

改进响应面法及其近似性能研究

潘 雷, 谷良贤, 阎代维

(西北工业大学航天学院, 西安 710072)

摘 要: 如何提高近似函数的近似性能是多学科设计优化问题的一个重要研究方向, 采用多项式响应面法和径向基函数结合的方法有效提高了函数近似性能。多项式响应面法 (Response Surface Method, RSM) 在对采样点构建插值曲面时, 对结果中的残差并未进行处理, 从而导致了部分信息的丢失。径向基函数 (Radial Basis Function, RBF) 插值有效地利用了样本点的信息, 但却无法提供待拟合曲面的梯度信息。改进响应面法 (Improved Response Surface Method, IRSM) 通过对 RSM 方法的残差进行 RBF 插值处理, 可以在增加有限计算量的条件下提高近似精度, 并可提供待拟合曲面的近似梯度信息。测试结果表明, IRSM 方法的近似精度随着样本点的增多而显著提高。在样本点较少的时候, IRSM 方法的近似性能明显高于 RSM 方法的近似性能, 但可能低于 RBF 方法的近似性能; 而当样本点较多时, IRSM 方法的近似性能显著高于 RSM 方法和 RBF 方法。

关键词: 响应面; 径向基函数; 残差; 近似模型

中图分类号: V421.1; O241.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-1328 (2009) 02-0806-05

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.070

0 引言

在多学科设计优化中, 寻求高效的近似模型对多学科优化的计算效率有很大的影响。目前常用的近似模型有 RSM、VCM、RBF、Taylor、Kriging 以及神经网络近似模型等, 其中 RSM 模型是最经典的近似模型, 在多学科设计优化中应用最多, 对它的研究也最多^[1]。

响应面法 (Response Surface Method, RSM) 种类很多, 有基于计算机实验设计与分析的 DACE 响应面, 基于样条函数的 Spline 响应面和基于神经网络的 NN 响应面等。其中以基于多项式的 PB 响应面最为常用^[2,3]。响应面法的主要缺点是随着样本点数目的增大, 不能有效地提高近似精度。而多学科设计优化通常要求近似曲面的近似精度要随着样本容量的增多而提高。张哲等通过利用插值点替代极限状态提高了响应面在极限状态的近似精度^[4], 吕震庙等通过迭代线性插值的方法提高了响应面极限状态的近似精度^[5], 阎明等通过改进样本点选取策略来提高响应面近似精度^[6]。但这些研究都未能提高大样本时的响应面近似精度。本文提出一种改

进响应面法, 采用 RBF 方法对响应面法的残差进行处理, 有效地提高了响应面的近似精度, 并且随着样本容量增大, 其近似性能迅速提高。

1 多项式 RSM 近似技术

多项式 RSM 主要是利用最小二乘拟合的方法, 通过对试验数据的分析, 找出相关因素与响应量之间的函数关系, 并用这种函数替代原来的函数关系。多项式响应面法采用的函数通常为高阶多项式, 根据多项式阶数的不同形成了不同的响应面, 其中最常用的是二阶响应面, 也称二次响应面。

若将二次响应面模型的响应量用 η 表示, 则具有 n 个变量的二次响应面的函数模型可表述为:

$$\eta = \bar{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \bar{\beta}_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

式中: $X \in R^n$, $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_i, \bar{\beta}_{ii}, \bar{\beta}_{ij}$ 为待定系数。当给定 m 组已知数据和对应的响应时, 根据式 (1) 可构造出由 m 个线性方程组成的方程组, 通常利用最小二乘法进行求解方程组中各待定系数。对给定点 x , 将其代入式 (1) 即可计算 x 点的 RSM 近似结果。

对于具有 n 个变量的 m 阶响应面, 其待定系数

个数为 $\sum_{i=1}^m C_n^i + 1$ 个,随着响应面阶数的增加,所需要待定系数的数目急剧增加,而计算精度却没有显著提高。因此,通常响应面的阶数不超过4阶。

