

# 一种基于多小波变换的图像压缩编码

潘建寿, 孙宏伟

(西北大学 电子科学系, 陕西 西安 710069)

**摘要:**认为多小波变换是小波应用研究的新热点。利用多小波变换系数所具有相关性、同向性等特点,使用一种新的矢量构造方法,并将其用于 Lena 光滑图像和 Barbara 多纹理图像的编码压缩,获得了较好的计算机模拟实验结果。

**关键词:**多小波变换; 矢量构造; 图像压缩; 实验结果

**中图分类号:**NT911 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274 X (2003)05-0511-04

信号处理和图像压缩是小波应用的主要领域之一。在图像处理中,正交性能保持能量<sup>[1,2]</sup>,对称性(线性相位)使信号的边界易于处理,但在实数域中,紧支、对称、正交的单小波是不存在的,而多小波克服了单小波的不足,将实际应用中十分重要的光滑性、紧支性、对称性、正交性完美地结合在一起,形成了小波理论与应用研究的新热点。

## 1 多尺度函数与多小波函数

### 1.1 多尺度函数与多分辨分析

基本想法很简单,就是将单个尺度函数生成的多分辨分析空间推广到由多个尺度函数生成,从而获得更大的自由度。与单小波一样,生成正交多小波  $\Psi(t)$  相应的多尺度函数  $\phi(t) = [\phi_1(t), \dots, \phi_r(t)] \in L^2(\mathbb{R})^r$  具有  $r$  阶的多分辨分析  $L^2(\mathbb{R})$ , 即对任意个  $j, j \in \mathbb{Z}$ , 定义

$$V_j \equiv \text{span} \left[ 2^{-j} \phi \left( \frac{t}{2^j} - k \right); 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z} \right], \quad (1)$$

空间  $\text{span}(S)$  是实线性空间,  $V_j$  是完全由  $S$  生成的子空间,且满足条件  $\dots \subset V_3 \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$ , 可见,所有的尺度函数  $\phi_1(t), \dots, \phi_r(t)$  都在  $V_0$  空间,  $V_0 \in V_{-1}$  而  $V_{-1}$  空间具有  $\{\sqrt{2} \phi_i(2t - k), 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}$  基函数,所以多尺度函数必须满足二尺度关系方程

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum G_k \phi(2t - k), \quad (2)$$

其中  $G_k = L^2(\mathbb{Z})^{r \times r}, k \in \mathbb{Z}$  是一个  $r \times r$  滤波器系数

矩阵。

### 1.2 多小波函数

定义  $W_j$  是存在于  $V_{j-1}$  中的  $V_j$  的补空间,如果一组函数

$$\Psi(t) = [\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_r(t)]^T \in L^2(\mathbb{R})^r, \quad (3)$$

对任意  $j, j \in \mathbb{Z}$ , 有

$$W_j \equiv \text{span} \left[ 2^{-j} \Psi_i \left( \frac{t}{2^j} - k \right); 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z} \right], \quad (4)$$

且  $\{\Psi_i(t - k); 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}$  是空间  $W_0$  的 Riesz 基,则称  $\Psi(t)$  为  $r$  阶多小波。如果同时有

$$\langle \Psi_i(2^{-j}t - k), \Psi_l(2^{-m}t - n) \rangle = 0 \\ (j \neq m; i, j, k, l, m, n \in \mathbb{Z}), \quad (5)$$

则称  $\Psi(t)$  为  $r$  阶正交多小波。

小波函数  $\Psi_1(t), \dots, \Psi_r(t)$  是在  $W_0$  空间,  $W_0 \in V_{-1}$ , 所以多小波和多尺度函数一定满足二尺度关系

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum H_k \phi(2t - k), \quad (6)$$

式中  $H_k \in L^2(\mathbb{Z})^{r \times r}, k \in \mathbb{Z}$  是一个  $r \times r$  滤波器系数矩阵。对一个具有正交的多分辨分析,小波空间  $W_j$  完全正交于尺度空间  $V_j$ , 即  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j, V_j \perp W_j, W_j \perp W_m$ 。

