2003 年 2 月
第 33 卷第 1 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Feb. 2003
Vol. 33 No. 1

一类具有扩散的 SI 传染病模型

窦家维

(西安交通大学 理学院,陕西 西安 710049)

摘要:研究了一类描述具有扩散的传染病模型的偏微分方程组,应用反应扩散方程的单调方法和不变区域理论,得到了解的有界性及传染病能否传播的阈值,结果对于实际有一定的指导意义。

关 键 词:传染病;扩散;有界性;阈值

中图分类号:O175.12 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)01-0001-04

1 数学模型

传染病模型的研究已经有很长时间的历史了,人们建立了很多模型,并对其进行分析。但是,传统的传染病模型研究,仅限制在种群密度随时间的变化,种群密度同时依赖于时间变量和空间变量及疾病随地域的传播则很少被研究[1-4]。实际上,无论是易感者或感染者的空间分布都是不均匀的,其密度随时随地可能都在发生变化,这样,就需要用带有扩散项的反应扩散方程组来描述传染病模型。文献[1]建立了一个在红狐狸种群中发生的狂犬病传播的 SI 传染病模型,在那里,仅考虑染病的狐狸具有扩散,研究了模型行波解的存在性。本文研究了一类易感者和感染者都具扩散的 SI 传染病模型

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= AS\left(1-\frac{S}{K}\right) - BSI + D_1\Delta S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= BSI - CI + D_2\Delta I。 \end{aligned} \tag{*}$$

其中 A,B,C,D_1,D_2,K 均为正常数,$S(t,x),I(t,x)$ 分别表示易感者和感染者的密度,$D_1\Delta S,D_2\Delta I$ 表示易感者和感染者在栖息地内由高密度地区向低密度地区的扩散,D_1,D_2 分别表示其扩散率。传染者的接触率为 BSI,易感者的增长率为 $AS(1-\frac{S}{K})$,C 表示得病者的死亡率。

作无量纲变换:令 $S^*=\frac{S}{K},I^*=\frac{BI}{A},t^*=At,x^*=x(\frac{A}{D_2})^{\frac{1}{2}},D=\frac{D_1}{D_2},a=\frac{BK}{A},b=\frac{C}{BK}$,得到的模型(为记号简单,去掉星号)为

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= S(1-S-I) + D\Delta S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= aI(S-b) + \Delta I \quad (t\geqslant 0;x\in\Omega)。 \end{aligned} \tag{1}$$

我们将讨论式(1)满足边值条件

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=0,\qquad \left.\frac{\partial I}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=0 。\tag{2}$$

及初值条件

$$\begin{aligned} S(0,x) &= S_0(x), \\ I(0,x) &= I_0(x),(x\in\Omega) \end{aligned} \tag{3}$$

的解的一些性质。模型中,Ω 是 $R^n(n=1,2,3)$ 中一个有界区域,它代表了种群的栖息地,ν 为 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的外法向,条件(2)表示种群被限制在 Ω 内,没有穿越边界的迁徙。

2 基本引理

假设存在 $\alpha\in(0,1)$ 使 $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$,$S_0(x),I_0(x)\in C^{2+\alpha}$ 满足 $\left.\frac{\partial S_0}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial I_0}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0$,记 $f_1(S,I)=S(1-S-I)$, $f_2(S,I)=aI(S-b)$ 。

定义 1 H 为 (S,I) 平面上某区域,$(S(t,x),I(t,x))$ 为式(1～3)的解,若 $(S_0(x),I_0(x))\in\overline{H},x\in\overline{\Omega}$,则有 $(S(t,x),I(t,x))\in\overline{H}$, $(t,x)\in\overline{R}_+\times\overline{\Omega}$,称 H 为式(1)的不变区域(这里,$\overline{R}_+=[0,$

收稿日期:2001-06-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071048);陕西师范大学重点科研基金资助项目
作者简介:窦家维(1963-),女,陕西高陵人,陕西师范大学副教授,西安交通大学博士生,从事生物数学研究。

