

Halo 轨道 Richardson 三阶近似解析解的改进

卢松涛, 赵育善

(北京航空航天大学宇航学院, 北京 100083)

摘 要: Halo 轨道可以用来进行观测太阳活动, 观测月背面, 地月中继通信等航天任务。Richardson 的三阶近似解析解是共线平动点的 Halo 轨道确定的基础。Richardson 解析解是基于一种 Lindstedt-Poincaré 法的消去长期项的方法, 在保留三阶小量方程中, 假设角频率和位移展开到数量级第三级, 并通过依次提取数量级相同的变量构成的方程进行推导的。在 Richardson 的解析解中, 数量级第 1 级和第 2 级方程以及第 3 级在 z 轴方向的方程都消去了长期项, 然而数量级第 3 级在 x 和 y 方向上并没有消去长期项。提出了 Richardson 三阶近似解析解的一种改进解析解, 其数量级第 3 级在 x 和 y 轴上的分量比 Richardson 解析解更精确。并通过 Matlab 的数值计算验证了改进解析解的优势。

关键词: Halo 轨道; Lindstedt-Poincaré 法; 长期项; 限制性三体

中图分类号: V412.4⁺1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2009)03-0863-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.006

0 引言

在拉格朗日点附近的 Halo 轨道, 不受天体遮挡, 太阳辐射对电磁波的干扰较小, 而且轨道保持消耗的燃料少, 可以用来进行观测太阳活动、观测月背面、和地月中继通信等航天任务。

限制性三体问题理论研究, 从宏观上可以分为数值研究和解析研究两个方面。Szebehely^[1] 在 1967 年对限制性三体问题进行了系统总结, 对每个重要部分都进行了解析研究, 解析研究可以分析问题的本质, 并对问题进行定性分析。

Richardson^[2] 的三阶近似解析解是共线平动点的 Halo 轨道确定的基础, 它提供了一个近似的 Halo 轨道初始值。近似解析解可以用来进行编队设计, 更加精确的近似解析解消耗的燃料更少。与完整方程所差的长期项更小。对于微分方程而言, 一般来说, 对于数值解, 随着时间的增加, 一旦误差超过一个范围, 误差增长的速度就会迅速增加。所以对一个问题的解析研究, 特别是周期解的解析研究还是有必要的。

国外方面, Richardson^[3] 在 1980 年利用二体加第三体完整摄动的拉格朗日函数, 并根据 Legendre 多项式建立了按照不同数量级展开的三个共线平动点

附近的运动方程。同年, Richardson^[2] 给出了 Halo 轨道的三阶近似解析解, 可谓 Halo 轨道解析理论经典之作, 该解析表达式至今仍然广泛地被三体问题的研究人员所应用。此篇参考文献中, 给出了解析求解的大概思想和解析解的结果, 但是关键的使用 Lindstedt-Poincaré 法消去长期项的推导过程并没有进行详细论述。同年, Richardson^[4] 给出了 Halo 轨道的三阶近似解析解在 ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer-3, 第一个应用 Halo 轨道的飞行器) 的应用实例, 文中有大量的实际数据, 由于三阶近似解析解过于冗长, 这篇参考文献可以作为编程时检验公式录入正确性的依据。Yamato^[5] 在 2003 年给出使用 Lindstedt-Poincaré 法消去长期项的基本思想, 这正好弥补了参考文献[2] 的不足。Richardson 解析解是基于一种 Lindstedt-Poincaré 法消去长期项的方法, 在保留三阶小量方程中, 通过假设角频率和位移展开到数量级第三级, 并通过依次提取数量级相同的变量构成的方程进行推导的。但是此文只对近似解析解的数量级的第一级和第二级分量进行了详细推导, 而没有对数量级第三级分量的详细推导。Gómez 等人利用 Lindstedt-Poincaré 技巧和 Fourier 展开, 得到了计算 Lissajous 轨道的 35 阶展开式^[6]。参考文献[6] 侧重于 Fourier 展开的技巧, 而本文侧重于对

Lindstedt-Poincaré 基础理论的推导。Richardson 的工作发表在上世纪七八十年,其原始论文确实存在一定的笔误^[6]。

国内方面,因为本文作者能力所限,没有查到关于 Richardson 三阶近似解析解推导过程的论述。

本文的重点主要表现在:(1) 经过本文作者的反复推导和演算,发现复杂的 Richardson 的近似解析解的表达式中,数量级第 1 级和第 2 级方程以及第 3 级在 z 轴方向的方程都消去了长期项,然而数量级第 3 级在 x 和 y 方向的方程并没有消去长期项。(2) 提出针对 Richardson 的近似解析解的改进,其在数量级第 3 级在 x 和 y 轴上的分量比 Richardson 解析解更精确。并通过 Matlab 的数值计算验证了改进解析解的优势。(3) 在国内,较早地对 Richardson 三阶近似解析解推导过程进行了论述。