## 2 多小波变换

在多小波变换的实现中,分解和重构方程分别为

收稿日期: 2002-07-09

作者简介: 潘建寿(1953-),男,陕西华县人,西北大学副教授,从事信号处理与模式识别研究。

$$\begin{aligned} V_{j,k} &= \sum_m G_{m-2k} V_{j-1,m}, \\ W_{j,k} &= \sum_m H_{m-2k} V_{j-1,m}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$V_{j-1,k} = \sum_m G_{2k-m}^T V_{j,m} + \sum_m H_{k-2m}^T W_{j,m}. \quad (8)$$

由此可知,多小波系统对应一个矢值滤波器组(多滤波器组)。一个多小波滤波器组具有  $r \times r$  矩阵“子带”,这意味着多滤波器组需要  $r$  输入“行”,即  $r$  路数据流。因此,为了实现多小波变换,需要对输入数据进行预处理<sup>[3,4]</sup>。本文计算机模拟实验中选取  $r = 2$ ,采用 4 系数对称多滤波器组,“低通”滤波器由 4 个  $2 \times 2$  的矩阵  $G(k)$  组成,预处理采用基于逼近的“appro”方法,边界处理采用对称延拓。多小波滤波器的信号分解过程如图 1 所。

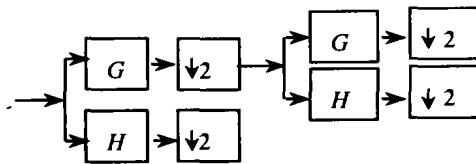


图 1 多小波滤波器的信号分解过程

Fig.1 Signal decomposing of multwavelets

多小波滤波器的每一行都是两个普通滤波器的联合体。一个工作于第一个数据流,另一个工作于第二个数据流。实验中选用 SA(4) 多小波,其伸缩二尺度方程为

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} &= G_0 \Phi(2t) + G_1 \Phi(2t-1) + \\ &G_2 \Phi(2t-2) + G_3 \Phi(2t-3) = \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{32+8\sqrt{15}} & 1/8 \\ \frac{1}{32+8\sqrt{15}} & -1/8 \end{bmatrix} \Phi(2t) + \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} & 1/8 \\ -\frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} & 1/8 \end{bmatrix} \Phi(2t-1) + \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} & -1/8 \\ \frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} & 1/8 \end{bmatrix} \Phi(2t-2) + \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{32+8\sqrt{15}} & -1/8 \\ -\frac{1}{32+8\sqrt{15}} & -1/8 \end{bmatrix} \Phi(2t-3) \end{aligned} \quad (9)$$

小波尺度方程为

$$\begin{aligned} \Psi(t) = \begin{bmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{bmatrix} &= H_0 \Phi(2t) + H_1 \Phi(2t-1) + \\ &H_2 \Phi(2t-2) + H_3 \Phi(2t-3) = \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1/8 & \frac{1}{32+8\sqrt{15}} \\ -1/8 & -1/8 \end{bmatrix} \Phi(2t) + \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/8 & -\frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} \\ -1/8 & -\frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} \end{bmatrix} \Phi(2t-1) + \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/8 & \frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} \\ 1/8 & -\frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} \end{bmatrix} \Phi(2t-2) + \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1/8 & -\frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} \\ -1/8 & -\frac{31+8\sqrt{15}}{1/(32+8\sqrt{15})} \end{bmatrix} \Phi(2t-3). \end{aligned} \quad (10)$$

为了完成图像的多小波变换,在第一级分解前必须有一个预处理步骤,而由于多个尺度(小波)函数的存在,单小波变换后的一个子带,在多小波变换后进一步被分为  $r \times r$  个子带。一般而言,  $L$  级变换可得到  $r^2(3L+1)$  个子带<sup>[5]</sup>。

### 3 矢量构造及矢量量化算法

分析表明,多小波变换分解产生的各级子图像具有如下特点:

1) 各级子图像分别对应于原始图像中不同尺度下的边缘信息,这表明原始图像中的突变信息在多小波变换域中没有扩散;

