第七章

直接线性变换解法

Direct Linear Transformation---------DLT

§7.1　概述

0、背景

以往的航空摄影测量测图多半以内定向-相对定向-绝对定向的方案处理立体像对。

此时的内定向需已知像片的参数：

内方位元素、框标的理论坐标

即，所用相机为量测摄影机。

地面摄影测量按此种方案处理时也需使用量测摄影机。

目前存在的大量非量测摄影机，如 CCD 摄像头、普通数码相机，能否应用于近景摄影测量中是人们普遍关心的问题。

此类设备并不适合使用上述测量方案；况且近景摄影测量中相当多的测量成果都是基于目标上离散点的空间坐标。由离散点可生成等值线、生成目标的表面模型、计算面积、体积、坡度等成果。

是否有某种算法适合非量测摄影机的数据处理？

答案是肯定的。

一、定义

直接线性变换解法是建立像点的“坐标仪坐标”和相应物点的物方空间坐标直接的线性关系的解法.

二、直接线性变换解法的特点

1、不归心、不定向；

2、不需要方位元素的起始值；

3、物方空间需布置一组控制点；

4 、特别适合于处理非量测相机所摄影像；

5、本质是一种空间后交-前交解法。

§7.2 直接线性变换解法的基本关系式

直接线性变换解法原则上也是由共线条件方程式推演而来。

$$
\begin{cases}
x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\
y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \end{cases}$$