“Richardson 三阶近似解析解”和“改进解析解”推导的基本思想都是一样的,都是利用 Lindstedt-Poincaré 法,通过对“ ϕ 和 ψ 的关系”,“ ω_1 和 ω_2 的大小”,以及“ A_x 、 A_z 和 Δ 的关系”这些参数关系来消除或减小长期项。两个解析解的“ ϕ 和 ψ 的关系”、“ ω_1 的大小”是一样的,而“ ω_2 的大小”以及“ A_x 、 A_z 和 Δ 的关系”是不一样的。本文给出的方法也可以推导到更高阶(比如第四阶),但主要是与 Richardson 解析解的第三数量级的分量做对比。

本文作者评判近似解析解好坏的标准是,近似解析解和数值解的初始点相同,经历相同的时间后与数值解偏差越小的近似解析解越好。

1 Halo 轨道运动方程

圆型限制性三体问题下,在共线平动点 L_1 和 L_2 附近的 Halo 轨道的保留三阶小量的运动方程的推导过程如图 1 所示。

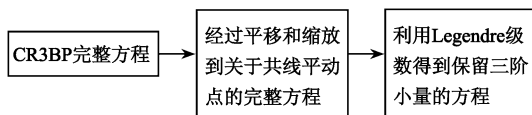


图 1 保留三阶小量的 Halo 轨道运动方程推导过程
Fig.1 The derivation of reserved three order movement equation of Halo orbit

CR3BP 完整方程(参考文献 5, p23)中的变量以 (X, Y, Z) 表示。保留三阶小量方程的变量以 (x, y, z) 表示,具体形式如下(参考文献 5, p62):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2C_2)x &= (3/2)C_3(2x^2 - y^2 - z^2) + 2C_4x(2x^2 - 3y^2 - 3z^2) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (C_2 - 1)y &= -3C_3xy - (3/2)C_4y(4x^2 - y^2 - z^2) \\ \ddot{z} + \nu^2 z &= -3C_3xz - (3/2)C_4z(4x^2 - y^2 - z^2) + \Delta z \end{aligned} \quad (1)$$

其中: x, y, z 是旋转坐标系下,距离平动点的位移在三个坐标轴上分量,经过单位化(两个大质量物体的平均距离),又除以 γ_i 所得的数值(γ_i 是推导拉格朗日点的中间变量^[5],下标 i 对应第 i 个平动点)。

$$C_n = \frac{1}{\gamma_i^3} [(\pm 1)^n \mu + (-1)^n (1 - \mu) \cdot \left(\frac{\gamma_i}{1 \mp \gamma_i}\right)^{n+1}], n = 2, 3, 4$$

上面的符号对应 L_1 , 下面的符号对应 L_2 点。 ν 是保留一阶小量方程(即令式(1)的右式为 0)的 x 和 y 的耦合方程的频率。

$$\Delta = \nu^2 - C_2$$

Δ 是保留一阶小量方程(参考文献 5, p53, 其 z 方向方程与“式(1)令右式为 0 的 z 方向方程”不同)“ x 和 y 的耦合方程的频率平方”与“ z 方向方程频率平方”之差。引入 Δ 是为了使得下文中论述的 Richardson 的数量级第一级的解在 x, y, z 方向上的振荡频率相同。

2 长期项

代数函数和三角函数的乘积项称为混合长期项^[7](mixed-secular terms),简称长期项(secular terms)(也叫永年项),比如: $-(3/8)t\sin(t + \beta)$ 。

包含长期项的表达式,比如:

$$u = a \cos(t + \beta) + \varepsilon a^3 [-(3/8)t\sin(t + \beta) + (1/32)\cos(3t + 3\beta)] \quad (2)$$

其中: ε 与 a 相比是非常小的数。

由于式(2)中包含长期项,称式(2)的展开是非一致有效的或是失效的。不包含长期项的表达式展开是一致有效的。

3 Lindstedt-Poincaré 法

Lindstedt-Poincaré 法是求解摄动方程近似周期解析解的一种方法,也叫延拓(continuation)法。

考虑下面的方程^[8]:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \varepsilon p(u(t), \dot{u}(t)) \\ u(0) = a_0, \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中: $0 < \epsilon < 1$ 是小常数。 ω_0 是常数。 $p(u(t), \dot{u}(t))$ 是关于 $u(t), \dot{u}(t)$ 的函数。