$+\infty)$)。

引理 1[5] 如果向量场(f_1,f_2)在区域 $\Sigma_a^b=\{(S,I):0\leqslant a_1<S<b_1\leqslant+\infty;0\leqslant a_2<I<b_2\leqslant+\infty\}$上满足

$$f_1(S,I)|_{S=a_1}\geqslant 0,f_1(S,I)|_{S=b_1}\leqslant 0,$$

$$f_2(S,I)|_{I=a_2}\geqslant 0,f_2(S,I)|_{I=b_2}\leqslant 0\ , \tag{4}$$

则Σ_a^b为式(1)的不变区域(如果向量场(f_1,f_2)在Σ_a^b上满足式(4)则称(f_1,f_2)不指向Σ_a^b外)。

由引理 1,可以得到

引理 2 $R_+^2=\{(S,I):0<S;0<I\}$为式(1)的不变区域。

由模型的生态意义,下面仅考虑式(1～3)在$\overline{R}_+^2=\{(S,I):0\leqslant S;0\leqslant I\}$中的解。

定义 2 记

$$f_1^+(S,I)=\sup\{f_1(S,\theta),a_2\leqslant\theta\leqslant I\},$$

$$f_2^+(S,I)=\sup\{f_2(\theta,I),a_1\leqslant\theta\leqslant S\};$$

$$f_1^-(S,I)=\inf\{f_1(S,\theta),I\leqslant\theta\leqslant b_2\},$$

$$f_2^-(S,I)=\inf\{f_2(\theta,I),S\leqslant\theta\leqslant b_1\}$$

分别称(f_1^+,f_2^+),(f_1^-,f_2^-)为(f_1,f_2)关于Σ_a^b的极大、极小向量场。

如果f_1,f_2是 Lipschitz 连续的,则f_1^+,f_2^+,f_1^-,f_2^-也是,故可以考虑下面常微分方程组的解

$$\frac{dS}{dt}=f_1^+(S,I),\qquad \frac{dI}{dt}=f_2^+(S,I); \tag{5}$$

$$\frac{dS}{dt}=f_1^-(S,I),\qquad \frac{dI}{dt}=f_2^-(S,I)。 \tag{6}$$

记式(5)的解为(S^+,I^+),式(6)的解为(S^-,I^-)。

引理 3[5] 令(S,I)是式(1～3)在$R_+\times\Omega$上的解,且值含于Σ_a^b内,若当$x\in\Omega$时,有

$$S^-(0)\leqslant S_0(x)\leqslant S^+(0),$$

$$I^-(0)\leqslant I_0(x)\leqslant I^+(0),$$

则对所有$(t,x)\in R_+\times\Omega$,有

$$S^-(t)\leqslant S(t,x)\leqslant S^+(t),$$

$$I^-(t)\leqslant I(t,x)\leqslant I^+(t)。$$

定理 1 记$\Sigma=\{(S,I):0\leqslant S\leqslant M_1;0\leqslant I\leqslant M_2\}$。其中$M_1,M_2$为适当大的正数,如果$(S_0(x),I_0(x))\in\Sigma,(x\in\Omega)$,则存在式(1～3)的惟一解$(S(t,x),I(t,x))\in\Sigma,(t,x)\in R_+\times\overline{\Omega}$。

证 明 由于$\frac{\partial f_1}{\partial I}<0,\frac{\partial f_2}{\partial S}>0$,$\{f_1,f_2\}$是混拟单调的,也容易证明$f_1,f_2$在$\Sigma$内关于$S,I$满足 Lipschitz 条件,且$(\underset{\sim}{S},\underset{\sim}{I})=(0,0)$为下解,对于适当大的$M_1,M_2>0$,$(\tilde{S},\tilde{I})=(M_1,M_2)$为上解。由单调方法可证$\Sigma$是式(1)的不变区域,且只要$(S_0(x),I_0(x))\in\Sigma,(x\in\Omega)$,则式(1～3)存在惟一的解$(S(t,x),I(t,x))\in\Sigma$。

3 解的有界性

定理 2 设(S,I)是式(1～3)的解,满足

$$0\leqslant S_0(x)\leqslant\overline{S},\quad 0\leqslant I_0(x)\leqslant\overline{I},(x\in\Omega),$$

则有 1) 在$R_+\times\overline{\Omega}$上,$S$(及$I$)恒为零或恒为正;