此式中：

（x,y）---像点的坐标仪坐标；

（x_0,y_0）---像主点的坐标仪坐标；

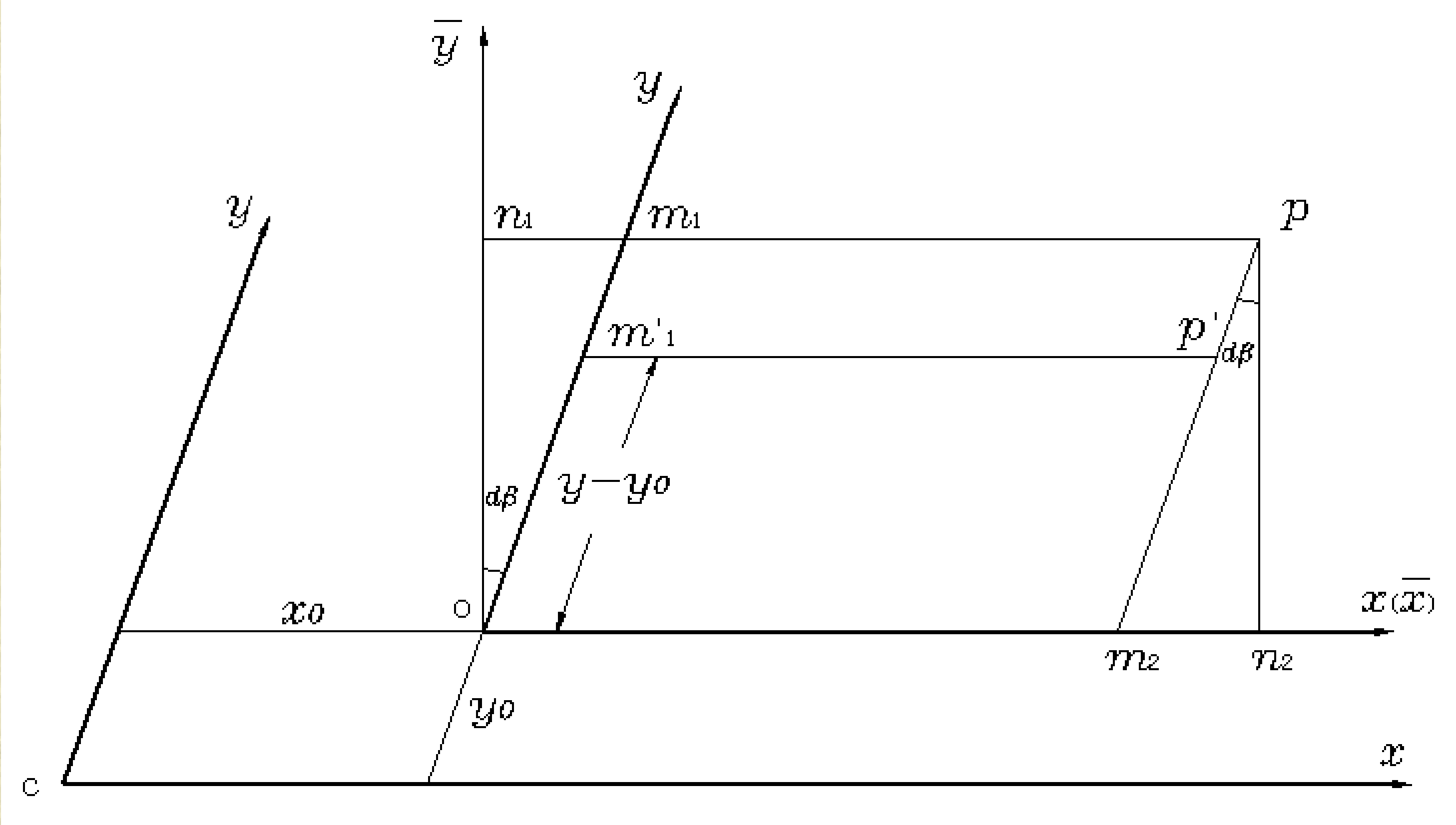
（X,Y,Z）---像点对应的物方点的物方空间坐标

（X_S,Y_S,Z_S）---摄影中心的物方空间坐标

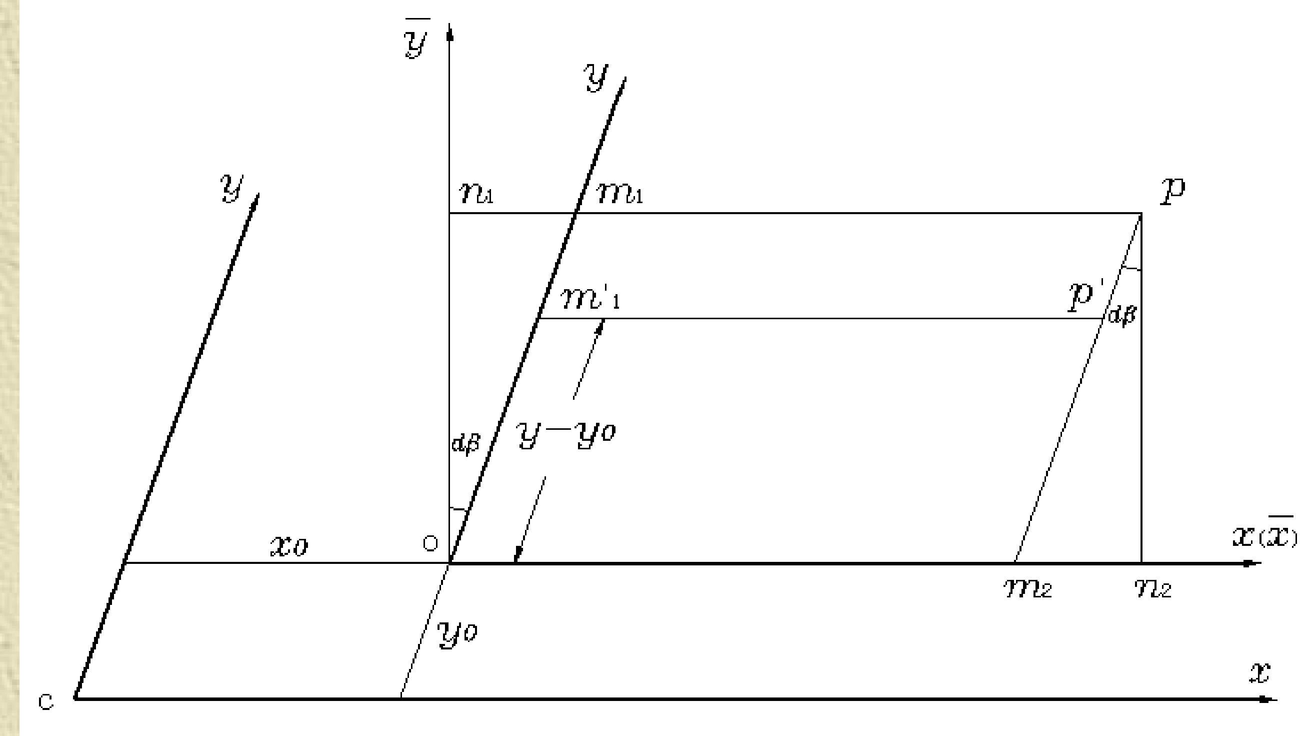
（a_i,b_i,c_i）---旋转矩阵中的方向余旋

（$\delta x, \delta y$）---线性误差改正数（包含$ds,d\beta$）

$$
\begin{cases}
x - x_0 + \delta x = -f\,\dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\[2ex]
y - y_0 + \delta y = -f\,\dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}
\end{cases}
$$