假设 $u(t)$ 和 ω^2 展开为 ϵ 的幂级数形式为

$$\begin{cases} u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots \\ \omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2 + \dots \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3), 等式两端的 ϵ 的同次幂系数应相等, 得到一系列线性常微分方程的初值问题:

$$\begin{aligned} \epsilon^0: & \begin{cases} \ddot{u}_0 + \omega^2 u_0 = 0 \\ u_0(0) = a_0, \dot{u}_0(0) = 0 \end{cases} \\ \epsilon^1: & \begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = p(u_0, \dot{u}_0) + b_1 u_0 \\ u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \\ \epsilon^2: & \begin{cases} \ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 = \frac{\partial p(u_0, \dot{u}_0)}{\partial u} u_1 + \frac{\partial p(u_0, \dot{u}_0)}{\partial \dot{u}} \dot{u}_1 + \\ b_2 u_0 + b_1 u_1 \\ u_2(0) = 0, \dot{u}_2(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

消除长期项, 就是使得激励中包含“非受迫方程频率”的部分为零。从 ϵ^0 的方程中解出 u_0 。把 u_0 代入到 ϵ^1 的方程, 通过设计 b_1 消除长期项, 从而解出 u_1 。把 u_0, u_1 代入 ϵ^2 的方程, 通过设计 b_2 消除长期项, 从而解出 u_2 。消除长期项的目的就是为了使得式(4)的假设展开是一致有效的。 ϵ 的更高次幂可以按照此种思想继续推导下去, 从而得到精度更高的解析解。

参考文献[7]给出很多 Lindstedt-Poincaré 法在物理模型中的应用实例。参考文献[9]进行了 Lindstedt-Poincaré 法的深入数学推导, 主要有以下几个方面: (1) 根据某个 Jacobian 行列式是否为 0 对原方程的近似周期解析解的唯一性进行了判定。(2) 提供了判定近似周期解析解稳定性的判据。(3) 讨论了不同时间尺度, 也就是把应变量和频率展开成不同 ϵ 数量级时解析解的精度问题。(4) 考虑受迫振动影响下(上文的式(1)是非受迫方程)的解析解的求解。

另外, 本文作者认为, 参考文献[9]中的 p143 的公式

$$\eta_1 a_0 + \eta_0 a_1 - (23/32) \eta_0 a_0^3 + (9/4) a_0^2 a_1 + a_0^3/64 = 0$$

$$\epsilon^2: \begin{cases} x''_2 - 2y'_2 - (1 + 2C_2)x_2 = -2\omega_1 x''_1 + 2\omega_1 y'_1 + (3/2)C_3(2x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) \\ y''_2 + 2x'_2 + (C_2 - 1)y_2 = -2\omega_1 y''_1 - 2\omega_1 x'_1 - 3C_3 x_1 y_1 \\ z''_2 + \nu^2 z_2 = -2\omega_1 z''_1 - 3C_3 x_1 z_1 \end{cases} \quad (8)$$

的最后一个加式应是 $(a_0^3/64)3a_0^2$ 。p143 的公式 $2\eta_1 + 6a_1 + 139/8 = 0$ 中的最后一个加式应是 $75/4$ 。

4 Richardson 三阶近似解析解

“Richardson 推导三阶近似解析解所采用的 Lindstedt-Poincaré 法”与上文中介绍的经典的“摄动方程中所采用的 Lindstedt-Poincaré 法”有一个重要区别, Richardson 推导中的 ϵ 只表示数量级, 而经典摄动方程推导中的 ϵ 是一个具体的小数。

为了保证展开的一致有效性, 消去长期项, 引入时间变换

$$\tau = \omega t \quad (5)$$

方程组(1)是对时间 t 求导, t 是 CR3BP 中单位化后的时间变量^[5]。

Richardson 假设方程(1)展开到数量级第三级的近似周期解^[5]有如下形式

$$\begin{aligned} \omega &= 1 + \omega_1 \epsilon + \omega_2 \epsilon^2 + \omega_3 \epsilon^3 \\ x &= x_1 \epsilon + x_2 \epsilon^2 + x_3 \epsilon^3 \\ y &= y_1 \epsilon + y_2 \epsilon^2 + y_3 \epsilon^3 \\ z &= z_1 \epsilon + z_2 \epsilon^2 + z_3 \epsilon^3 \end{aligned} \quad (6)$$

其中的 $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2, 3$ 都是周期函数, 而且随 i 变大, 幅值越小, 频率越大。也就是说 x, y, z 可以展开成三角级数和, 而 ϵ 就表示其中起主要影响的某个三角函数的幅值的数量级。 ω_3 在下文的推导中并未出现。

