

# 关于非开普勒轨道的讨论

王 萍<sup>1</sup>, 袁建平<sup>1</sup>, 范剑峰<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学航天学院, 西安 710072; 2. 中国空间技术研究院, 北京 100086)

**摘 要:** 讨论了非开普勒轨道问题的形成、提出及其应用。首先引述了开普勒三大定律, 说明了其作为天文观测结果的创造性概括能够描述行星的运动学原理; 然后提出了非开普勒轨道问题, 它是人造卫星可控性的必然结果。叙述了典型的非开普勒轨道问题, 包括航天器在单心引力场中的运动(即二体问题)和多心引力场中的运动(即多体问题), 作为特例研究了螺旋变轨爬升轨道和悬挂轨道。最后提出了非开普勒轨道的应用, 包括动能拦截问题, 多星编队、组网与重构问题, 系统整体组合优化机动问题等。

**关键词:** 轨道动力学; 开普勒轨道; 非开普勒轨道

**中图分类号:** V412.4<sup>+</sup>1

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-1328(2009)01-0037-05

**DOI:** 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.007

## 0 开普勒: 从观测到描述

丹麦天文学家第谷几十年如一日观测了大量的自然星体数据, 去世前他把全部天文观测资料给了他的青年助手开普勒。凭借这些大量的宝贵资料和他的数学天赋, 特别是开普勒善于从大量繁杂的数据中总结规律, 开普勒发现火星绕太阳运动的轨迹并不是哥白尼说的圆轨道, 而是椭圆轨道。他发现了著名的行星运动三大定律:

第一定律: 行星绕太阳运动时, 其运行轨道为椭圆, 太阳位于椭圆的一个焦点上。这条轨道常称为开普勒椭圆。

第二定律: 行星绕太阳运动时, 在相同的时间间隔内, 行星和太阳的连线扫过的面积相同。

第三定律: 行星绕太阳运行周期的平方与它们的轨道椭圆半长轴的立方成正比例。

在开普勒、伽利略之后, 牛顿也研究了星体的运动, 但他更注重星体所受的力和其产生的结果。牛顿对开普勒行星运动定律做了如下改进:

(1) 天体的运动轨迹除椭圆外, 还包括圆、抛物线和双曲线, 即圆锥曲线。

(2) 开普勒第三定律中, 行星绕太阳运行周期规律中还应包含天体的质量。

开普勒轨道是指圆锥曲线中的椭圆曲线轨道,

逃逸抛物线和双曲线轨道均不属于开普勒轨道。可见, 非开普勒轨道问题在牛顿时期就已发现了。开普勒由于其天文学家的出身和依赖于观测的研究方法, 他对于卫星轨道理论的卓越贡献仅限于运动学的范畴; 即从观测到描述, 没有涉及力的作用。

## 1 非开普勒: 从控制到运动

人造卫星出现以后虽然沿用了开普勒轨道理论和描述方法, 但是卫星不可避免的人为控制已经从根本上打破了开普勒轨道理论的前提条件。只是人造卫星的初期人的控制只限于个别弧段的变轨, 不考虑摄动力时绝大部分的卫星轨道仍然遵循开普勒轨道定律。非开普勒轨道可以分为单心引力场和多心引力场来讨论。

### 1.1 航天器在单心引力场中的运动(二体问题)

#### 1.1.1 部分非开普勒椭圆轨道运动

所谓部分非开普勒椭圆轨道运动, 是指航天器在有限推力作用期间的运动轨迹, 一旦有限推力作用停止, 航天器的运动轨迹又成为开普勒椭圆轨道。通常航天器有限推力作用时间与整个运行时间相比只是很小一部分, 所以一般的航天器大部分时间都是在天体引力场约束下, 沿开普勒椭圆轨道运动, 只有很小一部分时间运行在非开普勒椭圆轨道。

多圈强迫绕飞是部分非开普勒椭圆轨道运动的

一个案例,它是指航天器在多次冲量推力作用下,在其一个运行轨道周期内,对另一个航天器作多次绕飞。自然绕飞的周期很长,通常都在 1.5 小时以上。但在有些场合,例如执行空间营救或空间检测任务时,需要在短时间内,围绕被营救或被检测的航天器作多圈绕飞,这种快速绕飞称为强迫绕飞。对航天器实施多冲量推力,可以在其绕地球飞行的一个周期内,对另一个航天器作多次绕飞。