2) 各级子图像的“亮度”从低频子图像到高频子图像呈尺度级顺序递减,这表明原始图像的能量大部分集中在最低频率的子图像中,并从低频到高频呈尺度级递减趋势,即多小波变换不仅在频率域具有能量紧缩特性,而且在空间域同时具有能量紧缩特性;

3) 不同尺度下相同空间位置上各子图像所具有的相似性,表明不同尺度下同方向子图像之间存在着很强的相关性和同构性,并且相应的系数值也呈尺度级顺序递减。

基于上述分析,本文对多小波变换系数提出如

下的矢量构造方法:将 3 个方向上 2 个尺度下的多小波变换系数,按位置构成 21 维矢量  $x_0 \sim x_{20}$ ,如图 2 所示。显然,这样构造出的矢量,充分利用了多小波变换系数所具有的上述特点,具有矢量内相关性强、矢量间相关性弱的特点,符合一般矢量构造的基本原则。

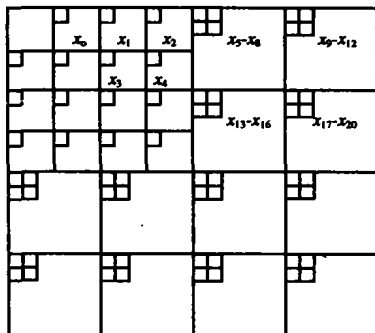


图 2 多小波矢量构造方法

Fig. 2 Structure method of multwavelets vector

对如上构造的多小波系数矢量,采用一种新的非迭代码书生成算法——渐进构造聚类(PCC)法进行矢量量化。PCC 算法的特点是对训练序列只进行一次扫描,用很少时间就能完成码书生成,具体步

骤为<sup>[6]</sup>:

1) 将训练序列中的第一个矢量作为码字,设置矢量之间的距离阈值  $T$ ;

2) 将输入矢量  $X_m$  映射到一个最近相邻码字  $y_i$  中,使得  $E = d(X_m, y_i)$  为最小;

3) 比较  $E$  和  $T$ , ① 若  $E < T$ , 将  $X_m$  放入  $y_i$  的聚类中,重新计算其形心,调整其码字, ② 若  $E > T$ , 且码书大小还不够,将  $X_m$  作为新码字,否则,虽若  $E > T$ , 但码书已足够大,则仍将  $X_m$  放入最近的聚类中重新计算其形心,并调整其码字;

4) 若训练序列完毕,算法结束,否则取下一个训练矢量作为输入,转至第二步。

## 4 实验结果

表 1 给出了 SA(4)多小波矢量量化用于 Barbara 多纹理图像和 Lena 平滑图像的压缩编码结果。为了比较,同表也给出了双正交 9/7 小波在相同量化结果下的相应数据。

表 1 图像压缩编码结果

Tab. 1 Result of Image compression coding

小波类型	图像类型	分解级数	Max abs. Error	量化结果/bpp
双正交 9/7	Barbara	3 级	92.841 8	0.307 7
双正交 9/7	Lena	3 级	64.414 4	0.307 7
多小波 SA(4)	Barbara	2 级	79.908 2	0.307 7
多小波 SA(4)	Lena	2 级	54.089 9	0.307 7

从表中实验数据可以看出,在相同的量化结果下,使用 SA(4)多小波进行 2 级分解的最大绝对误差小于使用双正交 9/7 小波进行 3 级分解的最大绝对误差,对光滑的 Lena 图像如此,对多纹理 Barbara 图像也是如此,表明多小波在图像压缩方面将会有更好的应用潜力,这与多小波在理论上所具有的优秀性质是一致的。考虑到 9/7 双正交小波是目前认为精选出的性能优秀、适合图像处理的双正交小波,因此这一结果具有一般的意义。如果上述处理中采用能充分体现多小波系数特性的矢量构造方法,使用更适合图像处理的多小波函数,那么本文讨论的这种基于多小波变换的矢量量化方法在图像压缩编码中的优良性能将会得到更充分的体现。

## 参考文献:

- [1] JIANGQ T. Orthogonal multwavelets with optimum time-frequency resolution[J]. IEEE trans on, 1998, 46(4):830-844.
- [2] 吴乐南. 数据压缩[M]. 北京:电子工业出版社,2000.
- [3] STRELA V. Multwavelets: theory and application [D]. Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [4] 王 玲, 王卫卫, 宋国乡. 多小波图像变换的自适应预滤波[J]. 电子与信息学报, 2001, 23(10):949-953.
- [5] 孙宏伟. 正交多小波变换及其在图像压缩编码中的应用[D]. 西北大学, 2001.
- [6] 潘建寿, 孙宏伟. 基于 9/7 双正交小波的高效矢量量化算法[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(7):900-904.

