

混合法求解考虑路径约束的持续推力快速机动轨道

刘滔, 赵育善

(北京航空航天大学宇航学院, 北京 100191)

摘要: 近地空间航天器快速机动问题中一个必须考虑的现实约束就是机动轨迹不得低于大气层高度, 为此给出考虑路径约束的持续推力快速机动问题的处理方法。通过在性能泛函中加入关于路径约束的惩罚项, 使原本不再适用的最优控制理论仍然适用, 进而可通过混合法完成问题的求解; 同时保证了新问题的最优解为原问题的满足路径约束的近似最优解。最后通过数值仿真的结果验证了方法的有效性。

关键词: 两点边值问题; 路径约束; 持续推力; 快速机动

中图分类号: V412 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2009)04-1365-06

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.010

0 引言

更高效的推进技术带了持续推力机动方式, 同时也使得采用持续推力进行最优机动成为了当前的研究热点^[1-5]。对于某些特定空间机动任务, 如空间营救、在轨规避等, 要求航天器进行远程快速机动, 这样就有必要研究如何采用持续推力进行轨道快速机动。一般人们通过最优控制理论将问题转化为两点边值问题进行求解。然而, 这样所得的最优轨迹往往会穿越地球。因此必须在原问题上对最优轨迹进行约束, 即对原问题施加路径约束。

目前, 国内外求解满足路径约束的最优解时, 主要采用直接法^[6-8], 但直接法引入了大量节点以提高解的精度, 从而导致计算量剧增。相比于直接法, 以最优控制理论为基础的间接法和混合法拥有计算量较小, 精度更高等优点^[4], 但在引入路径约束后, 这种处理方法中最优轨迹所对应的哈密顿函数和协态变量在轨迹触及路径约束时, 将可能不再连续^[6], 使得最优控制理论不再适用。

本文首先简单介绍了无路径约束情况下经典混合法如何处理持续推力最优机动问题, 并指出了由于忽略路径约束带来的问题。然后构造了一个包含路径约束的新性能泛函, 进而得到了可通过混合法

求解的新两点边值问题, 使得新问题的最优解为原带约束问题的近似最优解。最后, 通过仿真验证了方法的有效性。

1 经典建模方法及其问题

1.1 经典建模方法

考察中心引力场中的时间最优机动问题。假设整个过程中航天器的可用最大推力给定, 推力方向任意, 忽略一切摄动力影响。引入改进春分点根数 (Modified Equinoctial Elements) 描述的航天器动力学模型为:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} \frac{T}{m} + \mathbf{D} \quad (1)$$

式中 \mathbf{X} 为改进春分点轨道根数 $[p, f, g, h, k, L]^T$, 其与经典轨道根数间的关系如式(2):

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2) \\ f &= e \cos(\omega + \omega) \\ g &= e \sin(\omega + \omega) \\ h &= \tan(i/2) \cos\omega \\ k &= \tan(i/2) \sin\omega \\ L &= \omega + \omega + \theta \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)中 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_r, \alpha_t, \alpha_n]^T$ 为单位矢量; m 为航天器质量, 其随时间的变化满足(3); T 为推力大小; I_{sp} 为

发动机比冲; g_0 为海平面处地球重力加速度; \mathbf{X} 和 \mathbf{D} 为 6×1 的矩阵, \mathbf{B} 为 6×3 矩阵, \mathbf{B} 中各元素的值参见文献[2]。机动过程中,航天器质量率变化满足式(3):

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{I_{sp} g_0} \quad (3)$$

采用持续推力最优机动问题的经典处理方法^[1-4],设性能泛函为:

$$J = \int_0^{t_f} 1 dt \rightarrow \min \quad (4)$$

式中 t_f 为机动过程的终端时刻。则系统的状态方程为(1)和(3),系统的哈密顿函数为:

$$H = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} \frac{T}{m} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D} - \lambda_m \frac{T}{I_{sp} g_0} \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 λ_m 为协态变量,其变化满足协态方程,即式(6):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}} \boldsymbol{\alpha}^* \frac{T}{m} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{X}} \\ \dot{\lambda}_m &= -\frac{\partial H}{\partial m} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}^* \frac{T}{m^2} = -\|\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}\| \frac{T}{m^2} \end{aligned} \quad (6)$$