美国 2003 年元月发射的 XSS-10 卫星已进行了周期为 10 分钟的强迫绕飞演示验证试验。

1.1.2 全部非开普勒椭圆轨道运动

所谓全部非开普勒椭圆轨道运动,是指航天器在连续有限推力作用下的运动轨迹。在这种情况下,航天器除受到天体引力约束外,还始终受人为控制力的作用,因此其运动轨迹始终与开普勒椭圆轨道不同。

现举二个例子说明。

• 螺旋变轨爬升

航天器在连续小推力作用下的机动变轨爬升轨迹,为螺旋曲线,不是开普勒椭圆,也不是圆锥曲线。

假定小推力沿航天器运动切向作用,则航天器的运动方程是:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a - \frac{\mu}{r^2} \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= n\theta \left( \frac{v}{r} - \frac{\mu}{r^2 v} \right) \cos \theta \\ \frac{dr}{dt} &= rv \sin \theta \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\mu}{r} \cos \theta \end{aligned} \tag{1}$$

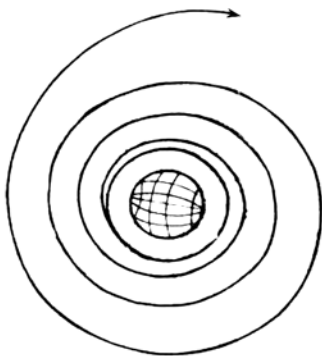


图 1 小推力螺旋轨道

Fig.1 Screw orbit with small thrust

式中:  $v$  表示航天器速度,  $a$  为航天器推力加速度,

$\theta$  为航天器速度倾角,  $r$  为航天器轨道半径。这时航天器绕地球沿螺旋轨道爬升。实际上还有一个比切向推力效果更好的推力方向角。

1963 年出版的“星际航行概论”中,钱学森先生得出了小推力沿航天器运动切向作用时的运动方程的近似解析解。

• 悬挂轨道

一个航天器在另一个航天器下边的不远处,两者以相同的角速度围绕地球运行。下面航天器的运行轨迹,我们称之为悬挂轨道。

在悬挂轨道情况下,上面的航天器沿开普勒椭圆轨道(或圆轨道)运行,下面航天器的运行轨迹看上去其外观仍然是椭圆(或圆),但是由于它围绕地球飞行一圈的时间,与上面的航天器相同,所以,悬挂在下面的航天器的运行规律不符合开普勒第三定律,它不是开普勒椭圆轨道。

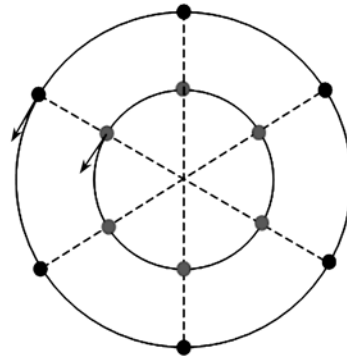


图 2 悬挂轨道示意图

Fig.2 The sketch for hanging orbit

当目标卫星在圆轨道上运行时,对航天器实施连续径向控制力,可以实现悬挂轨道。悬挂卫星与目标卫星距离较近时,控制力  $F$  与悬挂卫星的质量  $m$  和悬挂距离  $d$  成正比,与目标卫星的地心距  $r$  的三次方成反比。

悬挂卫星在原点位于目标卫星上,  $y$  沿矢径方向,  $x$  指向运动反方向的右手坐标系中的运动方程是:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= f_x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - 3n^2 y &= f_y \\ \ddot{z} + n^2 z &= f_z \end{aligned} \tag{2}$$

式中:  $f_x, f_y, f_z$  为控制力  $F$  在  $x, y, z$  三个方向上产生的加速度,  $n$  为航天器轨道旋转角速度。当  $f$  为常数时(2)式有解:

$$\begin{aligned}
 x &= \left( x_0 + \frac{2y_0}{n} + \frac{4f_x}{n^2} \right) + \\
 & 2 \left( \frac{2x_0}{n} - 3y_0 - \frac{f_y}{n^2} \right) \sin nt - \\
 & 2 \left( \frac{y_0}{n} + \frac{2f_x}{n^2} \right) \cos nt - \\
 & \left( 3x_0 - 6ny_0 - \frac{2f_y}{n} \right) t - \frac{3f_x}{2} t^2 \\
 y &= \left( 4y_0 - \frac{2x_0}{n} + \frac{f_y}{n^2} \right) + \\
 & \left( \frac{y_0}{n} + \frac{2f_x}{n^2} \right) \sin nt - \\
 & \left( 3y_0 - \frac{2x_0}{n} + \frac{f_y}{n^2} \right) \cos nt - \\
 & \frac{2f_x t}{n} \\
 z &= \frac{z_0}{n} \sin nt + \left( z_0 - \frac{f_z}{n^2} \right) \cos nt + \frac{f_z}{n^2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