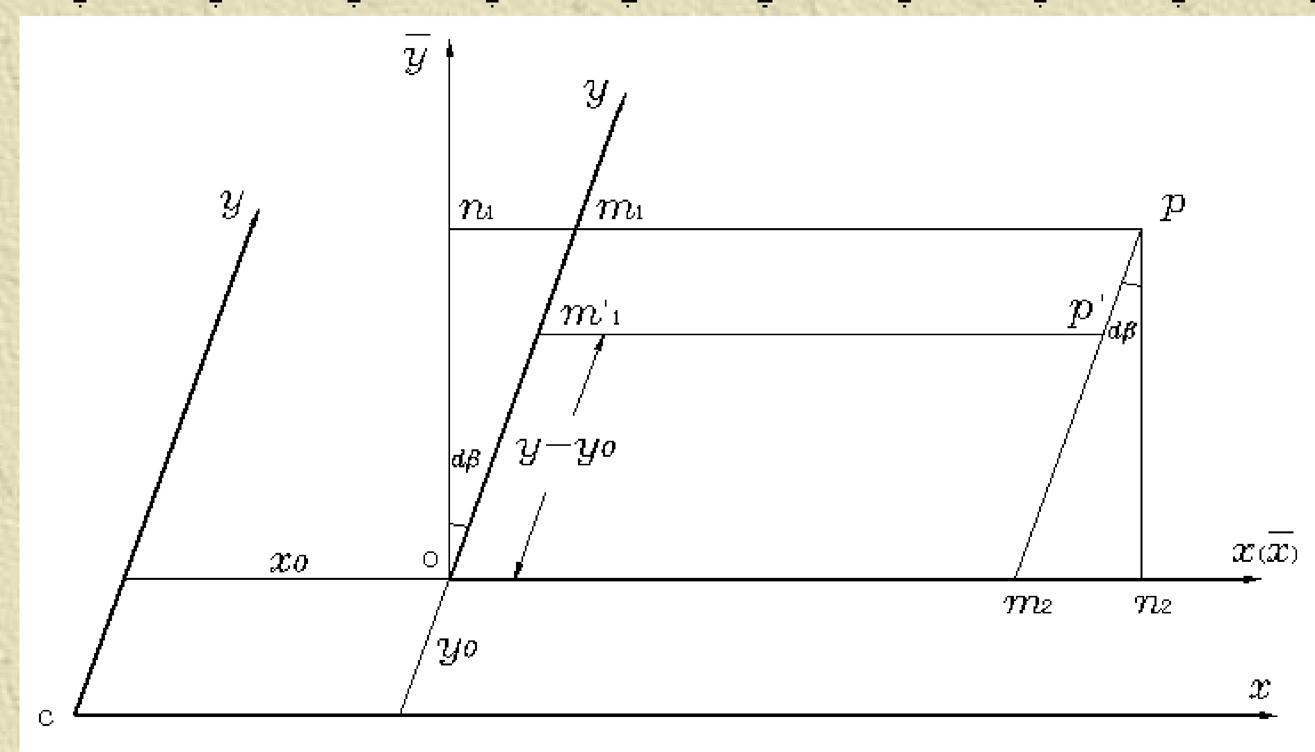


$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \end{cases}$$



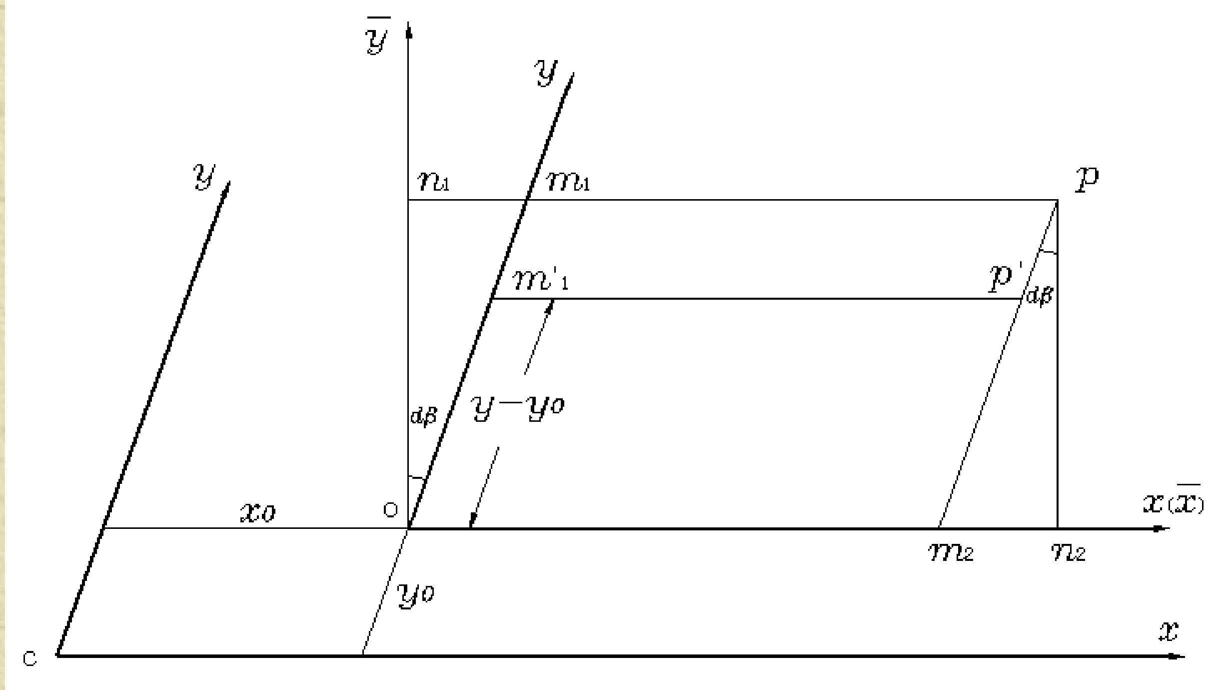
$(\bar{x}, \bar{y})[on_2, on_1]$ --- 以像主点为原点，不包含线性误差的像点p的坐标；