根据庞特利亚金极小值原理可得,最优推力方向矢量 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 和最优推力大小 T 分别为:

$$\boldsymbol{\alpha}^* = -\frac{(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B})^T}{\|\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}\|}, S = \frac{\|\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}\|}{m} + \frac{\lambda_m}{I_{sp} g_0}$$

$$\begin{cases} T = 0 & S < 0 \\ T = T_{\max} & S > 0 \\ 0 < T < T_{\max} & S = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中 T_{\max} 为可用最大推力值。

考虑到航天器初始轨道根数全部给定,目标轨道根数根据机动任务确定,因此系统需分别满足的初始条件和终端约束分别如式(8):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0 \\ m(t_0) &= m_0 \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}_f, t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

根据最优控制原理,最优解在终端时刻还需满足横截条件,如式(9):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t_f) &= \mathbf{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t_f} \\ H(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

此时,根据横截条件可知 λ_m 在终端时刻为 0, 又根据协态方程(6)可知 λ_m 在整个过程中关于时间的导数始终小于 0。因此,最优轨迹所对应的 λ_m

在整个过程中始终大于等于零,且只在 t_f 时取等号。进而可知 S 在整个过程中大于等于零,且仅在 t_f 时可能取等号。这就说明对于时间最优机动问题最优轨迹对应的推力大小一直为 T_{\max} ,这也就说明了在无路径约束情况下,变推力的时间最优轨迹推力大小始终等于最大值 T_{\max} ,同时也是常推力情况下的燃料最省轨迹。

此时方程(1),(3)和(6)-(8)就构成了两点边值问题。可通过横截条件(9)使整个问题封闭,进而可通过求解常微分方程组来完成问题的求解。而一般混合法通过舍弃横截条件以初始的协态变量为待优化变量,以性能泛函为目标函数,终端约束作为罚函数将问题转化为非线性规划问题进行求解^[4-5]。

1.2 存在的问题

由于上述方法忽略了机动过程中轨道高度不能低于零的约束,实际上从现实的角度出发,为了避免大气阻力带来的额外燃料消耗,航天器在机动过程中的轨道高度应当始终高于大气层的高度。这种忽略往往造成了按上述方法所求得的时间最优轨迹高度过低甚至穿越地球。例如表 1 所示算例,航天器初始推重比为 0.05,发动机比冲为 2000s。

表 1 航天器机动前后的轨道根数

经典轨道根数	初值	终端约束
a (km)	6578.137	7500.000
e	0	0
i ($^\circ$)	10.0	10.0
Ω ($^\circ$)	0	0
ω ($^\circ$)	0	160
θ ($^\circ$)	0	70

采用长度单位 $1DU = 6578.137\text{km}$, 时间单位 $1TU = \sqrt{6578.137^3/\mu} \text{ s}$, 夹角为弧度对算例进行归一化处理。然后根据上述方法进行求解,经计算得到其最优轨迹以及轨道高度曲线分别如图 1 和图 2 所示。

其最优交会时间为 4.1675TU,最优解对应的初始协态变量值为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3.84543 & \lambda_2 &= -3.22105 \\ \lambda_3 &= -3.63107 & \lambda_4 &= -7.10780e-7 \\ \lambda_5 &= 0.26707 & \lambda_6 &= -1.53806 \\ \lambda_m &= 5.78382 \end{aligned}$$

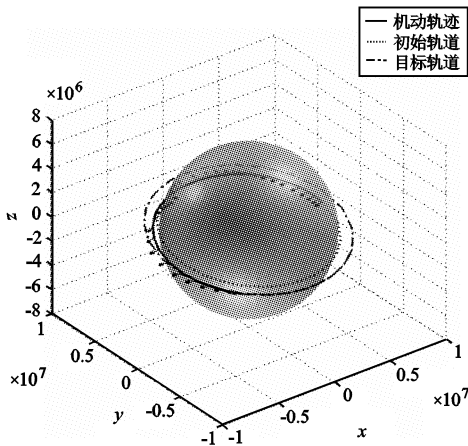


图 1 无路径约束时最优机动轨迹
Fig. 1 Optimal trajectory and thrust direction without path constraint