设,  $x_0 = 0, y_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = h, f_x = 0$

则由方程(3)可得:

$$\begin{aligned}
 y &= \left( 4h + \frac{f_y}{n^2} \right) - \left( 3h + \frac{f_y}{n^2} \right) \cos nt \\
 y &= h + \left( 3h + \frac{f_y}{n^2} \right) - \left( 3h + \frac{f_y}{n^2} \right) \cos nt \\
 &= h + \left( 3h + \frac{f_y}{n^2} \right) (1 - \cos nt) \\
 &= h + \left( 3h + \frac{f_y}{n^2} \right) 2 \sin \frac{nt}{2}
 \end{aligned} \tag{4}$$

对于悬挂轨道希望  $y \equiv h$ , 则有:

$$\begin{aligned}
 3h + \frac{f_y}{n^2} &= 0 \\
 f_y &= -3n^2 h
 \end{aligned} \tag{5}$$

因为:

$$n^2 = \frac{\mu}{r_A^3}, \text{ 故最后得:}$$

$$f_y = -\frac{3\mu h}{r_A^3} \tag{6}$$

## 1.2 航天器在多心引力场中的运动(多体问题)

### 1.2.1 多体问题

航天器在多心引力场中的运动轨迹十分复杂,均为非开普勒轨道。通常将多体问题简化为二体问题,即以一个天体引力为主,将其它天体的引力作为摄动力处理,以获得近似解。多体问题是个很古老的问题,在牛顿发现运动三大定律和万有引力以后,

天文学家很容易写出行星运动的方程,包括多体运动方程组。但是,多体运动方程组很复杂,许多人研究它,得不到通解。

美国天文学家和数学家 Hill 提出了简化的三体问题。他作了三个简化(圆形限制性三体问题),但仍然没有得到通解。

随后法国大数学家庞加莱参与了三体问题研究。他证明 Hill 的简化方程是无法得到解析解的。他找不到定量解以后,转向定性的方法,研究了常微分方程定性理论,是后来动力系统理论的重要基础。

1912年,庞加莱去世那一年,美国数学家伯克霍夫开始以三体问题为靶子,扩展了动力系统的研究。

到目前为止三体问题还没有完全的解析解,只得到总系统的动量守恒、动量矩守恒和能量守恒等十个积分。

### 1.2.2 限制性三体问题

航天器在两个天体的引力场中运动,航天器的质量与两个天体的质量相比非常小,这种运动就属限制性三体问题。如果两个天体的轨道为圆,称圆型限制性三体问题,如果两个天体的轨道为双曲线或抛物线,称双曲线型限制性三体问题或抛物线型限制性三体问题,如果两个天体的轨道为椭圆,称椭圆型限制性三体问题。在与两个天体固连的坐标系中,圆型限制性三体问题的运动方程有:

$$\begin{aligned}
 x - 2\omega y &= \frac{\partial U}{\partial x} \\
 y + 2\omega x &= \frac{\partial U}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\partial U}{\partial z} \\
 U &= \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

从上面的运动方程很容易得到雅可比积分,由雅可比积分又容易得到零速度面。上面方程的常数解称平动点,圆型限制性三体问题共有 5 个平动点。将航天器放在平动点上,坐标就不会变化。

限制性三体问题的结果在现代航天活动中已经得到部分应用。国外利用地月系统中的平动点特性,将航天器放在平动点附近的晕轨道上,用以观测太阳。

对限制性三体问题和多体问题的深入研究,可为未来航天活动开辟出新的途径。多体问题很难得

到解析解,或可采用一些图解法、近似解析法、半解析法、数值计算归纳法和物理实验模拟法,得到前所未有的结果。近代计算机技术的飞速发展,利用电子计算机对三体问题做了大量数值计算研究,诞生了混沌、分岔和分形等理论。