$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \end{cases}$$



$[om_2, om_1]---$ 以像主点为原点包含不正交性$d\beta$误差的像点p的坐标；

$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{cases}$$



$[om_2, om'_1]$--- 以像主点为原点包含不正交性 $d\beta$ 误差及比例尺不一误差 ds 的像点 p 的坐标（实际在 p'）；

$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \end{cases}$$

以上假设认为x轴方向无比例尺误差的影响。

设x轴方向比例系数为1，则y轴方向比例系数为 $(1+ds)$；

设x轴方向主距为f_x，则y轴方向主距为

$$f_y = f_x/(1+ds);$$

$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \end{cases}$$

比例尺不一误差ds可以认为是所用坐标仪x轴、y轴单位长度不一致及摄影材料不均匀变形等因素引起的。

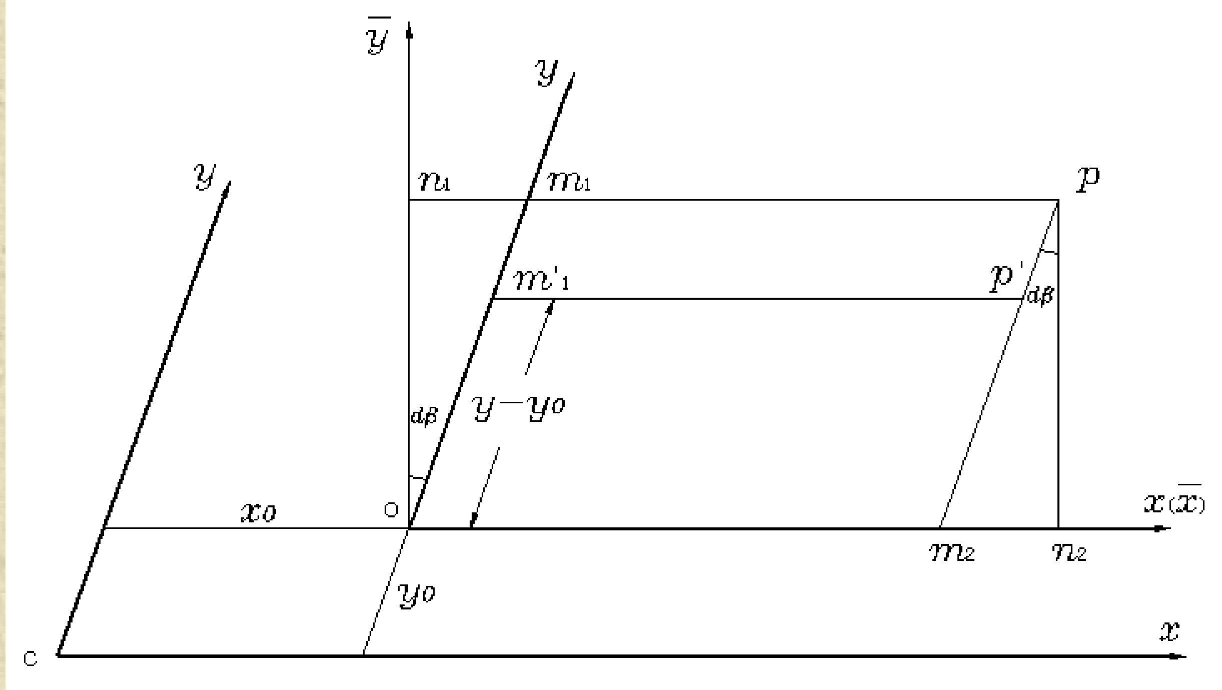
对数字相机而言，比例尺不一误差ds可以认为是像元x、y方向长度不等引起的。

不正交性误差可认为是所用坐标仪 x轴、y轴不垂直引起的；

对数字相机而言，不正交性误差可认为是像元x、y方向排列不垂直引起的。

$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \end{cases}$$

从图中可以看出：

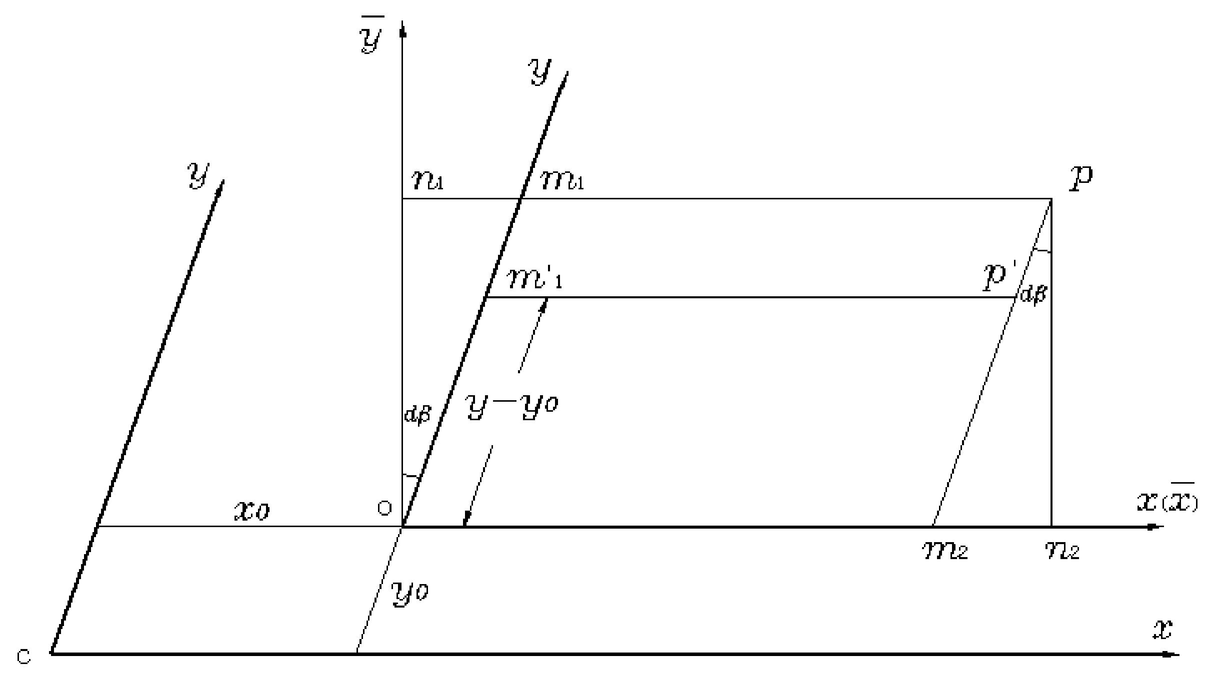


$$\delta x = on_2 - om_2 = m_2 p \cdot \sin d\beta = om_1 \cdot \sin d\beta$$
$$= (1 + ds)(y - y_0) \cdot \sin d\beta$$

$$\approx (y - y_0) \cdot \sin d\beta$$

$$\begin{cases} x - x_0 + \delta x = -f \dfrac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \\ y - y_0 + \delta y = -f \dfrac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} \end{cases}$$

从图中可以看出：



$$\delta y = on_1 - om_1' = om_1 \cdot \cos d\beta - om_1'$$

$$= (1 + ds)(y - y_0) \cdot \cos d\beta - (y - y_0)$$

$$= [(1 + ds) \cdot \cos d\beta - 1](y - y_0)$$

$$\approx (y - y_0) \cdot ds$$

$$\begin{cases} x-x_0+\delta x=-f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y-y_0+\delta y=-f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{cases} \quad (1)$$

将δx，δy代入式（1）

$$\begin{cases} x-x_0+(1+ds)(y-y_0)\cdot\sin d\beta+f_x\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}=0 \\ y-y_0+[(1+ds)\cdot\cos d\beta-1](y-y_0)+f_x\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x-x_0+(1+ds)\cdot\sin d\beta\cdot(y-y_0)+f_x\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}=0 \\ (1+ds)\cdot\cos d\beta(y-y_0)+f_x\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}=0 \end{cases}$$

（2）

$$
\begin{cases}
x - x_0 + (1+ds)\cdot\sin d\beta\cdot(y-y_0) + f_x \dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} = 0 \\
(1+ds)\cdot\cos d\beta(y-y_0) + f_x \dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} = 0
\end{cases}
\qquad (2)
$$

式（2）中含有11个独立参数：

6个外方位元素（X_S, Y_S, Z_S，ϕ，ω，κ）

3个内方位元素（x_0, y_0, f_x）

比例尺不一系数ds

x,y轴间的不正交系数$d\beta$

$$
\begin{cases}
x-x_0+(1+ds)\cdot\sin d\beta\cdot(y-y_0)+f_x\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}=0\\
(1+ds)\cdot\cos d\beta(y-y_0)+f_x\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}=0
\end{cases}
\quad (2)
$$

$$
\begin{cases}
x-x_0+(1+ds)\cdot\sin d\beta\cdot(y-y_0)+f_x\dfrac{a_1X+b_1Y+c_1Z+r_1}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}=0\\
(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot(y-y_0)+f_x\dfrac{a_2X+b_2Y+c_2Z+r_2}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}=0
\end{cases}
\quad (3)
$$

其中：

$$r_1=-(a_1X_S+b_1Y_S+c_1Z_S)$$

$$r_2=-(a_2X_S+b_2Y_S+c_2Z_S)$$

$$r_3=-(a_3X_S+b_3Y_S+c_3Z_S)$$

目的是向（x,y）与（X,Y,Z）间的直接关系推导

$$\begin{cases} x - x_0 + (1+ds)\cdot\sin d\beta\cdot(y-y_0) + f_x\dfrac{a_1X+b_1Y+c_1Z+r_1}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3} = 0 \\ (1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot(y-y_0) + f_x\dfrac{a_2X+b_2Y+c_2Z+r_2}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

导出基本关系式为（x,y）与（X,Y,Z）间的关系式，

即希望导出$x=f(X,Y,Z,\ldots)$

$y=f(X,Y,Z,\ldots)$的形式

由（3）第2式

$$(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot(y-y_0)+f_x\frac{a_2X+b_2Y+c_2Z+r_2}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}=0$$

$$(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot y-(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot y_0+\frac{a_2f_xX+b_2f_xY+c_2f_xZ+r_2f_x}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}=0$$

通分，并分别以X、Y、Z合并同类项

$$(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot y+\frac{a_2f_x-a_3(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot y_0}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}X$$

$$+\frac{b_2f_x-b_3(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot y_0}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}\cdot Y$$

$$+\frac{c_2f_x-c_3(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot y_0}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}\cdot Z$$

$$+\frac{r_2f_x-r_3(1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot y_0}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}=0$$