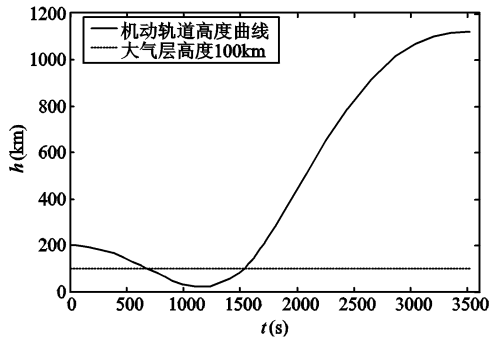


图 2 无路径约束时最优轨迹的高度曲线
Fig. 2 Altitude history of optimal solution without path constraint

从图中不难看出,如分析所言航天器为了追求机动的快速性,在机动过程中钻入了稠密大气层。因此,在研究航天器在近地空间的轨道快速机动策略时,模型中必须加入路径约束。

2 路径约束的影响及其处理

假设航天器轨迹允许的最低高度为 h_{\min} ,即要求整个机动过程中航天器的高度 h 或其距地心的距离 r 必须满足:

$$h(t) \geq h_{\min} \text{ or } r(t) \geq R_e + h_{\min} \quad (10)$$

由于路径约束的存在,满足约束的最优轨迹上可能包含路径约束上的若干点(段),而当最优轨迹进入(离开)这些点(段)时,其协态变量将不连续^[6]。这就使得哈密顿函数不再连续,协态方程不再成立,进而使得原来的方法不再有效。此时通常的做法是将整个轨迹分成若干段(其间协态变量连

续),进而转成多点边值问题进行求解^[6-8]。但这将使原本十分复杂的问题变得更加复杂。

为了避免这种复杂的处理,构造关于 $h(t)$ 或 $r(t)$ 的函数 F 如式(11)

$$F(h(t)) = e^{K(R_e + h_{\min} - r(t))} = e^{K(h_{\min} - h(t))} \quad (11)$$

式中 K 为大于零的常数。显然函数 F 关于高度 h 是连续的,且其任意阶导数也连续。图 3 中给出了 F 在 $\Delta h (h_{\min} - h)$ 在零附近的变化情况。

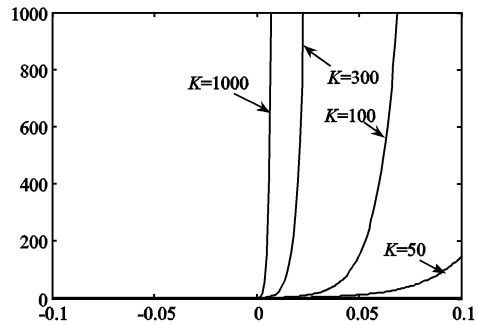


图 3 F 随 Δh 的变化情况
Fig. 3 F as a function of Δh

从图 3 可以看出当航天器高度 h 大于 h_{\min} 时, F 的值近似为零; h 小于 h_{\min} 时, F 的值将剧烈增加。且随着 K 的取值的增加,当 h 大于 h_{\min} 时, F 的值就越接近为零;而当 h 小于 h_{\min} 时, F 的值将越大。

因此若将 F 引入新的性能泛函式(12),这就使得当所得轨迹满足路径约束时,引入项的值将对原性能泛函影响很小;而当所得轨迹不满足路径约束时,引入项将远大于原性能泛函。这就相当于在性能泛函中引入了一个连续的类似于罚函数的惩罚项,以保证所得最优解既满足路径约束又为原问题的近似最优。

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 + e^{K(h_{\min} - h(t))} dt \quad (12)$$