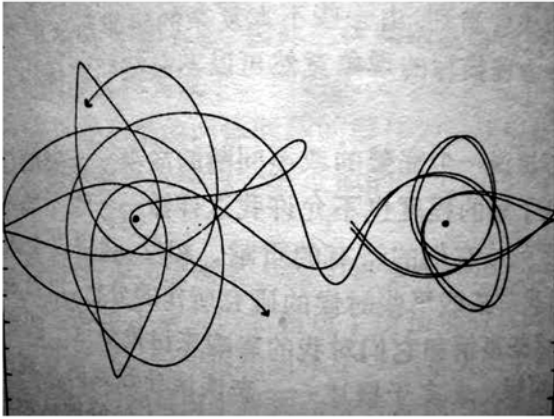


图 3 洛伦兹三体问题计算图例

Fig.3 The sketch of Lorentz 3-body problem

上图是混沌理论创始人 E.N. 洛伦兹用数值法计算限制性三体问题的一个算例。图中表明一颗卫星在两个行星的中心引力场中的运动轨迹。图中两个黑点代表两颗行星,左边行星的质量是右边行星的质量的 4 倍。

卫星首先绕右边小行星数圈,然后绕左边大行星数圈。由上图可以看出,初始位置非常接近,初始速度完全相同开始运行的卫星,在绕右边小行星时两条轨道保持相近,但在绕左边大行星时,两条轨道完全分开了,继续往后计算两条轨道,卫星在两个行星之间来回穿梭,最后会像围绕同一个行星一样围绕不同行星旋转,显现出混沌状态。

## 2 非开普勒轨道:从提出到应用

非开普勒轨道问题的提出是古老的,但应用却是现今的。重提非开普勒轨道问题具有很大的机遇和挑战:它将作为解决大量空间操作和空间攻防应用的基础理论和上游技术受到关注。

半个世纪以来,一般民用卫星轨道的设计与计算应用二体问题和摄动理论即可解决。但是随着航天活动的扩展,特别是空间操作,对航天器的轨道运动提出了许多特殊要求。

动力学与现代控制论相结合,动力学方程加入控制律,就能设计出多种特异的非开普勒轨道,满足

未来各种航天活动的需求,并在航天轨道理论方面有所突破和创新。

未来各种航天活动的需求包括:

- 空间攻击和防御
  - 空间快速营救
  - 多星编队、组网与重构
- 平台与武器组合优化机动

### 2.1 动能拦截问题

拦截问题分为共面和非共面两种。拦截优化的基本问题有三个:

- 时间最短
- 出发速度最小
- 速度增量最小(能量最省)

拦截优化基本问题的讨论又可分为两类:

(1) 定点拦截(两点固定边值寻优问题)

对于给定的出发点 A 和拦截点 B,从圆轨道出发时,  $V$  只随  $a$  变化。

$$\Delta V = f(a) \quad (9)$$

对应最小  $\Delta V$  的  $a$  即为最小速度增量拦截轨道的半长轴。

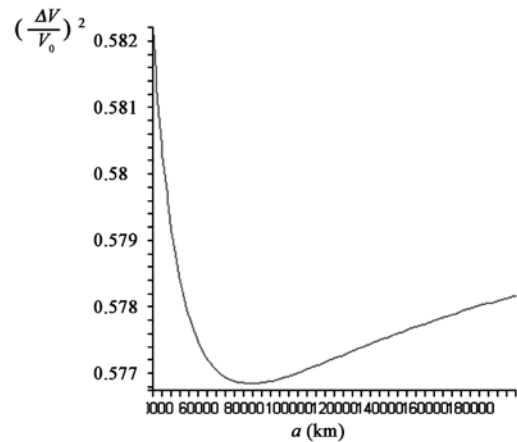


图 4 速度增量随拦截轨道半长轴的变化(相位 60°)

Fig.4 The major semiaxis variety with velocity increment of interception orbit (phase 60°)

(2) 动点拦截(两点滑动边值寻优问题)

在定点拦截问题中,  $\Delta V = f(a)$ , 即出发速度增量仅仅是  $a$  的函数,对于给定的基本三角形  $\Delta$ , 在某个  $a$  值时,  $\Delta v$  最小。

在动点拦截问题中,基本三角形  $\Delta$  中的  $c$  值可变,因而有:

$$\Delta V = f(\Delta, a) \quad (10)$$

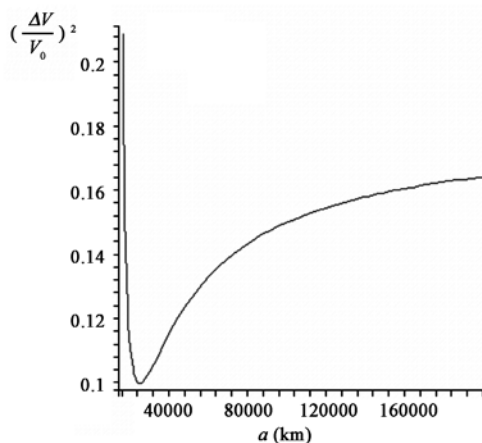


图 5 速度增量随拦截轨道半长轴的变化(相位  $120^\circ$ )