等式两边同除以

$(1+ds)\cos d\beta$

$$y+\frac{\left[\frac{a_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-a_3\cdot y_0\right]}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}\cdot X+\frac{\left[\frac{b_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-b_3\cdot y_0\right]}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}\cdot Y$$

$$+\frac{\left[\frac{c_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-c_3\cdot y_0\right]}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}\cdot Z+\frac{\left[\frac{r_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-r_3\cdot y_0\right]}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3}=0$$

分子、分母除以r_3

$$y+\frac{\frac{1}{r_3}\left[\frac{a_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-a_3\cdot y_0\right]}{\frac{a_3}{r_3}X+\frac{b_3}{r_3}Y+\frac{c_3}{r_3}Z+1}\cdot X+\frac{\frac{1}{r_3}\left[\frac{b_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-b_3\cdot y_0\right]}{\frac{a_3}{r_3}X+\frac{b_3}{r_3}Y+\frac{c_3}{r_3}Z+1}\cdot Y$$

$$+\frac{\frac{1}{r_3}\left[\frac{c_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-c_3\cdot y_0\right]}{\frac{a_3}{r_3}X+\frac{b_3}{r_3}Y+\frac{c_3}{r_3}Z+1}\cdot Z+\frac{\frac{1}{r_3}\left[\frac{r_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-r_3\cdot y_0\right]}{\frac{a_3}{r_3}X+\frac{b_3}{r_3}Y+\frac{c_3}{r_3}Z+1}=0$$

$$y+\frac{l_5X+l_6Y+l_7Z+l_8}{l_9X+l_{10}Y+l_{11}Z+1}=0$$

其中:

$$l_9=\frac{a_3}{r_3}\qquad l_{10}=\frac{b_3}{r_3}\qquad l_{11}=\frac{c_3}{r_3}$$

$$l_5 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{a_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - a_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_6 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{b_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - b_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_7 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{c_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - c_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_8 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{r_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - r_3 \cdot y_0\right]$$

$$r_2 = -(a_2 X_S + b_2 Y_S + c_2 Z_S)$$

$$r_3 = -(a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S)$$

$$l_8 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{r_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - r_3 \cdot y_0\right]$$

$$= \frac{1}{r_3}\left[\frac{-(a_2 X_S + b_2 Y_S + c_2 Z_S) f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} + (a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S)\cdot y_0\right]$$

$$= -\frac{1}{r_3}\left[\left(\frac{a_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - a_3 y_0\right) X_S + \left(\frac{b_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - b_3 y_0\right) Y_S \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - c_3 y_0\right) Z_S\right]$$

$$= -(l_5 X_S + l_6 Y_S + l_7 Z_S)$$

$$\begin{cases} x - x_0 + (1+ds)\cdot\sin d\beta\cdot(y-y_0) + f_x \dfrac{a_1X+b_1Y+c_1Z+r_1}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3} = 0 \\ (1+ds)\cdot\cos d\beta\cdot(y-y_0) + f_x \dfrac{a_2X+b_2Y+c_2Z+r_2}{a_3X+b_3Y+c_3Z+r_3} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

同理，由式（3）

第1式×cos$d\beta$-第2式×sin$d\beta$

经通分、合并同类项等一般数学运算

$$x+\frac{l_1X+l_2Y+l_3Z+l_4}{l_9X+l_{10}Y+l_{11}Z+1}=0$$

其中：

$$l_1=\frac{1}{r_3}(a_1f_x-a_2f_xtgd\beta-a_3x_0)$$

$$l_2=\frac{1}{r_3}(b_1f_x-b_2f_xtgd\beta-b_3x_0)$$

$$l_3=\frac{1}{r_3}(c_1f_x-c_2f_xtgd\beta-c_3x_0)$$

$$l_4=\frac{1}{r_3}(r_1f_x-r_2f_xtgd\beta-r_3x_0)$$

$$=-(l_1X_S+l_2Y_S+l_3Z_S)$$

基本关系式

$$\begin{cases} x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\[2ex]
y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0
\end{cases}
$$

其中l_i $(i=1,2...11)$系数是

外方位元素(X_S, Y_S, Z_S, f,w,k)

内方位元素(x_0, y_0, f)

坐标轴不正交系数d_b

坐标轴比例不一系数d_s

的函数。

§7.3 直接线性变换解法的解算过程

$$\begin{cases} x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} Xl_1 + Yl_2 + Zl_3 + l_4 + 0 + 0 + 0 + 0 + xXl_9 + xYl_{10} + xZl_{11} + x = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + Xl_5 + Yl_6 + Zl_7 + l_8 + yXl_9 + yYl_{10} + yZl_{11} + y = 0 \end{cases}$$

线性关系

$$\begin{cases} x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (l_1 + xl_9)X + (l_2 + xl_{10})Y + (l_3 + xl_{11})Z + (l_4 + x) = 0 \\ (l_5 + yl_9)X + (l_6 + yl_{10})Y + (l_7 + yl_{11})Z + (l_8 + y) = 0 \end{cases}$$

线性关系

$$\begin{cases} x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Xl_1 + Yl_2 + Zl_3 + l_4 + 0 + 0 + 0 + 0 + xXl_9 + xYl_{10} + xZl_{11} + x = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + Xl_5 + Yl_6 + Zl_7 + l_8 + yXl_9 + yYl_{10} + yZl_{11} + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (l_1 + xl_9)X + (l_2 + xl_{10})Y + (l_3 + xl_{11})Z + (l_4 + x) = 0 \\ (l_5 + yl_9)X + (l_6 + yl_{10})Y + (l_7 + yl_{11})Z + (l_8 + y) = 0 \end{cases}$$

一、解算步骤

后交

1、l_i系数近似值的解算；

2、内方位元素x_0,y_0的解算；

3、l_i系数精确值的解算；

迭代计算

前交

4、待定点“坐标仪坐标”改正；

5、待定点物方空间坐标近似值解算；

6、待定点物方空间坐标精确值解算；

解算l_i系数相当于后方交会；

解算物方空间坐标相当于前方交会；

二、具体解算步骤

1、 l_i系数近似值的解算

$$\begin{cases} x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

以li系数作为未知数

$$\begin{cases} Xl_1 + Yl_2 + Zl_3 + l_4 + 0 + 0 + 0 + 0 + xXl_9 + xYl_{10} + xZl_{11} + x = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + Xl_5 + Yl_6 + Zl_7 + l_8 + yXl_9 + yYl_{10} + yZl_{11} + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Xl_1+Yl_2+Zl_3+l_4+0+0+0+0+xXl_9+xYl_{10}+xZl_{11}+x=0 \\ 0+0+0+0+Xl_5+Yl_6+Zl_7+l_8+yXl_9+yYl_{10}+yZl_{11}+y=0 \end{cases}$$