把式(5)(6)代入式(1), 而且 Richardson 认为 Δ 的数量级是 ϵ^2 (事实上本文作者认为这里也可以进一步研究, 因为实际的数值计算偏差较大, 但这并不是本文的重点, 不展开论述), 根据不同的数量级, 可以得到

$$\epsilon^1: \begin{cases} x''_1 - 2y'_1 - (1 + 2C_2)x_1 = 0 \\ y''_1 + 2x'_1 + (C_2 - 1)y_1 = 0 \\ z''_1 + \nu^2 z_1 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\varepsilon^3: \begin{cases} x''_3 - 2y'_3 - (1 + 2C_2)x_3 = -2\omega_1 x''_2 + 2\omega_1 y'_2 - (2\omega_2 + \omega_1^2)x''_1 + 2\omega_2 y'_1 + \\ (3/2)C_3(4x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2) + C_4x_1(2x_1^2 - 3y_1^2 - 3z_1^2) \\ y''_3 + 2x'_3 + (C_2 - 1)y_3 = -2\omega_1 y''_2 - 2\omega_1 x'_2 - 2\omega_2 x'_1 - (2\omega_2 + \omega_1^2)y''_1 - \\ 3C_3(x_1y_2 + x_2y_1) - (3/2)C_4y_1(4x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) \\ z''_3 + \nu^2 z_3 = -2\omega_1 z''_2 + \Delta z_1 - (2\omega_2 + \omega_1^2)z''_1 - 3C_3(x_1z_2 + x_2z_1) - (3/2)C_4z_1(4x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) \end{cases} \quad (9)$$

式(7)(8)(9)都是对“ τ ”进行求导。

本文作者认为,参考文献[5]中 p63 的式(4.14)和式(4.15)的 z 方向的方程的左式的“ λ^2 ”应是“ ν^2 ”,也就是本文中式(8)和式(9)中的形式。

4.1 第一数量级 ε

由式(7)可得

$$\begin{cases} x_1 = -A_x \cos(\nu\tau + \phi) \\ y_1 = kA_x \sin(\nu\tau + \phi) \\ z_1 = A_z \sin(\nu\tau + \phi) \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$\nu = \sqrt{\frac{2 - C_2 + \sqrt{9C_2^2 - 8C_2}}{2}}$$

$$k = \frac{1 + 2C_2 + \nu^2}{2\nu}$$

4.2 第二数量级 ε^2

把式(10)代入式(8),可得

$$\begin{aligned} x''_2 - 2y'_2 - (1 + 2C_2)x_2 &= 2\omega_1(k\nu - \nu^2)A_x \cos(\nu\tau + \phi) + \\ &(3/2)C_3[(1 - (1/2)k^2)A_x^2 - (1/2)A_z^2] + \\ &(3/2)C_3[(1 + (1/2)k^2)A_x^2 \cos 2(\nu\tau + \phi) + \\ &(1/2)A_z^2 \cos 2(\nu\tau + \phi)] \\ y''_2 + 2x'_2 + (C_2 - 1)y_2 &= 2\omega_1(k\nu^2 - \nu)A_x \sin(\nu\tau + \phi) + \\ &(3/2)C_3 k A_x^2 \sin 2(\nu\tau + \phi) z''_2 + \nu^2 z_2 \\ &= 2\omega_1 \nu^2 A_z \sin(\nu\tau + \phi) + (3/2)C_3 A_x A_z \cdot \\ &[\sin(\phi - \phi) + \sin(2\nu\tau + \phi + \phi)] \end{aligned} \quad (11)$$

为了消去长期项,令 $\omega_1 = 0$,由式(11)可以看出 x 、 y 、 z 方向的长期项都被消去(其实就是使得 x_2 、 y_2 、 z_2 的解中产生长期项的方程右式的部分)。

可得 x_2 、 y_2 、 z_2 的形式:

$$\begin{aligned} x_2 &= A + B \cos 2(\nu\tau + \phi) + C \cos 2(\nu\tau + \phi) \\ y_2 &= D \sin 2(\nu\tau + \phi) + E \sin 2(\nu\tau + \phi) \\ z_2 &= F + G \sin(2\nu\tau + \phi + \psi) \end{aligned} \quad (12)$$

其中:A, B, C, D, E, F, G 的定义见参考文献[5]的 p65。尽管这些表达式与参考文献[2]的 p250 至 p252 的形式不同,但事实上它们经过公式推导是等价的。