Fig. 5 The major semiaxis variety with velocity increment of interception orbit (phase  $120^\circ$ )

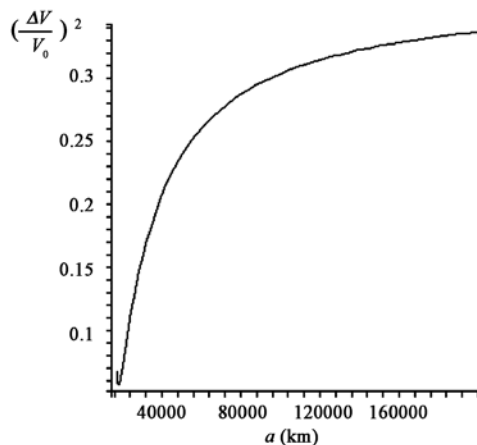


图 6 速度增量随拦截轨道半长轴的变化(相位  $160^\circ$ )

Fig. 6 The major semiaxis variety with velocity increment of interception orbit (phase  $160^\circ$ )

出发速度增量是  $a$  和  $c$  的函数,  $\Delta v$  是双变量的函数。可以用各种优化算法求解。

## 2.2 多星编队、组网与重构问题

(1) 星座与编队飞行对地面目标的观测与攻击。

(2) 星座与编队飞行对空间目标的观测与攻击(多星集群防御与攻击单星和星座)。

- 星座与编队飞行轨道设计
- 星座与编队飞行轨道机动重构

## 2.3 系统整体组合优化机动问题

(1) 空间轨道运动的动力与约束

- 自然天体运动
- 天体系统引力约束
- 航天器运动

天体系统引力 + 控制力约束

- 空间作战飞行器运动

天体系统引力 + 控制力 + 有效载荷动力约束

(2) 三种力的优化组合应用

有效载荷自身的动力(动能武器推力, 污染物抛散力, 营救绳、飞爪抛撒力)与天体引力和航天器控制力, 三种力的优化组合运用。

空间机动平台停泊轨道的选择、营救服务轨道选择与最后有效载荷的种类及其动力有关。也就是说, 最终的服务器反过来对空间机动平台停泊轨道和营救服务轨道选择有密切关联。

## 3 结语

本文讨论了非开普勒轨道动力学问题及其应用。引入了开普勒三大定律, 描述了非开普勒问题, 在二体问题中提出了部分非开普勒椭圆轨道运动和全非开普勒椭圆轨道运动的概念并列举了实例。最后提出了非开普勒轨道的应用, 包括动能拦截问题, 多星编队、组网与重构问题, 系统整体组合优化机动问题。

## 参考文献:

- [1] Kaplan M.H. Modern Spacecraft Dynamics and Control, John Wiley, 1976.
- [2] Archie E. Roy. Orbital Motion, Adam Hilger Ltd., 1978.
- [3] Cornelisse J.W. Rocket Propulsion and Spacecraft Dynamics, Pitman, 1979.
- [4] 钱学森. 星际航行概论[M]. 北京: 科学出版社, 1963. [Tsiens H S. Introduction to Space Flight[M]. Beijing: Science Press, 1963.]
- [5] 杨嘉焯, 范剑峰. 航天器轨道动力学与控制(上册)[M]. 北京: 宇航出版社, 1995. [YANG Jia-chi, FAN Jian-feng. Dynamics and Control of Space Vehicle Orbit[M]. Beijing: Space Press, 1995.]
- [6] 肖业伦. 航天器飞行动力学原理[M]. 北京: 宇航出版社, 1995. [XIAO Ye-lun. Dynamical Theory of Space Vehicle Flight[M]. Beijing: Space Press, 1995.]
- [7] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京航空航天大学出版社, 1998. [ZHANG Ren-wei. Dynamics and Control for Satellite Orbit and Attitude[M]. Beijing: BUAA Press, 1988.]

作者简介: 王萍(1963-), 女, 在职博士研究生, 副研究员, 研究方向为航天器飞行动力学与控制。

通讯地址: 西安西北工业大学 251 信箱(710072)

电话: (029)88493685, (010)66357119

E-mail: sat863@cetin.net.cn

(下转第 66 页)