2) 对所有$(t,x)\in[0,+\infty)\times\overline{\Omega}$,有$S(t,x)\leqslant\max[\overline{S},1]=K_1$,且关于$x$一致地有

$$\limsup_{t\to\infty}S(t,x)\leqslant 1;$$

3) 存在常数$L>0$,使

$$\limsup_{t\to\infty}\int_\Omega I(t,x)dx\leqslant L|\Omega|。 \tag{7}$$

特别地,若$D=1$,则$I(t,x)$在逐点意义下是有界的(这里$L=a+\frac{K_1}{b}$;$|\Omega|$为区域Ω的量度大小)。

证 明 1) 因为$\overline{\Omega}$是紧的,则对任意$T>0$,$1-S-I$,$a(S-b)$在$[0,T]\times\overline{\Omega}$上有界,应用反应扩散方程的强极值原理,得证。

2) 由引理 1,$R_1=\{(S,I):0<S<K_1;0<I\}$是不变的,并且对所有$x\in\Omega$,$(S_0(x),I_0(x))\in\overline{R}_1$。因此,对$(t,x)\in\overline{R}_+\times\overline{\Omega}$,$(S(t,x),I(t,x))\in\overline{R}_1$,即有$S(t,x)\leqslant K_1$。计算$(f_1,f_2)$关于$R_+^2$的极大向量场得$(f_1^+,f_2^+)=(f_1(S,0),f_2(S,I))$。

考虑初值问题

$$\frac{dS^+}{dt}=f_1(S^+,0),\quad S^+(0)=\overline{S}。 \tag{8}$$

记式(8)的解为$S^+(t)$,直接求解得

$$S^+(t)=1+O(\exp(-\lambda t)),\quad (\lambda\text{ 为某正数})。$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}S^+(t)=1$,由引理 3,$\limsup\limits_{t\to\infty}S(t,x)\leqslant 1$。

3) 利用格林公式及边值条件可得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega(aS(t,x)+I(t,x))dx=$$

$$\int_\Omega aS(1-S)dx-\int_\Omega abIdx。$$

记 $p(t)=\int_\Omega[aS(t,x)+I(t,x)]dx$,

则 $\frac{dp}{dt}\leqslant aK_1|\Omega|-abp+a^2b\int_\Omega Sdx$。

因为S是有界的,故由微分不等式的性质知p是有界的,故$\int_\Omega Idx$有界。

下面证明式(7)。因对$\forall\varepsilon>0$,$\exists t_0$,使$S(t,x)\leqslant 1+\varepsilon$,对$t>t_0$,$x\in\Omega$成立,故对$t>t_0$有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\leqslant[aK_1+a^2b(1+\varepsilon)]|\Omega|-abp(t)。$$

积分该微分不等式得到

$$p(t)\leqslant[(L+a\varepsilon)|\Omega|+\{-(L+a\varepsilon)|\Omega|+p(t_0)\}\exp[-ab(t-t_0)],$$

因为 ε 是任意的，所以

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_\Omega I(t,x)\mathrm{d}x\leqslant\lim_{t\to+\infty}p(t)=L|\Omega|。$$

当 $D=1$ 时，$I(t,x)$ 在逐点意义下是有界的。

为了证明这个结论，可参看图1，这里无妨设 $\bar{S}\geqslant 1$。记 R 为图1中所示区域，若 $I_1>\bar{I}$ 选得足够大，容易证明向量场 $(f_1(S,I),f_2(S,I))$ 是不指向 R 外的（仅需要检查向量场沿 PQ 边不指向 R 外，其他三边显然成立）。在 PQ 边上，外法线方向为 $(a,1)$，而 $(af_1+f_2)|_{PQ}<0$，（当 $I>I_1$ 时）。又因为 $D=1$，由[4]知 R 为(1)的不变区域，所以，$(S(t,x),I(t,x))\in R$ 对 $(t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega$ 成立。

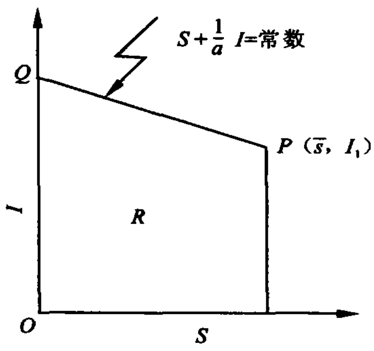

图1 R 为(1)的不变区域

Fig.1 R is a invariant domain of (1)

