

平面脉冲作用下卫星轨道的可达范围研究

雪 丹, 李俊峰, 宝音贺西

(清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘 要: 对于在初始轨道任意点施加平面内幅值固定、方向任意的脉冲后卫星的可达范围进行研究。考虑脉冲幅值较小,生成轨道均为椭圆,分别针对初始轨道为圆和椭圆的情况进行研究。对于初始轨道为圆的情况,指出了可达范围为两圆形包络所夹的圆环;对于初始轨道为偏心率较小的椭圆的情况,给出了利用椭圆近似描述包络的表达式,并指出构成包络的点可以看作是在施加平行于初始速度方向的脉冲所生成的轨道上与脉冲施加点的真近点角相差约 180° 的点。

关键词: 卫星轨道; 脉冲; 可达范围; 包络

中图分类号: V412.41

文献标识码: A

文章编号: 1000-1328(2009)01-0088-05

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.015

0 引言

现代小卫星的近距离作业应用包括交会对接、编队飞行、在轨检测和维修、空间站绕飞等,轨道机动是其中涉及的共性关键技术。国内外学者在研究轨道机动策略问题时多认为初始时刻目标星信息已知,分别针对两星共轨、共面及非共面的情况,设定时间最短、燃料最少等优化指标,将轨道机动设计问题视为优化问题进行处理^[1-3]。此类研究的前提是该过程能够实现,未考虑实际应用中卫星施加脉冲后可达范围的限制。

人们进行空间任务设计时,不仅要知道卫星现有的轨道特征,同样需要了解其可能的变化范围。研究卫星在施加脉冲后的运动范围是进行轨道优化设计的上层问题,目前公开发表的文献中未见到此方面的成熟理论。文献[4]研究了双脉冲变轨中追踪器可行变轨点的范围,文献[5]对双脉冲变轨条件下的不可达点及其附近的高耗能区域进行了分析,这些研究已经具备了分析变轨可行性的思想,但还是限于目标星信息已知的前提。文献[6]针对洲际弹道导弹的拦截问题,研究了施加一次脉冲后具有双曲线速度的拦截器的可达范围,得到了该范围包络的描述,但仅适用于时间和速度增量均为小量的情况。

本文针对在卫星轨道上任意位置施加平面内幅值固定、方向任意的脉冲后生成轨道的机动范围进行研究。考虑脉冲幅值较小、生成轨道均为椭圆轨道的情况,分析脉冲幅值与卫星的运动范围之间的关系,给出该范围包络的确定方法,并分析构成包络的点的特征。

1 转移轨道的矢量表示

已知卫星在初始时刻 t_0 的位置 r_0 和速度 v_0 ,求其在 t 时刻的位置 r 和速度 v ,这一问题称为预测问题。由于开普勒运动在一个平面内,四个矢量 r_0 、 v_0 、 r 和 v 共面,因此满足如下关系:

$$r = fr_0 + gv_0 \quad (1)$$

$$v = \dot{f}r_0 + \dot{g}v_0 \quad (2)$$

其中 参数 f 、 g 、 \dot{f} 和 \dot{g} 为与时间有关的量。

对于椭圆轨道,令 E 为偏近点角,则上述各参数 f 、 g 、 \dot{f} 和 \dot{g} 可表示为^[7]:

$$f = 1 - \frac{a}{r_0}[1 - \cos(E - E_0)] \quad (3)$$

$$g = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}[\sin(E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0)] \quad (4)$$

$$\dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu a} \sin(E - E_0)}{r_0} \quad (5)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{a}{r}[1 - \cos(E - E_0)] \quad (6)$$

已知初始时刻的位置和速度,根据式(1)到式(6)可以给出卫星的运动规律。由于施加瞬时速度增量不会引起向径的变化,对于脉冲幅值较小、生成轨道为椭圆的情况,将初始时刻的速度 v_0 改为 v_1 即可描述施加脉冲后生成轨道的运行规律。图 1 给出了在初始轨道真近点角为 u_0 的 A 点处施加脉冲后的生成轨道示意图,其中实线表示初始轨道,虚线表示生成轨道。