响应面法的主要缺点是随着样本容量的增大未能有效地提高近似精度,且随着设计变量维数和响应面阶数的提高,其计算量增加很快。

2 RBF 近似技术

1985年, Powell构造了多变量插值的径向基函数(Radial Basis Function, RBF),由于其良好的近似性能,径向基函数快速得到了广泛应用^[7,8]。

径向基函数RBF是一种径向对称函数,可描述为 $\phi(\|x - \mu\|)$, 其中 $\|\cdot\|$ 为欧几里德范数, μ 为RBF的中心。通常可将插值函数写成

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (2)$$

将 m 个已知点代入,可得出有 m 个含未知数 λ_i 的方程。当矩阵 $A_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ 非奇异时,可求出未知数 λ_i , 从而构造出径向基函数。对于待插值点 x , 将其代入公式(2)即可求得RBF插值的近似结果。

通常将 $\phi(\cdot)$ 称为径向基函数的核。根据采用的核的不同,可以有不同种类的径向基函数。其中较常用的为 Gauss 型核,表示为:

$$\phi(x) = e^{-\frac{\|x - \mu\|^2}{\sigma^2}} \quad (3)$$

其中,参数 σ 称为宽度参数。

RBF方法的主要缺点在于其不能够较好地提供插值曲面的近似连续拟合曲面,通过RBF插值曲面也难以获得待拟合曲面的近似导数信息。

3 改进响应面(Improved RSM, IRSM)方法

响应面法不能够随着样本容量增大而有效提高近似精度的原因在于其不对计算结果的残差进行处理,从而使得在进行曲面拟合时,丢失了许多有用信息。

在RSM方法中,设生成的近似曲面为 f_1 , 这个近似曲面在采样点处和已知结果 f 存在一定的差别,通常记为残差 R 。为了利用残差信息 R , IRSM方法利用RBF对RSM的插值残差 R 进行处理,提取出残差中的信息加入到近似结果中去,有效地避

免了RSM和RBF方法的缺点。IRSM方法的计算流程如下:

(1) 对初始采样点生成RSM近似曲面,设生成的近似曲面为 f_1 ;

(2) 计算近似曲面 f_1 和采样点之间的残差,设为 R ;

(3) 利用残差矩阵 R 计算RBF插值函数 f_2 ;

(4) 利用RSM近似曲面 f_1 和RBF近似曲面 f_2 , 分别按照公式(1)和公式(2)计算RSM插值结果 y_1 和残差的RBF插值结果 y_2 ;

(5) 将结果 y_1 和 y_2 进行叠加,作为最终的插值结果返回。

这样,利用IRSM方法在 n 维向量 x 点的插值结果 $f_a(x)$ 可表示如下:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ &= \bar{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_{ii} x_i^2 + \\ &\quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \bar{\beta}_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(\|x - x_{(i)}\|) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 x_i 为向量 x 的第 i 维分量, $x_{(i)}$ 为第 i 个向量。未知系数 β 和 λ 分别根据已知的 m 组数据和RSM残差按照公式(1)和公式(2)计算得到。

其计算流程图如下图。

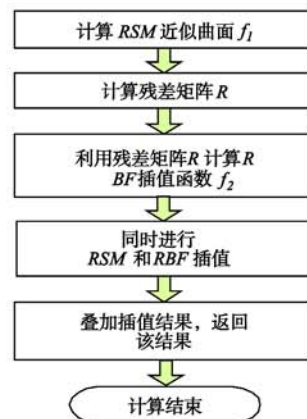


图1 IRSM 计算流程

Fig. 1 Flowchart of IRSM

图中,用RSM曲面在目标曲面点的梯度信息替代IRSM的计算结果,而当样本容量增大时,IRSM方法通过对较多的残差进行处理,可以更好地近似插值点,从而达到更高精度的近似。因而,IRSM方法充分利用了残差信息,并且避免了RBF方法不能够提供插值曲面的近似连续拟合问题。随着样本点