4 平衡解的稳定性

下面，主要讨论向量场 $(f_1(S,I),f_2(S,I))$ 的平衡点，即点 $(\bar{S},\bar{I})$ 使 $f_1(\bar{S},\bar{I})=f_2(\bar{S},\bar{I})=0$，这种点是式(1,2)的平衡解。坐标轴上平衡点为 $(0,0)$，$(1,0)$，当 $b<1$ 时，还有正平衡点 $(b,1-b)$，为了讨论简单，设平衡点都是非退化的，即向量场关于平衡点的线性化矩阵无零特征值。

关于点 $(0,0)$，线性化矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -ab\end{pmatrix}$，它有正特征值。如果只考虑反应扩散方程仅含 t 的解就可知 $(0,0)$ 不可能是式(1,2)的稳定平衡解。

关于点 $(1,0)$，线性化矩阵为 $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & a(1-b)\end{pmatrix}$，特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=a(1-b)$。要使 $(1,0)$ 为稳定平衡解，必须有 $b>1$。

下面证明 $b>1$ 也是 $(1,0)$ 为稳定的充分条件，由 $f_1(S,I)=0$ 解得 $I=1-S$，可知在 $(1,0)$ 附近，当 $b>1$ 时，$f_2(S,I)<0$，故在 $(1,0)$ 邻近，可画出一个矩形 Σ^-，在 Σ^- 边上，方向场方向如图2所示。

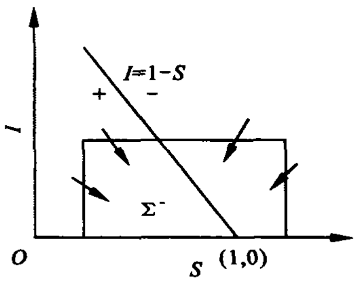

图2 (1,0)邻近方向场

Fig.2 The direction filed near (1,0)

计算 (f_1,f_2) 关于 Σ^- 的极大向量场为 $(f_1^+,f_2^+)=(f_1(S,0),f_2(S,I))$ 考虑到式(5)具有初值 $(S^+(0),I^+(0))\in\Sigma^-$ 的解，记其为 $(S^+(t),I^+(t))$。由于在 Σ^- 上 $f_2(S,I)<0$，故当 $t\to+\infty$ 时，$I^+(t)$ 呈指数形式，并趋于零。由引理3，$0\leqslant I(t,x)\leqslant I^+(t)$，$\lim\limits_{t\to+\infty}I(t,x)=0$。

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=f_1^+(S,I),\qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=f_2^+(S,I)。\tag{5}$$

引理2已证明 $\limsup\limits_{t\to+\infty}S(t,x)\leqslant 1$，为了证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}S(t,x)=1$，按下面证法：

对每一 $t>0$，令 $f_1^-(S,I,t)=\inf\{f_1(S,\theta)|I\leqslant\theta\leqslant I^+(t)\}$，这里 $I^+(t)$ 是式(5)满足 $(S^+(0),I^+(0))\in\Sigma^-$ 的解，考虑非自治常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=f_1^-(S,I,t)=S(1-S-I^+(t)),$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=f_2^-(S,I)=aI(S-b),$$

满足初值 $(S^-(0),I^-(0))\in\Sigma^-$ 的解 $(S(t),I(t))$，因为 $I^+(t)\to 0(t\to+\infty)$ 且 $S(t,x)\geqslant S(t)$，这样得到

$$\limsup_{t\to+\infty}S(t,x)\geqslant 1。$$

所以，当 $t\to+\infty$ 时，$S(t,x)\to 1$ 对 x 一致成立。这样证得 $b>1$ 是 $(1,0)$ 为稳定的充要条件。

进一步，还可以证明当 $b>1$ 时，$(1,0)$ 为全局渐近稳定的。事实上，若 $(S(t,x),I(t,x))$ 为式(1～3)的任意正解，考虑式(5)具有初值 $S^+(0)=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}S_0(x)$，$I^+(0)=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}I_0(x)$ 的解，由定理2，对 $\varepsilon_0<b-1$，当 t 充分大时，$S^+(t)\leqslant 1+\varepsilon_0$。这样，$\frac{\mathrm{d}I^+}{\mathrm{d}t}=aI^+(S^+-b)<-\beta I^+$，（$\beta$ 为某一正数），所以，

$\lim\limits_{t\to+\infty} I(t,x)=0$,同样,也可得到 $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t,x)=1$。