由物方空间控制点及对应的像点解算li系数近似值

l_i系数的个数： 11个

物方空间至少布置6个控制点

解算l_i系数的近似值，不需平差计算

只需选取11个方程解算11个l_i未知数

即，从控制点中挑出“5. 5个控制点”列11个方程解算

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1X_1 & x_1Y_1 & x_1Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & y_1X_1 & y_1Y_1 & y_1Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2X_2 & x_2Y_2 & x_2Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & y_2X_2 & y_2Y_2 & y_2Z_2 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6X_6 & x_6Y_6 & x_6Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = 0$$

2、内方位元素x_0,y_0的解算

$$l_9 = \frac{a_3}{r_3}$$

$$l_{10} = \frac{b_3}{r_3}$$

$$l_{11} = \frac{c_3}{r_3}$$

顾及旋转矩阵的特性

$$l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2 = \frac{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}{r_3^2} = \frac{1}{r_3^2}$$

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$$

$$a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$$

$$l_1 = \frac{1}{r_3}(a_1 f_x - a_2 f_x tgd\beta - a_3 x_0)$$

$$l_2 = \frac{1}{r_3}(b_1 f_x - b_2 f_x tgd\beta - b_3 x_0)$$

$$l_3 = \frac{1}{r_3}(c_1 f_x - c_2 f_x tgd\beta - c_3 x_0)$$

$$l_9 = \frac{a_3}{r_3}$$

$$l_{10} = \frac{b_3}{r_3}$$

$$l_{11} = \frac{c_3}{r_3}$$

* 顾及旋转矩阵的特性

$$l_1 l_9 + l_2 l_{10} + l_3 l_{11}$$

$$= \frac{1}{r_3^2}(a_1 a_3 f_x - a_2 a_3 f_x tgd\beta - a_3^2 x_0)$$

$$+ \frac{1}{r_3^2}(b_1 b_3 f_x - b_2 b_3 f_x tgd\beta - b_3^2 x_0)$$

$$+ \frac{1}{r_3^2}(c_1 c_3 f_x - c_2 c_3 f_x tgd\beta - c_3^2 x_0)$$

$$= \frac{1}{r_3^2}(-a_3^2 - b_3^2 - c_3^2) x_0$$

$$= -\frac{1}{r_3^2} x_0$$

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$$

$$l_5 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{a_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - a_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_6 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{b_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - b_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_7 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{c_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - c_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_9 = \frac{a_3}{r_3}$$

$$l_{10} = \frac{b_3}{r_3}$$

$$l_{11} = \frac{c_3}{r_3}$$

* 顾及旋转矩阵的特性

$$l_5 l_9 + l_6 l_{10} + l_7 l_{11}$$

$$= \frac{1}{r_3^2}\left[\frac{a_2 a_3 f_x}{(1+ds)\cos d\beta} - a_3^2 y_0\right] + \frac{1}{r_3^2}\left[\frac{b_2 b_3 f_x}{(1+ds)\cos d\beta} - b_3^2 y_0\right] + \frac{1}{r_3^2}\left[\frac{c_2 c_3 f_x}{(1+ds)\cos d\beta} - c_3^2 y_0\right]$$

$$= \frac{1}{r_3^2}(-a_3^2 - b_3^2 - c_3^2) y_0$$

$$= -\frac{1}{r_3^2} y_0$$

$$l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2 = 1/r_3^2$$

$$l_1 l_9 + l_2 l_{10} + l_3 l_{11} = -x_0/r_3^2$$

$$l_5 l_9 + l_6 l_{10} + l_7 l_{11} = -y_0/r_3^2$$

由上述三个关系式，可以解算

$$x_0 = -\frac{l_1 l_9 + l_2 l_{10} + l_3 l_{11}}{l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2}$$

$$y_0 = -\frac{l_5 l_9 + l_6 l_{10} + l_7 l_{11}}{l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2}$$

3、 l_i系数精确值的解算

以控制点的像点“坐标仪坐标”为观测值，当有多余观测时，可进行平差处理。

设控制点的像点“坐标仪坐标”观测值改正数为 (v_x, v_y) ；

设控制点的像点“坐标仪坐标”的系统误差改正数为 $(\Delta x, \Delta y)$ ；

则基本关系式可写作

$$\begin{cases} x + v_x + \Delta x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + v_y + \Delta y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

其中：

$$\begin{cases} \Delta x = (x - x_0)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \cdots) + P_1[r^2 + 2(x - x_0)^2] + 2P_2(x - x_0)(y - y_0) \\ \Delta y = (y - y_0)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \cdots) + P_2[r^2 + 2(y - y_0)^2] + 2P_1(x - x_0)(y - y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta x=(x-x_0)(k_1r^2+k_2r^4+\cdots)+P_1[r^2+2(x-x_0)^2]+2P_2(x-x_0)(y-y_0)\\ \Delta y=(y-y_0)(k_1r^2+k_2r^4+\cdots)+P_2[r^2+2(y-y_0)^2]+2P_1(x-x_0)(y-y_0)\end{cases}$$

式中：

(x,y) ---像点的“坐标仪坐标”

x_0,y_0 ---像主点的“坐标仪坐标”

$k_1,k_2\ldots$ ---对称径向畸变系数

$P_1,P_2\ldots$ ---偏心畸变系数

r --- 像点的向径

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$\begin{cases} x + v_x + \Delta x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + v_y + \Delta y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

取

$$\begin{cases} \Delta x = (x - x_0) r^2 k_1 \\ \Delta y = (y - y_0) r^2 k_1 \end{cases}$$