本文作者认为参考文献[5]中 p64 的式(4.18)的三个右式中的“ x_1 ”应消去,即如本文中的式(12)所示。参考文献[6]中 p65 的

$$F = 3C_3/(2\nu^2)A_x A_z \cos(\phi - \psi)$$

应是

$$F = 3C_3/(2\nu^2)A_x A_z \sin(\psi - \phi)$$

4.3 第三数量级 ε^3

将式(10)(12)代入式(9),可以推导 x_3 、 y_3 、 z_3 。

Richardson 三阶近似解析解的结果表达式应以参考文献[2]为准。参考文献[2]中的数量级第一级,即式(10)的振荡频率用“ λ ”表示,而参考文献[5]则是用“ ν ”表示,本文采用后者的表示方法。

本文作者认为参考文献[5]中 Richardson 三阶近似解析解的结果表达式中, p151 的原文 $z_1 = A_z \sin(\nu\tau + \phi)$ 应是 $z_1 = A_z \cos(\nu\tau + \phi)$ 。p152 式(B.2)原文 $\Delta = \nu^2 + C_2$ 应是 $\Delta = \nu^2 - C_2$ 。p153 的

$$a_{32} = -(1/d_2)\{\dots\} + (1/d_2)\{\dots\}$$

应是 $a_{32} = -(1/d_2)\{\dots\} - (1/d_2)\{\dots\}$ 。p153 的原文

$$b_{32} = (1/d_2)\{\dots - a_{24}\dots\} + (1/d_2)\{\dots\}$$

应是 $b_{32} = (1/d_2)\{\dots - 2a_{24}\dots\} + (1/d_2)\{\dots\}$ 。

本文作者认为参考文献[5]中的式(4.19)中的第一式

$$\omega_2 = s_1 A_x^2 + s_2 A_z^2$$

减小了本文中式(9)的 x 和 y 方向的长期项;第二式

$$0 = l_1 A_x^2 + l_2 A_z^2 + \Delta$$

消去了本文中式(9)的 z 方向的长期项;第三式

$$\psi = \phi + n\pi/2, \quad n = 1, 3$$

只是为了推导 x_3 、 y_3 、 z_3 简便,与消去长期项没有直接的关系。

Richardson 解析解的形式为^[2]:

$$\begin{aligned}
 x &= a_{21} A_x^2 + a_{22} A_z^2 - A_x \cos \tau_1 + \\
 &\quad (a_{23} A_x^2 - a_{24} A_z^2) \cos 2\tau_1 + \\
 &\quad (a_{31} A_x^3 - a_{32} A_x A_z^2) \cos 3\tau_1 \\
 y &= k A_x \sin \tau_1 + (b_{21} A_x^2 - b_{22} A_z^2) \sin 2\tau_1 + \\
 &\quad (b_{31} A_x^3 - b_{32} A_x A_z^2) \sin 3\tau_1 \quad (13) \\
 z &= \delta_n A_z \cos \tau_1 + \delta_n d_{21} A_x A_z (\cos 2\tau_1 - 3) + \\
 &\quad \delta_n (d_{32} A_x A_z^2 - d_{31} A_z^3) \cos 3\tau_1
 \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \nu\tau + \phi \\
 \delta_n &= 2 - n, \quad n = 1, 3
 \end{aligned}$$

由于 Richardson 三阶近似解析解的结果表达式^[2]异常复杂,在实际编程时极易出现录入错误。参考文献[4]起到了很好的检验 Richardson 三阶近似解析解的结果表达式录入正确性的作用。

根据参考文献[4]的数据,根据参考文献[2]的 $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2, 3$ 的表达式,代入式(9),根据 Matlab 推导可得

x 方向:

$$\begin{aligned}
 &- 0.12530996336332 \cos 3(\nu\tau + \phi) = \\
 &0.03230281761629 \cos(\nu\tau + \phi) - \quad (14) \\
 &0.12530996336332 \cos 3(\nu\tau + \phi)
 \end{aligned}$$

y 方向:

$$\begin{aligned}
 &- 0.10766582619236 \sin 3(\nu\tau + \phi) = \\
 &0.01000313899439 \sin(\nu\tau + \phi) - \quad (15) \\
 &0.10766582619236 \sin 3(\nu\tau + \phi)
 \end{aligned}$$

z 方向:

$$\begin{aligned}
 &- 0.01946437625447 \cos 3(\nu\tau + \phi) = \\
 &3.469446951953614 \times 10^{-18} \cos(\nu\tau + \phi) - \quad (16) \\
 &0.01946437625447 \cos 3(\nu\tau + \phi)
 \end{aligned}$$