关于点 $(b,1-b)$,线性化矩阵为 $\begin{pmatrix} -b & -b \\ a(1-b) & 0 \end{pmatrix}$,特征根为 $\lambda=\frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{b^2-4ab(1-b)}$,要使 $(b,1-b)$ 为稳定平衡解,必须有 $b<1$。

下面证明如果 $D=1$,则 $b<1$ 也是 $(b,1-b)$ 为稳定的充分条件。首先考虑常微分方程系统

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=S(1-S-I),\quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=aI(S-b)。\tag{9}$$

容易证明当 $b<1$ 时,式(9)的平衡解 $(b,1-b)$ 是全局渐近稳定的。下面,利用文献[6]的结果,证明 $D=1, b<1$ 时,对于式(1),$(b,1-b)$ 也是全局渐近稳定的。

由定理 2 知,当 $D=1$ 时,式(1)的所有解有界,整体解是存在的。令

$$G_S=a(S-b-b\ln\frac{S}{b}),$$

$$G_I=a(I-1+b-(1-b)\ln\frac{I}{1-b})。$$

计算后知 $\frac{\mathrm{d}^2G_S}{\mathrm{d}S^2}>0, \frac{\mathrm{d}^2G_I}{\mathrm{d}I^2}>0$,并且

$$\frac{\mathrm{d}G_S}{\mathrm{d}S}f_1(S,I)+\frac{\mathrm{d}G_I}{\mathrm{d}I}f_2(S,I)=-a(S-b)^2\leqslant 0。$$

由文献[6]知式(1)的 ω 极限集与式(9)的 ω 极限集相同,式(1)的所有解趋于平衡解 $(b,1-b)$。总结以上,得到下面定理:

定理 3 式(1,2)的平衡解 $(0,0)$ 是不稳定的,$(1,0)$ 全局渐近稳定的充要条件是 $b>1$。$D=1$ 时,$(b,1-b)$ 全局渐近稳定的充要条件是 $b<1$。

5 传染病传播的阈值结果

将定理 3 的结论应用到有量纲模型(*)中,则结论为:$C>BK$ 是式(*)的平衡解 $(K,0)$ 为全局渐近稳定的充要条件。即当 $C>BK$ 时,如果开始时传染者密度很小,传染病不会传播出去,也不会形成地方病;即使开始时传染者并不少,但随着时间的发展,传染病很快也会消失,而健康种群密度最终稳定在负载容纳量 K 上。当 $C<BK$ 时,$(K,0)$ 为式(*)的不稳定平衡解,那么,即使开始时传染者密度很小,传染病最终也可能传播到很大区域,也可能会形成地方病。

由上面的讨论可知,为了防止疾病的传播,从理论上看就是要保证条件 $C>BK$ 成立。一方面,可以加大患病者的死亡率,(如目前欧洲为了防止口蹄疫的传播蔓延,就采取尽快宰杀染病牲畜的措施),另一方面,可用减少 B 值,即减小接触系数(比如,用隔离的手段),或者,减小 K 的值也可以达到目的,(可以用疏散健康种群的方法来实现)。

参考文献:

[1] MURRAY J D. Mathematical Biology. 2ed[M]. New York:Springer Verlag,1998.

[2] 胡志兴,王 辉. 一个具有非线性接触率和种群动力学的传染病模型[J]. 高校应用数学学报,1997,12(4):385-391.

[3] 张尚立,方华强. 一类传染病模型的扩散性质[J]. 生物数学学报,1999,14(3):264-268.

[4] 叶其孝,李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京:科学出版社,1990.

[5] CONWAY E,SMOLLER J. A comparison theorem for systems of reaction-diffusion equations [J]. Comm Part Diff Eqns,1977,2(7):679-697.

[6] 闵心畅,卢洪娣,廖进昆. 反应扩散系统的渐近性质[J]. 生物数学学报,2001,16(1):35-40.

(编 辑 曹大刚)

The study on a kind of diffusive *SI* epidemic model

DOU Jia-wei

(School of Sciences,Xi'an Jiaotong University,Xi'an 710049,China)

Abstract:A system of partial differential equations that describes a kind of diffusive *IS* epidemic is considered. Using monotone method and invariant region theory for the system of reaction-diffusion equations, the boundedness of solutions and threshold value result of the epidemic are obtained. The results can be used for prodicting and preventing the epidemic.

Key words:epidemic; diffusion; boundedness; threshold value