显然 K 的值越大,所得的解将越接近真实最优解,理论上 K 取无穷大时,新问题的最优解等于原问题的最优解。处理后新的哈密顿函数和协态方程分别如式(13)和式(14),而最优推力大小和方向将不发生改变。

$$H_1 = H_0 + F \quad (13)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\frac{\partial F}{\partial X} - \lambda^T \frac{\partial B}{\partial X} \alpha^* \frac{T}{m} - \lambda^T \frac{\partial D}{\partial X} \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda^T B \alpha^* \frac{T}{m^2} = -\|\lambda^T B\| \frac{T}{m^2}$$

至此完成了路径约束的处理。通过(1),(3),

(14)和(7) - (8)即可采用混合法将问题转化为非线性规划问题,进而求得满足路径约束的时间最优机动问题的近似最优解。

需要说明的是,尽管先将问题按 1.1 中所述方法转化为非线性规划问题,然后将路径约束以罚函数形式加入目标函数中进行寻优,也可以得到满足路径约束的解,但该方法(简称方法 2)得到的不是整个解集的最优,而只是其某一个子集的最优。为了说明这一点,定义集合 P 、 Q , P 为所有满足初始条件、终端约束以及路径约束的轨迹簇; Q 是满足上述条件下,按照无路径约束模型的最优推力方式进行机动的轨迹簇。显然, P 是所有解的集合, Q 是 P 的子集,原问题的最优应当 P 中的最优。方法 2 所得的最优,只是 Q 中的最优。下面说明, Q 的最优不一定就是 P 的最优。根据文献[6],在某些情况下,将直接法所得的满足路径约束的最优轨迹代入 1.1 节的模型后,得到的协态变量将在轨迹触及路径约束时不连续,造成最优轨迹不满足协态方程(6),进而也不满足 1.1 节所示的无约束条件下的最优推力方式。显然,此时最优轨迹不属于 Q , Q 的最优不是 P 的最优。因此,方法 2 忽略了协态变量不连续的情况,所得的只是按特定推力方式机动的最优。而本节所提出的方法则将惩罚项引入到性能泛函中,构造了一个全新的两点边值问题,进而通过最优控制理论,从理论上保证了所得的最优解必定为整个满足约束条件的解空间中的近似最优。

3 算例分析

首先通过一个简单算例来验证上述方法的正确性。考虑文献[8]中所给时间最优算例,整个算例无量纲化,航天器在无重力二维空间中从 $[-1.7, 0]$ 机动到 $[1.7, 0]$ 处;机动前后的速度均为零;航天器在机动过程中离原点距离不得小于 1;航天器可用最大加速度始终为 1,方向可任意改变。以位置和速度为状态量,采用上节所述方法可求得 K 取不同值时的最短机动时间如表 2 所示。

图 4 给出了当 K 取 400 时的最优轨迹,此时初始协态变量值为 $[-2.1355, -5.6336, -4.7438, -6.9391]$ 。显然所得的最优轨迹与文献[8]中的结果基本相符。与文献[8]不同的是,由于惩罚项的引入使所得的最优轨迹并没有在 $[0, 1]$ 处触及路径约束,而是从路径约束上方(点 $[0, 1.007]$ 处)掠过。

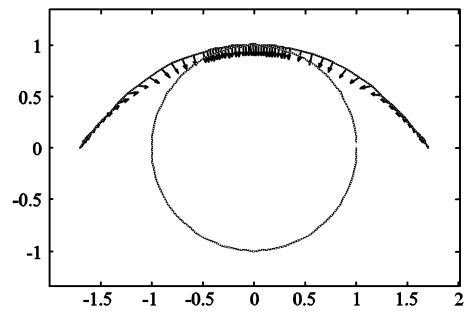


图 4 K 取 400 时的时间最优轨迹

Fig. 4 Optimal trajectory and thrust direction, $K = 400$

表 2 最优机动时间随 K 的变化

Table 2 Transfer time t_f varies with K

K	t_f
100	4.43701774837746
150	4.43635552056147
200	4.43499808863443
250	4.43386975306832
300	4.43281591336937
350	4.43242189803155
400	4.43201947753436