可以看出在数量级第 3 级的方程中, x 方向和 y 方向“Richardson 三阶近似解析解”并没有消去长期项,在 z 方向消去了长期项。

本文作者认为对于数量级第三级的 x 方向和 y 方向分量,“Richardson 三阶近似解析解”只是人为地忽略了式(9)中经过公式推导后包含 $\sin(\nu\tau + \phi)$ 、 $\cos(\nu\tau + \phi)$ 的部分,从而得到的近似解析解,而不是通过对 ϕ 和 ψ 关系, ω_2 , 以及 A_x, A_z 和 Δ 的关系的设计消除长期项,这一点在其它参考文献中并没有论述。但应该说“Richardson 三阶近似解析解”还是能够使得 $\sin(\nu\tau + \phi)$ 、 $\cos(\nu\tau + \phi)$ 部分的系数比较

小(相对于 $\sin 3(\nu\tau + \phi)$ 、 $\cos 3(\nu\tau + \phi)$ 的部分)。

5 三阶近似解析解的改进

本文作者提出的改进解析解的基本思想是式(9)的 x, y, z 方向的右式根据 $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$ 可以化为

$$\begin{aligned}
 &f_{x1} \cos(\nu\tau + \phi) + f_{x3} \cos 3(\nu\tau + \phi) \\
 &f_{y1} \sin(\nu\tau + \phi) + f_{y3} \sin 3(\nu\tau + \phi) \\
 &f_{z1} \cos(\nu\tau + \phi) + f_{z3} \cos 3(\nu\tau + \phi)
 \end{aligned}$$

其中: f_{ij} 是 i 方向的 $\cos(j\nu\tau + \phi)$ 的系数表达式。

$i = x, y, z, j = 1, 3$ 。

设计 ω_2 使得 $f_{x1}^2 + f_{y1}^2$ 最小;而 A_x, A_z 和 Δ 的关系则由 $f_{z1} = 0$ 给出; ϕ 和 ψ 关系仍然为 $\psi = \phi + n\pi/2, n = 1, 3$ 。改进解析解的形式与式(13)相同。列出改进解析解与 Richardson 解析解不同的表达式(其余的表达式都相同),

$$\begin{aligned}
 \omega_2 &= s_1 A_x^2 + s_2 A_z^2 \\
 l_1 A_x^2 + l_2 A_z^2 + \Delta &= 0
 \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (s_{11} g_1 - s_{12} g_2) / (2g_1^2 + 2g_2^2) \\
 s_2 &= (s_{21} g_1 - s_{22} g_2) / (2g_1^2 + 2g_2^2) \\
 l_1 &= l_{11} + 2\nu^2 (l_{12} g_1 - l_{13} g_2) / (2g_1^2 + 2g_2^2) \\
 l_2 &= l_{21} + 2\nu^2 (l_{22} g_1 - l_{23} g_2) / (2g_1^2 + 2g_2^2) \\
 s_{11} &= 12 C_3 a_{21} - 3 C_4 k^2 + 3 C_3 k b_{21} + 6 C_4 + 6 C_3 a_{23} \\
 s_{12} &= 3 C_3 k a_{23} - 3 C_4 k + 3 C_3 b_{21} + \\
 &\quad (9/4) C_4 k^3 - 6 C_3 k a_{21} \\
 s_{21} &= 12 C_3 a_{22} - 6 C_3 a_{24} - 15 C_3 d_{21} - 3 C_3 k b_{22} - 9 C_4 \\
 s_{22} &= - 3 C_3 k a_{24} - 3 C_3 b_{22} - 6 C_3 k a_{22} + (3/4) C_4 k \\
 g_1 &= - 2\nu^2 + 2k\nu \\
 g_2 &= - 2\nu + 2k\nu^2 \\
 l_{11} &= - (15/2) C_3 d_{21} - (3/2) C_3 a_{23} - \\
 &\quad (9/2) C_4 + (3/8) C_4 k^2 - 3 C_3 a_{21} \\
 l_{12} &= 12 C_3 a_{21} - 3 C_4 k^2 + 3 C_3 k b_{21} + 6 C_4 + 6 C_3 a_{23} \\
 l_{13} &= 3 C_3 k a_{23} - 3 C_4 k + 3 C_3 b_{21} + \\
 &\quad (9/4) C_4 k^3 - 6 C_3 k a_{21} \\
 l_{21} &= (3/2) C_3 a_{24} - 3 C_3 a_{22} + (9/8) C_4 \\
 l_{22} &= 12 C_3 a_{22} - 6 C_3 a_{24} - 15 C_3 d_{21} - 3 C_3 k b_{22} - 9 C_4 \\
 l_{23} &= - 3 C_3 k a_{24} - 3 C_3 b_{22} - 6 C_3 k a_{22} + (3/4) C_4 k
 \end{aligned}$$

同样采用参考文献[4]的数据,即地日坐标系的 L_1 的 Halo 轨道,并取 $\psi - \phi = \pi/2$,采用同样的 $A_z = 0.07345036218714$ (适用于式(1)的数据,经过单位化,并除以 γ_1 所得的数值),可得改进解析解的关键参数,见表 1。