(编 辑 亢小玉)

## A picture compression code based on multwavelets transformation

PAN Jian-shou, SUN Hong-wei

(Department of Electronics and Science, Northwest University, Xi'an 700069, China)

**Abstract:** A new structure of vector by many characteristics among multwavelets transformation coefficients is given. Then it is used to compress a Lena and Barbara multi-whined picture. And the better simulation result by computer is given.

**Key words:** multwavelets transformation; vector structure; picture compression; simulation result

(上接第 505 页)

## A function in the circular discontinuous wave-guide

ZHANG Hui<sup>1</sup>, XU Jia-dong<sup>1</sup>, NIU Zhong-qi<sup>2</sup>, GUO Chen-jiang<sup>1</sup>, LI Zong-ling<sup>3</sup>

(1. Department of the Electronic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. Department of the Electromagnetic Field and Microwave Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China; 3. Department of Physics, Xi'an Yang Teachers College, Xi'an 712000, China)

**Abstract:** The boundary electric field intensity based on the method of eigen-function is presented. The field is on the assumed plane which is inside the circular wave-guide. And the function inside the discussed area is presented.

**Key words:** eigen-function; function; circular wave-guide; finite-element

### · 学术动态 ·

## 国务委员陈至立来我校考察工作

5月24日下午,国务委员陈至立在我校党委书记李军锋、校长孙勇等领导的陪同下,就我校网络教育、生物芯片研发等工作进行考察。在听取完汇报后,陈至立等领导对我校的工作给予了充分肯定。随同国务委员陈至立来我校考察的领导同志有:教育部部长周济、国家发展改革委副主任李盛霖、国务院副秘书长陈进玉、科技部副部长邓楠、财政部副部长金立群等。

陈至立一行首先来到我校现代教育技术中心,听取了中心主任高岭同志关于校园网的建设情况以及网络教学等相关工作的汇报。据介绍,我校校园网是“九五”“211工程”重点建设项目之一,自1998年建成以来,在我校的教学、科研、管理等方面发挥了越来越重要的作用。网络结构是以新型光纤为主干的全交换网络体系结构,目前已完成光缆铺设12.5 km,接入的最新点数2600个,接入计算机3500台。目前,进行中的国家西部大学校园计算机网络工程项目和我校“十五”“211工程”建设项目正在开展二期建设,对整个校园网进行升级改造。高岭向领导展示了地质系多媒体课件、《中国通史》多媒体课件和网上博物馆等。同时,还就校园网开辟的网上招生、网上就业等专题作了介绍。在听取汇报时,陈至立对我校网上教学、网上信息发布等工作表示了极大地关切,详细询问了有关具体事宜。

随后,陈至立一行来到我校生物芯片研发中心,听取了中心主任陈超博士的工作汇报。陈超博士说,经过近年来的建设,到2002年底,我校生物芯片研发中心已被科技部批准为全国惟一的一个国家微检测系统工程技术中心。从2001年至今,该中心共承担了国家“十五”“863”重大专项1项、国家“十五”“863”计划项目3项、国家“十五”科技攻关西部开发重大项目1项、国家自然科学基金1项以及省、市重点科技计划项目10余项,累计获得科研资助2600余万元。陈至立对我校生物芯片研发中心的工作给予积极评价,并希望研究人员继续努力,在科学研究方面做出新的成绩。

陪同国务委员陈至立来校的陕西省领导有省委副书记、省长贾治邦,省委常委、省教工委书记郭永平,省教育厅厅长胡致本,省政府副秘书长薛汉军等。

(薛 鲍)