仔细研究不同 K 值对应的最优轨迹距原点的距离 r 随着时间 t 的变化情况(如图 5, 上图为整个时间历程, 下图为局部放大)可以发现随着 K 的增加所得的最优轨迹将逐步逼近文献[8]中的最优解。同时由表 2 也可看出随着 K 的增加, 最优机动时间逐步减小并不断逼近文献[8]给出的最优机动时间 4.422168。这与第 2 节的分析相符。需要说明的是尽管 K 的取值越大, 所得最优解越接近原问题的最优解, 但 K 越大寻优过程中的数值积分也越困难(为保证积分精度不得不缩短步长), 因此 K 的选取应根据情况确定。该算例证明本文所给算法确实能得到原问题的近似最优解。

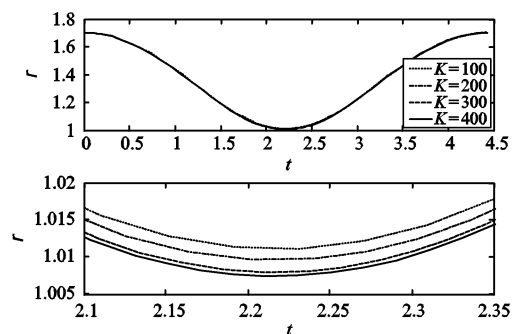


图 5 K 取不同值时 r 随时间的变化曲线

Fig. 5 In cases of different K , r varies with t

回到表 1 所示算例,设整个过程中航天器的轨道高度不得低于 100km。采用第 2 节描述的算法经计算所得的时间最优轨迹如图 6 所示,其中 K 取 3000。整个机动过程持续时间为 4.1757TU (3528.6s)。对应的初始时刻各协态变量和终端时刻轨道根数的值如表 3 所示。

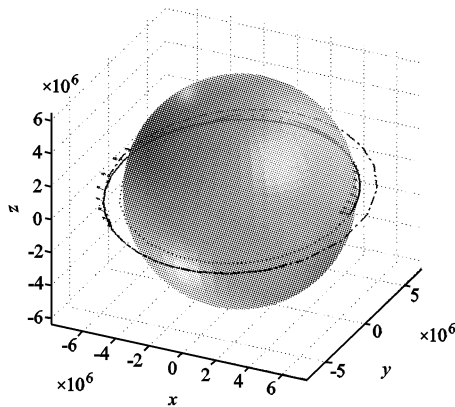


图 6 考虑路径约束时的最优机动轨迹

Fig. 6 Time optimal trajectory and thrust direction in condition of path constraint

表 3 优化结果

Table 3 Optimal results

	初始时刻	终端时刻	
λ_1	2.5219823	a (km)	7500.000
λ_2	-2.5953418	e	$3.2322e-5$
λ_3	2.31784495	i ($^\circ$)	10.000
λ_4	$-1.05e-6$	Ω ($^\circ$)	$1.8727e-6$
λ_5	0.3279902	u ($^\circ$)	229.9999
λ_6	-1.8888431	m	0.91708
λ_m	3.7837999		

图 7 给出了整个机动过程中推力的方向余弦(左侧三个图),开关函数(右上图),质量(右中图)以及航天器距地表的高度(右下图)随时间的变化曲线。可以看出整个过程中航天器距地面高度始终大于 100km,所求解满足了路径约束的要求。同时可以看出相比于无路径约束的情况,航天器为了规避路径约束花费了更多的机动时间。