表 1 改进解析解与 Richardson 解关键参数对照表

Table 1 The parameters comparison of improved and Richardson's analytical solutions

	改进解析解	Richardson 解
$ f_{x1}/f_{x3} $	23.41%	25.78%
$ f_{y1}/f_{y3} $	5.42%	9.29%
$ f_{z1}/f_{z3} $	2.6080×10^{-14}	1.7825×10^{-14}
ω_2	-0.01724986967985	-0.01492536144446
l_1	-18.07855841898872	-15.96559878224752
l_2	1.42029493126341	1.74090054593583
A_x	0.12879220990069	0.13744462745806
f_{x1}	0.02402029808425	0.03230281761629
f_{x3}	-0.10262520126374	-0.12530996336332
f_{y1}	-0.00478426272465	0.01000313899439
f_{y3}	-0.08827480067717	-0.10766582619236
f_{z1}	$4.336808689942018 \times 10^{-18}$	$3.469446951953614 \times 10^{-18}$
f_{z3}	-0.01662866863000	-0.01946437625447
T	3.064277253567148	3.057046392642841

其中: T 表示近似解析解的周期。

可以看出 x 方向和 y 方向的右式中使得 x_3 、 y_3 解中产生长期项的部分减小了,即 f_{x1} 、 f_{y1} 明显减小了(相对于 f_{x3} 和 f_{y3} 的变化)。

改进解析解和 Richardson 解析解在 $k, \nu, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}, d_{21}, d_{31}, d_{32}$ (具体定义见参考文献[2])是一样的,两个解析解 ω_2 不同,从而 ω 也不同。为了比较两个不同的解析解, A_z 是相同的, A_x, A_y 是不同的。两个解析解在数量级第 1 级和第 2 级方程以及第 3 级在 z 轴方向的方程都消去了长期项,然而数量级第 3 级在 x 和 y 方向的方程都没有消去长期项,但是改进解析解误差更小。

取 $\phi = 0, \tau = 0$,可得改进解析解和 Richardson 解析解在 CR3BP 完整方程的坐标系中的初值(需要进行单位转换)($X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$)见表 2。

轨道积分时间取为 Richardson 解析解轨道周期的二分之一,分别把所得的初值带入 CR3BP 完整方程进行数值积分,数值积分采用 Matlab 的 ode45,其

精度设为

options = 'odeset(RelTol', 2.22045e - 014, 'AbsTol', eps)

这也是 Matlab 的最高精度。分别用“Matlab 数值解”减去“近似解析解”可以得到偏差曲线, x 方向的偏差对比见图 2, y 方向的偏差对比见图 3, y 方向的偏差对比见图 4。

表 2 改进解析解与 Richardson 解的初值对照表

Table 2 The initial values comparison of improved and Richardson's analytical solutions

	改进解析解	Richardson 解析解
X	0.988929245254213	0.988873611986430
Y	0	0
Z	$8.057818908659117 \times 10^{-004}$	$8.108698302835658 \times 10^{-004}$
\dot{X}	0	0
\dot{Y}	0.008304001807570	0.008876952366731
\dot{Z}	0	0

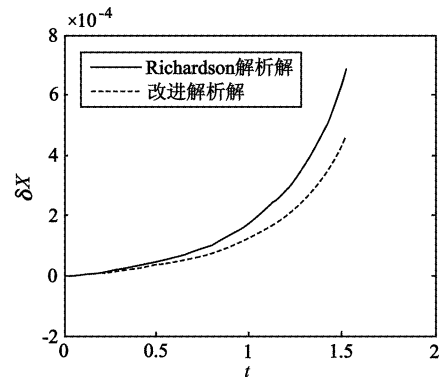


图 2 x 偏差对比

Fig.2 The comparison of deviation in x

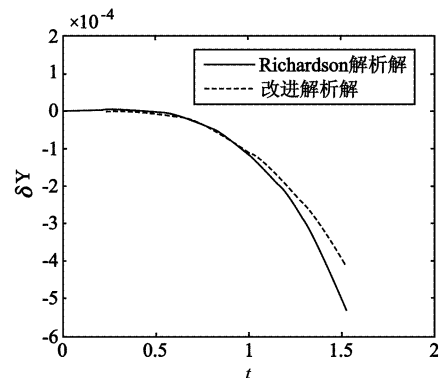
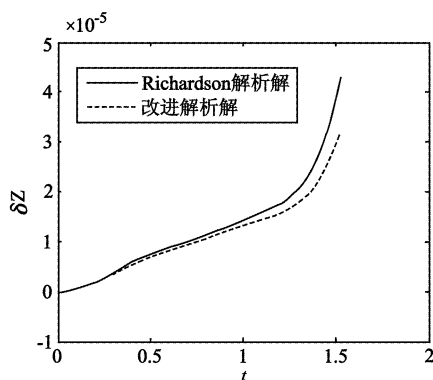