令

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

式（4）可写作

$$\begin{cases} x + v_x + (x - x_0) r^2 k_1 + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{A} = 0 \\ y + v_y + (y - y_0) r^2 k_1 + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{A} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+v_x+(x-x_0)r^2k_1+\dfrac{l_1X+l_2Y+l_3Z+l_4}{A}=0 \\ y+v_y+(y-y_0)r^2k_1+\dfrac{l_5X+l_6Y+l_7Z+l_8}{A}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax+Av_x+A(x-x_0)r^2k_1+l_1X+l_2Y+l_3Z+l_4=0 \\ Ay+Av_y+A(y-y_0)r^2k_1+l_5X+l_6Y+l_7Z+l_8=0 \end{cases}$$

$$A=l_9X+l_{10}Y+l_{11}Z+1$$

$$\begin{cases} (l_9X+l_{10}Y+l_{11}Z+1)x+Av_x+A(x-x_0)r^2k_1+l_1X+l_2Y+l_3Z+l_4=0 \\ (l_9X+l_{10}Y+l_{11}Z+1)y+Av_y+A(y-y_0)r^2k_1+l_5X+l_6Y+l_7Z+l_8=0 \end{cases}$$

以l_i及$k1$为未知数，列误差方程式

$$\begin{cases} v_x = -\dfrac{1}{A}[Xl_1 + Yl_2 + Zl_3 + l_4 + xXl_9 + xYl_{10} + xZl_{11} + A(x - x_0)r^2 k_1 + x] \\ v_y = -\dfrac{1}{A}[Xl_5 + Yl_6 + Zl_7 + l_8 + yXl_9 + yYl_{10} + yZl_{11} + A(y - y_0)r^2 k_1 + y] \end{cases}$$

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

$$
\begin{array}{ccccc}
V & & M & L & W \\
\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_i = & - & \begin{bmatrix} \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{Z}{A} & \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{xX}{A} & \frac{xY}{A} & \frac{xZ}{A} & (x-x_0)r^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{Z}{A} & \frac{1}{A} & \frac{yX}{A} & \frac{yY}{A} & \frac{yZ}{A} & (y-y_0)r^2 \end{bmatrix}_i & \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \\ k_1 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \frac{x}{A} \\ \frac{y}{A} \end{bmatrix}_i
\end{array}
$$

$$V = ML - W$$

$$L = (M^T M)^{-1} M^T W$$

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

A值的计算过程也为迭代计算过程

每次迭代A值的计算是通过控制点求得的。

对不同的控制点像点“坐标仪坐标”列误差方程式，A值不同。

控制点的物方空间坐标不同。

思考题

物方空间布置有10个控制点，列出解求l_i系数精确解及畸变系数k_1的误差方程式。

4、待定点像点“坐标仪坐标”的系统误差改正

$$\begin{cases}\bar{x}=x+\Delta x=x+(x-x_0)r^2k_1\\ \bar{y}=y+\Delta y=y+(y-y_0)r^2k_1\end{cases}$$

注意：系统误差改正应选取对应的关系式

5、待定点物方空间坐标近似值的解算

$$\begin{cases} \bar{x} + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ \bar{y} + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

以物方空间坐标作为未知数

$$\begin{cases} (l_1 + \bar{x} l_9) X + (l_2 + \bar{x} l_{10}) Y + (l_3 + \bar{x} l_{11}) Z + (l_4 + \bar{x}) = 0 \\ (l_5 + \bar{y} l_9) X + (l_6 + \bar{y} l_{10}) Y + (l_7 + \bar{y} l_{11}) Z + (l_8 + \bar{y}) = 0 \end{cases}$$

由l_i系数精确解及待定点的像点“坐标仪坐标”解算

未知数的个数：3个

所摄像片数至少 2张像片

解算待定点物方坐标的近似值，不需平差计算

只需选取3个方程解算3个未知数

即，从两张以上的像片中挑出“1.5张”列3个方程解算

6、待定点物方空间坐标精确值的解算

以待定点的像点“坐标仪坐标”为观测值，当有多余观测时，可进行平差处理。

设待定点的像点“坐标仪坐标”观测值改正数为 $(v_{\bar{x}}, v_{\bar{y}})$

由基本关系式可写出：

$$\begin{cases} \bar{x} + v_{\bar{x}} + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ \bar{y} + v_{\bar{y}} + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

令

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

$$\begin{cases} \bar{x} + v_{\bar{x}} + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{A} = 0 \\ \bar{y} + v_{\bar{y}} + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{A} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\bar{x} + Av_{\bar{x}} + l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4 = 0 \\ A\bar{y} + Av_{\bar{y}} + l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8 = 0 \end{cases}$$

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

$$\begin{cases} (l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1)\bar{x} + Av_{\bar{x}} + l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4 = 0 \\ (l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1)\bar{y} + Av_{\bar{y}} + l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8 = 0 \end{cases}$$

以物方空间坐
标作为未知数

$$\begin{cases} v_{\bar{x}} = -\dfrac{l_1 + \bar{x} l_9}{A} X - \dfrac{l_2 + \bar{x} l_{10}}{A} Y - \dfrac{l_3 + \bar{x} l_{11}}{A} Z - \dfrac{l_4 + \bar{x}}{A} \\ v_{\bar{y}} = -\dfrac{l_5 + \bar{y} l_9}{A} X - \dfrac{l_6 + \bar{y} l_{10}}{A} Y - \dfrac{l_7 + \bar{y} l_{11}}{A} Z - \dfrac{l_8 + \bar{y}}{A} \end{cases}$$

V N S Q

$$\begin{bmatrix} v_{\bar{x}} \\ v_{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{l_1 + \bar{x} l_9}{A} & -\dfrac{l_2 + \bar{x} l_{10}}{A} & -\dfrac{l_3 + \bar{x} l_{11}}{A} \\ -\dfrac{l_5 + \bar{y} l_9}{A} & -\dfrac{l_6 + \bar{y} l_{10}}{A} & -\dfrac{l_7 + \bar{y} l_{11}}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{l_4 + \bar{x}}{A} \\ \dfrac{l_8 + \bar{y}}{A} \end{bmatrix}$$

$$V = NS - Q$$

$$S = (N^T N)^{-1} N^T Q$$

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

A值的计算过程也为迭代计算过程

在不同的像片上对同一待定点的像点"坐标仪坐标"列误差方程式，A值不同：

每张像片的l_i系数不同。

解算待定点的物方空间坐标为逐点解算

迭代计算终止的条件为：

前后两次迭代计算的差值小于设定的阈值

如小于物方坐标精度的1/10

思考题

物方空间布置有10个控制点，列出解求l_i系数精确解及畸变系数k_1，k_2的误差方程式。

§ 7. 4 内外方位元素 及ds、$d\beta$的解算

一、l_i系数的矩阵表达式

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_5 & l_6 & l_7 & l_8 \\ l_9 & l_{10} & l_{11} & 1 \end{bmatrix}$$