4 结束语

针对考虑路径约束的持续推力时间最优轨道机动问题,通过在性能泛函中引入关于路径约束的惩罚项,构造了新的两点边值问题,使新问题的解为原

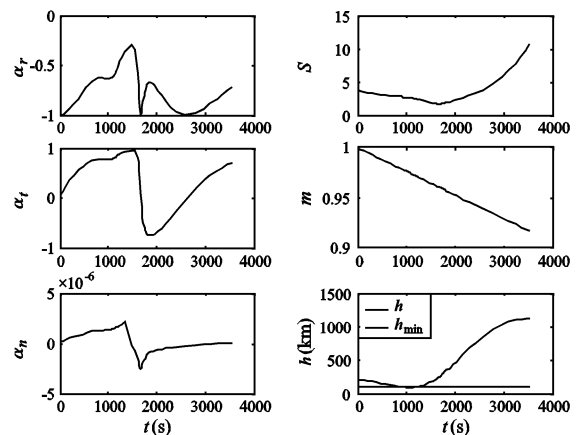


图 7 推力方向及开关函数,质量和 h 的时间历程

Fig. 7 Thrust direction, switch function, mass and altitude history

问题的近似最优。这种处理保证了原本不再适用的极小值原理仍可被用来确定最优推力而不陷入解集的某个子集的最优,同时避免了复杂的分段讨论或多点边值的求解。算例表明,本文提出的处理方法及算法对于处理复杂的,带路径约束的持续推力轨道快速机动问题是准确有效的。

参考文献:

- [1] THORNE JD, HALL CD. Approximate initial lagrange costates for continuous-thrust spacecraft [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics 1996;19(2): 283-288.
- [2] 刘滔,何兆伟,赵育善. 持续推力时间最优机动问题的改进鲁棒算法[J]. 宇航学报 2008; 29(4): 1216-1221. [LIU Tao, HE Zhao-wei, ZHAO Yu-shan. Continuous-thrust orbit maneuver optimization using modified robust algorithm[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(4): 1216-1221.]
- [3] GAO Yang. Near-optimal very low-thrust earth-orbit transfers and guidance schemes[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2007, 30(2): 529-539.
- [4] 梁新刚,杨涤. 应用非线性规划求解异面最优轨道转移问题[J]. 宇航学报, 2006, 27(3): 363-368. [LIANG Xin-gang, YANG Di. Applying nonlinear programming to solve nonplanar optimal orbital transfer problem[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(3): 363-368.]
- [5] 任远,崔平远,栾恩杰. 基于退火遗传算法的小推力轨道优化问题研究[J]. 宇航学报, 2007, 28(1): 162-166. [REN Yuan, CUI Ping-yuan, LUAN En-jie. Low-thrust trajectory optimization based on annealing-genetic algorithm[J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(1): 162-166.]
- [6] BETTS JT, HUFFMAN WP. Path constrained trajectory optimization using sparse sequential quadratic programming[C]. AIAA

Guidance, Navigation and Control Conference. New Orleans, 1991: 1236 – 1259.

- [7] 陈刚,徐敏,等. 具有内点状态约束的机动再入弹道优化设计[J]. 固体火箭技术, 2006, 29(2): 79 – 82. [CHEN Gang, XU Min, WAN Zi-ming, et al. Maneuver reentry trajectory optimization with inner state constraints[J]. Journal of Solid Rocket Technology, 2006, 29(2): 79 – 82.]
- [8] WENZEL RS, PRUSSING JE. Preliminary study of optimal thrust-

limited path-constrained maneuvers [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(6): 1303 – 1309.

作者简介:刘滔(1981 –),男,北京航空航天大学飞行器设计专业博士生,研究方向为航天器轨道动力学与控制。

通信地址:北京航空航天大学宇航学院飞行器技术系(100191)

电话:13661188794

E-mail: nergnayuil@126.com

Path Constrained Trajectory Optimization Using Hybrid Method

LIU Tao, ZHAO Yu-shan

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Minimum-time, continuous thrust solution is obtained for the problem of orbital transfer with interior path constraints. Orbital maneuver in an inverse-square gravitational field was considered, subject to a circular path constraint representing a minimum permissible orbital radius. By reconstructing the performance index J , a new two-point boundary-value problem was obtained. Then a near time-optimal solution, which satisfied the path constraint, was obtained by using hybrid trajectory optimization method with single shooting. At the end of the paper, examples were presented to demonstrate this method.

Key words: Two-point boundary-value problem; Path constraint; Continuous thrust; Time-optimal maneuver