为使相关公式及示意图简洁清晰,这里考虑初始轨道近地点角距 ω_0 等于 0 的情况,该简化不会影响分析的合理性,所得结论可以推广到 ω_0 不为 0 的情况。

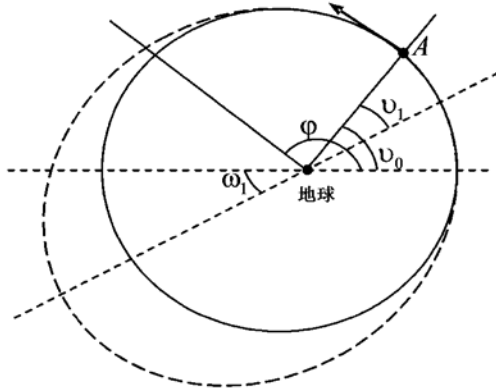


图 1 施加脉冲后的生成轨道
Fig.1 Trajectory generated after impulse applied

2 圆轨道情况

作为椭圆轨道的特例,首先分析初始轨道为圆轨道的情况。在轨道上某点施加平面内任意方向的脉冲可以得到一组轨道,分析可知,由于初始轨道上各点的半径和速度大小均分别相等,当脉冲沿切向时,卫星可达位置地心距的最大值相等,可以写作:

$$l_{\max} = \frac{\mu + r_0 \lambda^2 + 2 \lambda \sqrt{\mu r_0}}{\mu - r_0 \lambda^2 - 2 \lambda \sqrt{\mu r_0}} r_0 \quad (7)$$

其中 r_0 为初始轨道半径, λ 为脉冲幅值。

同理,当脉冲沿反切向时,卫星可达位置地心距的最小值相等,可以写作:

$$l_{\min} = \frac{\mu + r_0 \lambda^2 - 2 \lambda \sqrt{\mu r_0}}{\mu - r_0 \lambda^2 + 2 \lambda \sqrt{\mu r_0}} r_0 \quad (8)$$

令 l_x 代表地心距,在初始轨道上任意位置施加平面内幅值为 λ 、方向任意的速度增量,得到的可

达范围为 η , 则存在两圆形包络,使得对于 $\forall x \in \eta$ 有 $l_{\min} \leq l_x \leq l_{\max}$ 成立。

分析圆轨道卫星可达范围的特点,可以得出以下结论:

- (1) 构成包络的点与在初始轨道各点施加与初始速度方向平行的脉冲所生成的轨道相对应;
- (2) 在轨道上某点沿切向/反切向施加脉冲时,生成轨道的远地点/近地点为构成包络的点;
- (3) 包络由生成轨道上与脉冲施加点的真近点角相差 180° 的点构成;
- (4) 在圆轨道上任意点施加平面内幅值固定、方向任意的脉冲,生成轨道的可达范围为两圆形包络所夹的区域。

3 椭圆轨道情况

对椭圆轨道情况进行研究,分析根据圆轨道情况得出的结论是否适用。

3.1 脉冲方向分析

脉冲在平行于初始速度方向的分量起到使生成轨道在远离脉冲施加点处远离初始轨道的作用,脉冲在垂直于初始速度方向的分量起到使生成轨道在脉冲施加点附近远离初始轨道的作用。对于偏心率较小的椭圆轨道,仍然认为圆轨道情况的第一条结论成立,即构成包络的点与在初始轨道各点施加平行于初始速度方向的脉冲所生成的轨道相对应。

3.2 转移轨道的地心距

卫星在初始轨道上的地心距可以写作:

$$r_0 = \frac{a_0(1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cos u_0} \quad (9)$$

令 v_0 为初始时刻卫星在 A 点的速度幅值:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu(e_0^2 + 2e_0 \cos u_0 + 1)}{a(1 - e_0^2)}} \quad (10)$$

在 A 点施加切向脉冲时,生成轨道的半长轴和偏心率分别满足如下关系:

$$a_1 = \frac{\mu r_0}{2\mu - r_0(v_0 + \lambda)^2} \quad (11)$$

$$e_1 = \sqrt{1 - \frac{a_0}{a_1}(1 - e_0^2)\left(1 + \frac{\lambda}{v_0}\right)^2} \quad (12)$$

初始轨道和生成轨道在施加脉冲点处相切,且初始近地点角距为 0,因此有如下关系存在:

$$\frac{a_0(1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cos u_0} = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos u_1} \quad (13)$$

$$\omega_1 = u_0 - u_1 \quad (14)$$

由式(13)可知,脉冲施加点在生成轨道上的真近点角满足如下关系:

$$\cos u_1 = \frac{1}{e_1} \left[\frac{a_1(1-e_1^2)(1+e_0 \cos u_0)}{a_0(1-e_0^2)} - 1 \right] \quad (15)$$