图 3 y 偏差对比

Fig.3 The comparison of deviation in y

从图中可以看出改进解析解比 Richardson 解析解更加精确。本文作者也试验了一些其它的数据,

图4 z 偏差对比Fig.4 The comparison of deviation in z

都有同样的定性结果。

从数值微分修正的角度来说,根据近似解析解所产生的初值,以及轨道的全周期 T (两个解不同),应该有如下的性质:将初值进行数值积分,积分时间为 $T/2$,越准确的近似解析解,其 $Y_{T/2}$ 的值应更接近 0, $(\dot{X}_{T/2}^2 + \dot{Z}_{T/2}^2)^{0.5}$ 更接近于 0。具体数据见表 3。

表 3 改进解析解与 Richardson 解半周期数据对比

Table 3 The half period values comparison of improved and Richardson's analytical solutions

	改进解析解	Richardson 解
$Y_{T/2}$	$-4.177894e-004$	$-5.314993e-004$
$(\dot{X}_{T/2}^2 + \dot{Z}_{T/2}^2)^{0.5}$	0.00138897	0.00210325

6 结束语

本文主要通过公式推导和数值计算发现复杂的 Richardson 解析解的表达式中,数量级第 1 级和第 2 级方程以及第 3 级在 z 轴方向的方程都消去了长

期项,然而数量级第 3 级在 x 和 y 方向的方程并没有消去长期项,只是人为进行忽略。作者设计了改进解析解,并通过 Matlab 数值计算说明,改进解析解相对于 Richardson 解析解,长期项的部分更小。

参考文献:

- [1] Szebehely V. Theory of Orbits, the Restricted Problem of Three Bodies[M]. New York: Academic Press, 1967.
- [2] Richardson L D. A. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points[J]. Celestial Mechanics, 1980, 22: 241 - 253.
- [3] Richardson D L. A note on a lagrangian formulation for motion about the collinear points[J]. Celestial Mechanics, 1980, 22: 231 - 236.
- [4] Richardson D L. Halo orbit formulation for the ISEE-3 mission[J]. Journal of Guidance and Control, 1980, 6(3): 543 - 548.
- [5] Yamato H. Trajectory design methods for restricted problems of three bodies with perturbations[D]. Pennsylvania: Department of Aerospace Engineering, The Pennsylvania State University, 2003.
- [6] Gómez G, àngel J, Simó C, et al. Dynamics and Mission Design near Libration Points [M]. New Jersey, World Scientific, 2001: 23 - 45.
- [7] 宋家啸,译, A. H. 奈弗 著. 摄动方法导引[M]. 上海:上海翻译出版社, 1990: 121 - 137. [Song J X. translated, Nayfeh A. H. writed. Introduction to Perturbation Techniques[M]. Shanghai: Shanghai Translation Press, 1990: 121 - 137(in Chinese).]
- [8] 胡海岩. 机械振动基础[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2005: 161 - 163.
- [9] Verhulst F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems [M]. Beijing: World Publishing Corporation, 1993: 130 - 144.

作者简介:卢松涛(1981-),男,北京航空航天大学飞行器设计专业博士研究生,研究方向为飞行器轨道设计方法。

通信地址:北京航空航天大学宇航学院研究生信箱(100191)

电话:13552375230

E-mail:fox6857@sa.buaa.edu.cn

The Improvement of Richardson's Three Order Approximate Analytical Solution of Halo Orbit

LU Song-tao, ZHAO Yu-shan

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Halo orbit could be used to process astronautics assignments, such as observation to the movement of the sun and the back of the moon, the communication between the earth and moon, and so on. Richardson's third order approximate analytical solution was the foundation of the determination of Halo orbit. Richardson's solution was based on Lindstedt-Poincaré method, and the method was used to remove the secular terms. In the reserved third order little magnitude equations, the solutions of angle frequency and the displacement were supposed to expand into third order. The same magnitude would be collected in same equation. In Richardson's solutions, the secular terms were removed in the first and second magnitude equations and the z direction of the third magnitude equation, but not removed in the x and y direction of the third magnitude equation. The improved analytical solution better than Richardson's third order approximate analytical solution is brought forward, and components in the x and y direction of the third order of the improved analytical solution are more exact than Richardson's analytical solution. The advantage of the improved analytical solution is verified by Matlab numerical simulation.

Key words: Halo orbit; Lindstedt-Poincaré method; Secular terms; Restricted three-body problem