖层而主要被油气排替到圈闭下方。

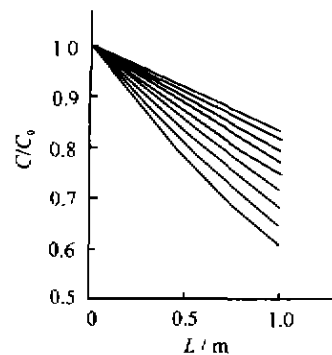


图 3 例 3.2 的数据图

Fig. 3 Data figure of example 3.2

我们所研究的就是二次运移中聚集初期的渗滤作用。虽然圈闭各不相同,但对于某个具体的储集层中的圈闭来说,有确定的形状和材质。选取圈闭法线方向与储集层通道方向一致的圈闭,其渗滤作用可近似地认为是一维的,圈闭初始状态下的滤过系数 λ_0 是一定的、可知的,具体圈闭的初始孔隙率 m 是已知的,油气水多相体的初始浓度 C_0 及它们的渗滤速度 v 也是已知的,故此圈闭可解。

5 结 语

5.1 渗滤模型的数值模拟迭代公式

$$\begin{cases} \delta(i, j+1) = \Delta t v C(i, j) \lambda[\delta(i, j)] - \delta(i, j), \\ C(i+1, j) = C(i, j) \{1 - \Delta t \lambda[\delta(i, j)]\}. \end{cases}$$

其中

$$\lambda(\delta) = \lambda_0 (1 - \delta/m)^x (1 + \beta \delta/m)^y (1 - \delta/\delta_{\max})^z,$$

x, y, z 为给定常数。其初边值条件

$$\delta(t, 0) = 0, C(0, t) = C_0.$$

5.2 两点说明

1) 本数学模型提供了一个研究多相体系在多

孔介质中渗滤的方法。基于 $\lambda(\delta)$ 是否为 δ 的线性函数分成两类求解,线性的采用解析解法,非线性的不容易采用时我们采用数值解法,同时证明迭代格式的稳定性与收敛性,并具体地给出数值例子,模拟出浓度曲线。其中用到的参数均基于具体的多孔介质用实验方法测定的,其模拟准确程度可以通过精度大小来控制。

2) 此数学模型除了文献[8]中对水净化过程中的滤池过滤系统有深刻的指导意义外,对油气运移、土壤的污染分析及地球化学等诸方面都有一定的意义。对于圈闭中的油气运移过程来说,有了此数学模型,我们可以分析某地层中储集层(符合数学模拟条件的圈闭)的渗滤参数,通过探测圈闭上方土壤中水份变化值,就可以估测出油气聚集初期的浓度值,从而对油气勘察起到一定的指导意义。

本文在写作过程中,得到导师窦彩虹副教授的热情帮助,作者谨此致以深深的谢意。

参考文献:

- [1] IVES K J. Rational design of filters[J]. Proc Inst Civ Engrs, 1960, 16: 189-193.
- [2] IVES K J. Simulation of filtration on electronic digital computer[J]. Jour Amer Water Works Assn, 1960, 52: 933-939.
- [3] IWASAKI T. Some notes on sand filtration[J]. Jour Amer Water Works Assn, 1937, 29: 1 591-1 602.
- [4] MACKLE V, DRACKA O, SVES J. Hydrodynamics of the Disposal of Low Level Liquid Radioactive Wastes in Soil[R]. Prague; International Atomic Energy Contract Report NO. 98. Czechoslovak Academy of Science Institute of Hydrodynamics, 1965.
- [5] MAROUDAS A, EISENKLAM P. Clarification of suspensions; A study of particle deposition in granular media[J]. Chem Engr Sci, 1965, 20: 867-873.
- [6] SHEKHTMAN YU M. Filtration of Suspensions of Low Concentration[M]. Moscow; Publishing House of the U. S. S. R. Academy of Sciences, 1961.
- [7] 刘 松. 渗滤的系统分析及其数学模型[J]. 数学物理学报, 1994, 14(4): 361-365.
- [8] [美] 凯纳兹 T M. 水的物理化学处理[M]. 李维音译. 北京: 清华大学出版社, 1982. 226-230.
- [9] 李荣华, 冯果忱. 微分方程数值解法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980.

(编辑 曹大刚)

The numerical analogy of the infiltrating and separating process

FU Ying

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'ao 710069, China)

Abstract: The partial difference equations of the infiltrating and separating process are set up. The iterating formulas of their numerical solutions are given. With three Fortran 77 programs, the numerical simulation and the analysis of its effect are showed.

Key words: porous media; heterogeneous system; infiltration; simulation