按照图 1 中的角度定义,根据式(10)到(15)可以得到生成轨道的地心距:

$$r_1 = \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1 \cos(\varphi-\omega_1)} \quad (16)$$

3.3 远地点(近地点)分析

若在偏心率较大的初始轨道的远地点/近地点施加幅值很小的脉冲,该点可能仍然是生成轨道的远地点/近地点,显然不在可达范围的包络上。因此,圆轨道情况的第二条结论对椭圆轨道不再成立。事实上,生成轨道的远地点/近地点的位置与初始轨道的远地点/近地点间的关系,表明了初始轨道长轴方向的转动程度,即:若脉冲幅值非常小,可以视为对初始轨道椭圆的“转动”能力非常小。

分析可知,当脉冲幅值大于下式所示的 λ_1 时,才能使得在初始轨道上各点施加切向脉冲时生成轨道的远地点均接近外包络:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0(1+e_0)}}(1-\sqrt{1-e_0}) \quad (17)$$

当脉冲幅值大于下式所示的 λ_2 时,才能使得在初始轨道上各点施加反切向脉冲时生成轨道的近地点均接近内包络:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0(1-e_0)}}(\sqrt{1+e_0}-1) \quad (18)$$

3.4 构成包络的点的性质

首先仍对圆轨道进行分析,考虑施加切向脉冲的情况。如图 2 所示,分别在 A、B 两点施加脉冲,生成轨道的交点为 C 点和 D 点。

由于生成轨道的半长轴和偏心率均相等,根据式(16)可知,交点的角度 φ 满足:

$$\cos(\varphi-\omega_1) = \cos(\varphi-\omega_2) \quad (19)$$

因此, C 点和 D 点的角度分别为:

$$\varphi_C = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (20)$$

$$\varphi_D = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \pi \quad (21)$$

分析可知,若 A 点和 B 点更接近,则 D 点与外包络更接近,当 A 点和 B 点重合, D 点即为生成轨

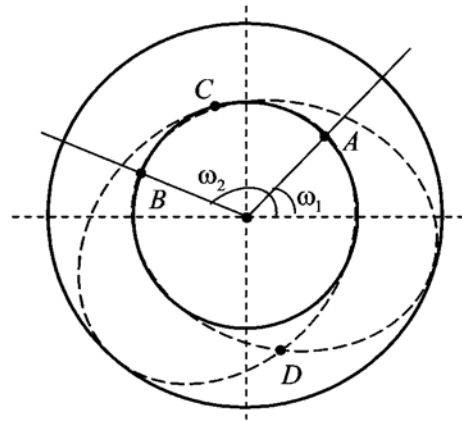


图 2 圆轨道不同点施加脉冲生成的轨道

Fig. 2 Generated trajectories after impulse applied at different positions on the circular orbit

道上与施加脉冲点的真近点角相差 180° 的点,且该点位于包络上,与第 2 节得到的结论相符。

对于初始轨道为椭圆的情况,可达范围包络仍可视为由初始轨道上充分接近的两点分别施加切向脉冲后生成轨道的交点构成。分析式(10)到式(16)可知,生成轨道交点 D 的角度不再严格满足式(21)所示的关系;对于初始轨道偏心率较小的情况,若施加脉冲的两点充分接近,生成轨道的半长轴和偏心率分别近似相等,因此圆轨道情况的第三条结论对小偏心率椭圆轨道近似成立。

3.5 可达范围包络的近似确定

分析可知,生成轨道的可达范围相对于初始轨道的长轴对称。参照圆轨道情况的第四条结论,下面将利用两椭圆对该范围的包络进行近似描述。如图 3 所示,在初始轨道的近地点 P/远地点 A 施加与速度方向平行的脉冲,生成轨道上的点 Q_1/Q_2 位于外包络上,点 Q_3/Q_4 位于内包络上,根据这些点的性质可以求出描述包络的两椭圆的半长轴和偏心率。

令初始轨道近地点和远地点的速度幅值分别为 v_{p0} 和 v_{a0} ,由式(11)可知在近地点施加脉冲时,生成轨道半长轴的最大值和最小值分别为:

$$a_{pmax} = \frac{\mu a_0(1-e_0)}{2\mu - a_0(1-e_0)(v_{p0} + \lambda)^2} \quad (22)$$

$$a_{pmin} = \frac{\mu a_0(1-e_0)}{2\mu - a_0(1-e_0)(v_{p0} - \lambda)^2} \quad (23)$$

同理,在远地点施加脉冲时,生成轨道半长轴的最大值和最小值分别为:

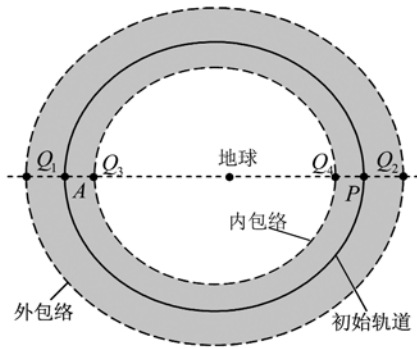


图 3 椭圆轨道的可达范围示意图

Fig. 3 Reachable domain of elliptic orbit

$$a_{\max} = \frac{\mu a_0 (1 + e_0)}{2\mu - a_0 (1 + e_0) (\nu_{d0} + \lambda)^2} \quad (24)$$

$$a_{\min} = \frac{\mu a_0 (1 + e_0)}{2\mu - a_0 (1 + e_0) (\nu_{d0} - \lambda)^2} \quad (25)$$

因此两包络椭圆的半长轴和偏心率分别为:

$$a_w = a_{\max} + a_{\mu\max} - a_0 \quad (26)$$

$$a_n = a_{\min} + a_{\mu\min} - a_0 \quad (27)$$

$$e_w = \frac{a_{\mu\max} - a_{\max} + a_0 e_0}{a_w} \quad (28)$$

$$e_n = \frac{a_{\mu\min} - a_{\min} + a_0 e_0}{a_n} \quad (29)$$

由于可达范围相对于初始轨道长轴对称,两椭圆的长轴方向与初始轨道的长轴方向一致。

4 数值仿真及分析

初始轨道的半长轴为 7378.137km、偏心率为 0.03,脉冲幅值为 0.2km/s。分析可知,施加反切向脉冲时,所有生成轨道的近地点地心距均大于 6426km,能够保证轨道的安全性。

以施加切向脉冲的情况为例,分析可达范围外包络的特性。图 4 中,实线代表在初始轨道上间隔 10° 的各点施加脉冲后各生成轨道的地心距,* 号表示各条生成轨道的远地点。分析可知,由于此时脉冲幅值大于式(17)给出的 $\lambda_1 = 0.1095\text{km/s}$,因此各生成轨道的远地点均接近外包络,但仍有不可忽略的误差,表明远地点不是构成外包络的点。

图 5 所示为各条生成轨道与外包络间的距离,为清晰给出结果,仅保留包含所有间距最小值的部分。分析可知,利用椭圆近似描述外包络,与各条生成轨道地心距间的最大误差小于 0.43km,能够较好

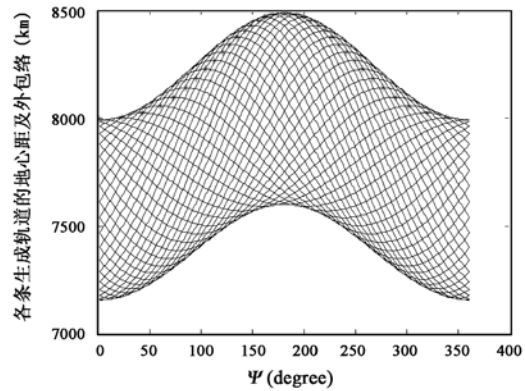


图 4 各条生成轨道的地心距及远地点

Fig. 4 Distance from satellite to earth and the apogees

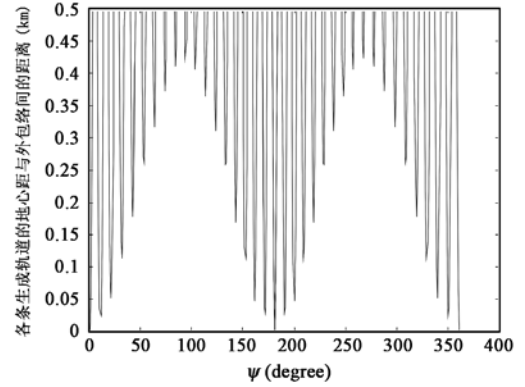


图 5 各条生成轨道与外包络间的距离

Fig. 5 Distance between various generated trajectories and the outer envelope

地描述卫星轨道的可达范围。

分别改变脉冲幅值和初始轨道偏心率,分析生成轨道的地心距与外包络间的误差的最大值 χ ,表 1 所示为改变脉冲幅值的情况,表 2 所示为改变偏心率的情况。分析可知,随着脉冲幅值或初始轨道偏心率的减小,生成轨道的地心距与外包络间的误差的最大值均减小。