的增多,由于 IRSM 方法对 RSM 插值的残差进行 RBF 插值,这使得计算量有所增大,不过,这部分额外的计算量在大多数时候并不明显。

4 RSM、RBF 和 IRSM 性能比较

下面用一个解析函数对 IRSM 方法的近似能力进行测试,并分别与 RBF 插值、RSM 插值结果进行了比较。考虑一维连续函数

$$f(x) = (e^{2\sqrt[3]{x+15-0.15x^2+0.3x+7}} - 0.1x^2 - 0.2x + 10)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

其中 $-10 < x < 10$ 。

下面分别采用 RSM、RBF 和 IRSM 方法对 $f(x)$ 进行该区间内的拟合。RSM 方法采用四阶多项式响应面,RBF 方法的核为 Gauss 型核,宽度 σ 为整个区间宽度 20。

对于各种方法的计算结果,采用方差形式进行近似精度衡量,即

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i' - x_i)^2 \quad (6)$$

其中 x_i 为第 i 个点的解析计算结果,即实际值。 x_i' 为第 i 个点的近似计算结果。很明显, s^2 不仅反映了整体对目标点的偏离程度,也反映了个体对目标点的偏离情况,因而它可以有效地反映各种方法的近似结果。

在区间 $[-10, 10]$ 内随机选取 n 个样本点,然后利用这 n 个样本点分别在 30 个点处用上三种方法进行近似计算。图 2 - 图 4 分别为样本容量 n 为 10、30 和 200 情况下,三种方法在 30 个插值点处的拟合结果。

比较图 2 - 4 可以看出,在样本点较少时,RSM 方法的近似结果为一个连续曲面,但其距离解析解有较大的误差。RBF 的结果是一个不很光滑的曲面,图 2 中 $[-2, 0]$ 和 $[0, 2]$ 区间内的插值结果明显不光滑。而当样本容量增大之后(图 3、4),RSM 方法的近似结果距离解析解仍有较大误差,而 RBF 和 IRSM 方法的近似结果都很接近解析解。不论样本容量的多少,IRSM 方法均能够有效地提高近似精度,且与解析解很好吻合。

下面对三种方法的计算误差进行量化分析。分别在样本容量为 10、30 和 200 的情况下对 30 个点进行拟合。每拟合一次之后重新选取样本点。表 1 - 3 给出了这三种方法计算 10 次后的误差方差。

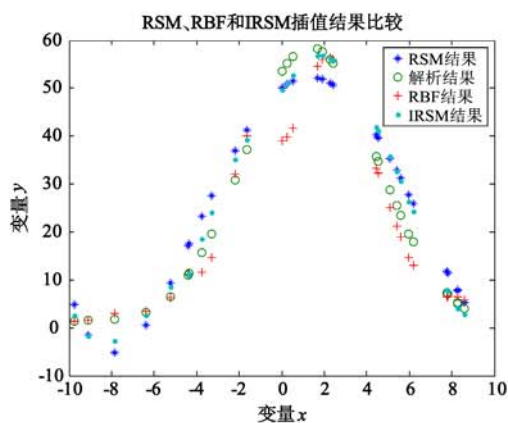


图 2 10 个样本点下三种方法拟合结果

Fig. 2 Approximation result of three methods with 10 sample points

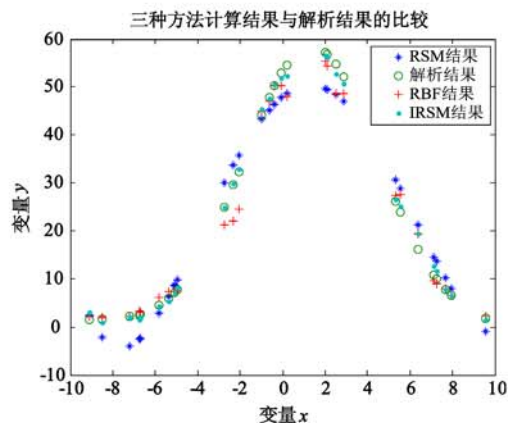


图 3 30 个样本点下各方法拟合结果

Fig. 3 Approximation result of three methods with 30 sample points

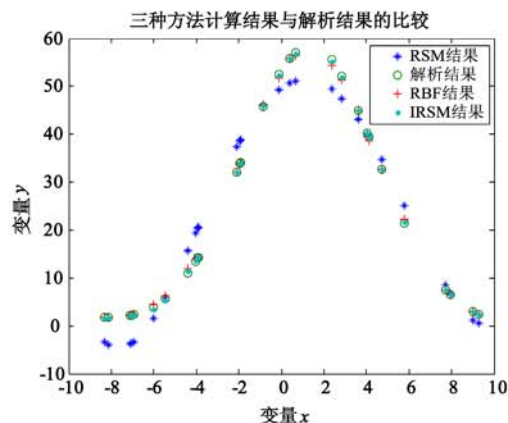


图 4 200 个样本点下各方法拟合结果

Fig. 4 Approximation result of three methods with 200 sample points

表1 样本容量为10时的计算方差
Table 1 Variance of different methods
with 10 sample points

次数	1	2	3	4	5
IRSM	15.45	9.04	115.8	22.5	86.2
RBF	25.41	49.97	94.7	29.9	65.6
RSM	24.20	24.73	116.2	30.6	94.3
次数	6	7	8	9	10
IRSM	51.3	9.72	107.0	20.2	19.56
RBF	86.4	16.9	202.6	20.5	45.43
RSM	63.2	24.0	112.1	36.9	32.37

表2 样本容量为30时的计算方差
Table 2 Variance of different methods
with 30 sample points

次数	1	2	3	4	5
IRSM	7.05	1.917	2.24	6.49	1.91
RBF	52.95	5.294	7.07	6.62	8.64
RSM	24.04	22.58	23.37	29.11	21.23
次数	6	7	8	9	10
IRSM	1.26	2.81	1.93	2.57	2.03
RBF	9.44	2.55	12.15	7.11	12.68
RSM	18.77	23.14	25.98	25.52	33.88

表3 样本容量为200时的计算方差
Table 3 Variance of different methods
with 200 sample points

次数	1	2	3	4	5
IRSM	0.087	0.066	0.088	0.035	0.066
RBF	0.549	0.509	0.636	0.279	0.230
RSM	18.30	18.13	16.25	19.55	20.27
次数	6	7	8	9	10
IRSM	0.125	0.055	0.066	0.072	0.128
RBF	0.334	0.366	0.293	0.198	0.159
RSM	21.38	25.61	25.80	14.64	21.08

由表1可以看出,IRSM方法的计算精度明显高于RSM方法,在大部分插值点,结果方差只有RSM的一半。且在大部分情况下,其近似结果也优于RBF的近似结果。

比较表1和表2可以看出,当样本容量增大时,IRSM方法的计算精度要显著高于RSM方法。与RBF方法相比,大部分情况下,IRSM的精度都要高于RBF,只有个别点IRSM的近似结果比RBF方法差一些,但两者相差不超过1/10。

由表3可以发现,随着样本容量的增大,IRSM方法的近似精度显著提高,且其精度远远高于RSM方法。这是由于IRSM是在RSM方法基础上进行残差处理,因而IRSM保留了RSM方法区间内连续

的特性,同时又继承了RBF方法逐步提高精度的特性。

5 结论

RSM方法在进行曲面近似时存在一定的残差,且未对这种残差进行处理,从而丢失了部分信息。IRSM方法通过对RSM的残差进行RBF插值处理,有效地提高了计算精度。结果表明:

(1)在样本点较少的情况下,IRSM方法的计算精度高于RSM方法,但个别点低于RBF方法;在样本点较多的情况下,IRSM方法的计算精度明显高于RSM和RBF方法。

(2)IRSM方法保留了RSM对目标曲面近似的连续性,且可随着样本点的增多显著提高其近似性能,这就使得其更适用于多学科设计优化过程。

高效精确的近似技术一直是多学科设计优化中的一个重要研究方向,本文提出的IRSM近似技术在增加有限计算量的情况下可以较大幅度地提高模型的近似精度,在多学科优化中具有很好的应用前景。

参考文献:

- [1] Sellar R S. Response Surface Based Concurrent Subspace Optimization for Multidisciplinary System Design, AIAA - 96 - 0714, 1996.
- [2] 余大胜,康海贵.响应面法计算结构可靠度的回顾[J].工业建筑,2006,36:238-242. [YU Da-sheng, KANG Hai-gui. The review of the reliability analysis by response surface method [J]. Industrial Construction, 2006, 36:238-242.]
- [3] 窦毅芳,刘飞,张为华.响应面建模方法的比较分析[J].工程设计学报,2007,14(5):359-363. [DOU Yi-fang, LIU Fei, ZHANG Wei-hua, Research on comparative analysis of response surface methods [J]. Journal of Engineering Design, 2007, 14(5):359-363.]
- [4] 张哲,李生勇,滕启杰.一种改进的结构可靠度分析中响应面法[J].大连理工大学学报,2007,47(1):57-60. [ZHANG Zhe, LI Sheng-yong, TENG Qi-jie. An improved response surface method for structural reliability analysis [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2007, 47(1):57-60.]
- [5] 吕震宙,赵洁,岳珠峰.机械可靠性分析的高精度响应面法[J].应用数学和力学,2007,28(1):17-24. [LV Zhen-zhou, ZHAO Jie, YUE Zhu-feng. Advanced response surface method for mechanical reliability analysis [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(1):17-24.]
- [6] 闰明,孙志礼,杨强.基于响应面方法的可靠性灵敏度分析方法[J].机械工程学报,2007,43(10):67-71. [YAN Ming, SUN Zhi-li, YANG Qiang. Analysis method of reliability sensitivity based on response surface method [J]. Chinese Journal of Me-

- chanical Engineering, 2007, 43 (10): 67–71.]
- [7] Powell M D. Radial Basis Function for Multivariable interpolation: A Review, Algorithms for Approximation (Y, C, Mason, eds), Clarendon Press, 1987.
- [8] Schaback R. Error estimation and condition numbers for radial basis function interpolation. Preprint, 1993.

作者简介:潘雷(1982-),男,博士生,研究方向为多学科优化、飞行器总体。

通信地址:陕西省西安市西比工业大学 249# (710072)

电话: (029) 88492783

E-mail: dongeast007@ qq. com

Research on Improved Response Surface Method and Its Performance

PAN Lei, GU Liang-xian, YAN Dai-wei

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: When constructing an approximation surface with Response Surface Method (RSM), the RSM does not deal with the residual error, which causes loss of information. Although the Radial Basis Function (RBF) method fully takes the advantage of sample points, it cannot give a smooth curve to approximate the target curve. The Improved RSM (IRSM), by interpolating the residual error of RSM with RBF, improves the approximating accuracy while adding a little computation cost. The result proves that the approximating accuracy of IRSM improves apparently while the number of sample points grows. If the number of sample points is small, the approximating accuracy of IRSM is higher than the RSM, but will probably lower than the RBF. If the number of sample points is large, the approximating accuracy of IRSM is much higher than the RSM and RBF.

Key words: Response surface method (RSM); Radial basis function (RBF); Residual error; Approximation model

(上接第 805 页)

Bluetooth Asynchronous Connection-Less Packet Selection Based on Maximization of Expected Throughput Efficiency of ARO

LI Xiang^{1,2}, LI Man-tian¹, SUN Li-ning¹, ZHAO Yun-long²

(1. Robot Research Institute, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. College of Computer Science and Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Under different physical channel conditions, different Bluetooth packet for transmission has different performance. So, it is needed to choose suitable packet for data transfer according to link state. Based on the acknowledgement history of the most recently transmitted packets, an optimal algorithm was proposed to choose the suitable packet for transmission through maximizing the expected throughput efficiency of ARQ protocol on Bluetooth ACL data communication link. Simulation results show that this method works very well even with a short observation history. Furthermore, it is proper to take DM packets as data transmission in a high error rate environment to guarantee the reliable data transfer; otherwise it is suitable to take DH packets as data transmission to improve the data transfer rate.

Key words: Bluetooth; ARQ; ACL; Throughput efficiency