表 1 不同脉冲幅值对应的误差 χ

Table 1 χ corresponding to different λ

λ (km/s)	0.2	0.15	λ_1	0.05
χ (km)	0.4225	0.3068	0.2183	0.0961

表 2 不同偏心率对应的误差 χ

Table 2 χ corresponding to different e

e	0.03	0.01	0.005	0.001
χ (km)	0.423	0.0469	0.0264	0.0014

5 结论

本文考虑在卫星轨道面内施加幅值固定、方向任意的脉冲,研究了生成轨道的可达范围。研究表明,初始轨道为圆轨道时,生成轨道的可达范围为两圆形包络所夹的区域,给出了该范围包络的准确描述,并指出包络由施加平行于速度方向脉冲所生成的轨道上与脉冲施加点的真近点角相差 180° 的点构成。对于初始轨道为小偏心率椭圆的情况,给出了近似描述该包络的椭圆表达式,分析了构成包络的点的特征,并指出包络可以看作由施加平行于速度方向脉冲所生成的轨道上与脉冲施加点的真近点角相差约 180° 的点构成。

为适应更一般的情况,对于初始大偏心率椭圆轨道在平面脉冲作用下的可达范围、以及初始圆轨道和椭圆轨道在空间脉冲作用下的可达范围的研究工作正在进行当中。

参考文献:

- [1] 孟云鹤,贺勇军,戴金海. 卫星编队的多冲量轨道机动路径规划方法[J]. 宇航学报, 2005, 26(4): 491-494. [MENG Yun-he, HE Yong-jun, DAI Jin-hai. Path planning for satellite formation's multi-impulse orbit maneuvers[J]. Journal of Astronautics, 2005, 26(4): 491-494(in Chinese).]
- [2] 张立佳,郭继峰,崔乃刚. 伴飞航天器燃料最优交会[J]. 宇航学报, 2007, 28(4): 870-874. [ZHANG Li-jia, GUO Ji-feng, CUI Nai-gang. Optimal control for space rendezvous[J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(4):870-874(in Chinese).]
- [3] 石俊,韩潮. 应急轨道机动变轨方案快速设计算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(4): 388-391. [Shi Jun, HAN Chao. Quick algorithm for designing emergency orbital transfer scheme[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(4):388-391(in Chinese).]
- [4] 常燕,周军. 空间飞行器追踪区设计[J]. 宇航学报, 2006, 27(6):1228-1232. [CHANG Yan, ZHOU Jun. Tracing area design for space-craft[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(6):1228-1232(in Chinese).]
- [5] 向开恒,肖业伦. 空间交会中脉冲变轨燃料消耗研究[J]. 中国空间科学技术, 1999, 6(3):9-15, 50. [XIANG Kai-heng, XIAO Ye-lun. A study of propellant consumption of impulsive maneuvers in space rendezvous[J]. Chinese Space Science and Technology, 1999, 6(3):9-15, 50(in Chinese).]
- [6] Vinh N X, Gilbert E G, Howe R M, D. Sheu D L. Reachable domain for interception at hyperbolic speeds[J]. Acta Astronautica, 1995, 35(1):1-8.
- [7] Bate R R, Mueller D D, White J E. Fundamentals of astrodynamics [D]. Dover Publications, INC., New York, 1971: 219.

作者简介:雪丹(1981-),女,清华大学航天航空学院博士后,研究方向为航天器轨道动力学与控制。
通信地址:清华大学逸夫楼 1409 室(100084)
电话:(010)62773402
E-mail:xuedan-tsinghua@126.com

Study on Reachable Domain for Satellite Trajectory with Coplanar Impulse Applied

XUE Dan, LI Jun-feng, BaoYin He-xi

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: This paper studies the reachable domain for satellite trajectory generated after coplanar single impulse with fixed magnitude and arbitrary direction applied at any point of the initial orbit. On the assumption that the magnitude of impulse is small, all the generated trajectories are ellipses. The reachable domain is revealed respectively for initial circular orbit and initial elliptic orbit with small eccentricity. For the former case, the reachable domain is proved to be a ring, and the explicit formulas of the envelopes are given. For the latter case, the envelopes of the reachable domain are described approximately by two ellipses, and it shows that the envelopes consist of the points which have a discrepancy of about 180° in true anomalies with the points where impulse is applied respectively on the trajectories generated after impulse parallel to the initial velocity applied.

Key words: Satellite trajectory; Impulse; Reachable domain; Envelope