注意系数间的相似性

$$L = \frac{1}{r_3} L_{内方位} R^T L_{外方位直线元素}$$

其中：

$$r_3 = -(a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S)$$

$$L_{内方位} = \begin{bmatrix} f_x & -f_x tgd\beta & -x_0 \\ 0 & \dfrac{f_x}{(1+ds)\cos d\beta} & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$L_{外方位直线元素} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_S \\ 0 & 1 & 0 & -Y_S \\ 0 & 0 & 1 & -Z_S \end{bmatrix}$$

二、参数ds、$d\beta$的解算

$$l_1=\frac{1}{r_3}(a_1f_x-a_2f_xtgd\beta-a_3x_0)$$

$$l_2=\frac{1}{r_3}(b_1f_x-b_2f_xtgd\beta-b_3x_0)$$

$$l_3=\frac{1}{r_3}(c_1f_x-c_2f_xtgd\beta-c_3x_0)$$

* 顾及旋转矩阵的特性

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2$$

$$=\frac{1}{r_3^2}(f_x^2+f_x^2tg^2d\beta+x_0^2)$$

$$=\frac{1}{r_3^2}(\frac{f_x^2}{\cos^2 d\beta}+x_0^2)$$

$$r_3^2(l_1^2+l_2^2+l_3^2)-x_0^2=\frac{f_x^2}{\cos^2 d\beta}$$

令 $$r_3^2(l_1^2+l_2^2+l_3^2)-x_0^2=\frac{f_x^2}{\cos^2 d\beta}=\overline{A} \qquad (6)$$

$$l_5=\frac{1}{r_3}\left[\frac{a_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-a_3\cdot y_0\right]$$

$$l_6=\frac{1}{r_3}\left[\frac{b_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-b_3\cdot y_0\right]$$

$$l_7=\frac{1}{r_3}\left[\frac{c_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta}-c_3\cdot y_0\right]$$

* 顾及旋转矩阵的特性

$$l_5^2+l_6^2+l_7^2$$

$$=\frac{1}{r_3^2}\left[\frac{f_x^2}{(1+ds)^2\cos^2 d\beta}+y_0^2\right]$$

$$r_3^2(l_5^2+l_6^2+l_7^2)-y_0^2=\frac{f_x^2}{(1+ds)^2\cos^2 d\beta}$$

令 $$r_3^2(l_5^2+l_6^2+l_7^2)-y_0^2=\frac{f_x^2}{(1+ds)^2\cos^2 d\beta}=B \qquad (7)$$

$$l_1 = \frac{1}{r_3}(a_1 f_x - a_2 f_x tgd\beta - a_3 x_0)$$

$$l_2 = \frac{1}{r_3}(b_1 f_x - b_2 f_x tgd\beta - b_3 x_0)$$

$$l_3 = \frac{1}{r_3}(c_1 f_x - c_2 f_x tgd\beta - c_3 x_0)$$

$$l_5 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{a_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - a_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_6 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{b_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - b_3 \cdot y_0\right]$$

$$l_7 = \frac{1}{r_3}\left[\frac{c_2 f_x}{(1+ds)\cdot\cos d\beta} - c_3 \cdot y_0\right]$$

* 顾及旋转矩阵的特性

$$l_1 l_5 + l_2 l_6 + l_3 l_7$$

$$= \frac{1}{r_3^2}\left(x_0 y_0 - \frac{f_x^2 \sin d\beta}{(1+ds)^2 \cos^2 d\beta}\right)$$

$$r_3^2(l_1 l_5 + l_2 l_6 + l_3 l_7) - x_0 y_0 = \frac{-f_x^2 \sin d\beta}{(1+ds)^2 \cos^2 d\beta}$$

$$r_3^2(l_1 l_5 + l_2 l_6 + l_3 l_7) - x_0 y_0 = \frac{-f_x^2 \sin d\beta}{(1+ds)^2 \cos^2 d\beta} = C \tag{8}$$

$$r_3^2(l_1^2+l_2^2+l_3^2)-x_0^2=\frac{f_x^2}{\cos^2 d\beta}=\overline{A} \qquad (6)$$

$$r_3^2(l_5^2+l_6^2+l_7^2)-y_0^2=\frac{f_x^2}{(1+ds)^2\cos^2 d\beta}=B \qquad (7)$$

(6)/(7)得：

$$(1+ds)^2=\frac{\overline{A}}{B} \longrightarrow ds=\pm\sqrt{\frac{\overline{A}}{B}}-1 \longrightarrow ds=\sqrt{\frac{\overline{A}}{B}}-1$$

$$r_3^2(l_1 l_5 + l_2 l_6 + l_3 l_7) - x_0 y_0 = \frac{-f_x^2 \sin d\beta}{(1+ds)^2 \cos^2 d\beta} = C \qquad (8)$$

$$r_3^2(l_5^2 + l_6^2 + l_7^2) - y_0^2 = \frac{f_x^2}{(1+ds)^2 \cos^2 d\beta} = B \qquad (7)$$

(8)/(7)得：

$$-\sin d\beta(1+ds) = \frac{C}{B}$$

$$ds = \pm\sqrt{\frac{\bar{A}}{B}} - 1 \rightarrow 1 + ds = \pm\sqrt{\frac{\bar{A}}{B}}$$

$$\sin d\beta = \pm\sqrt{\frac{C^2}{\bar{A}B}}$$

Sin$d\,\beta$取与C值相反的解

三、内方位元素的解算

(x_0, y_0)已计算。

$$x_0 = -\frac{l_1 l_9 + l_2 l_{10} + l_3 l_{11}}{l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2}$$

$$y_0 = -\frac{l_5 l_9 + l_6 l_{10} + l_7 l_{11}}{l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2}$$

f_x, f_y 的计算：

由（6）式：

$$r_3^2(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) - x_0^2 = \frac{f_x^2}{\cos^2 d\beta} = \bar{A} \qquad (6)$$

$$f_x = \sqrt{\bar{A}} \cos d\beta$$

$$f_x = \sqrt{\bar{A}} \sqrt{1 - \frac{C^2}{\bar{A}B}} = \sqrt{\frac{\bar{A}B - C^2}{B}}$$

$$f_y = \frac{f_x}{1 + ds} = \sqrt{\frac{\bar{A}B - C^2}{B}} \Bigg/ \sqrt{\frac{\bar{A}}{B}} = \sqrt{\frac{\bar{A}B - C^2}{\bar{A}}}$$

四、外方位元素的解算

由l_4、l_8的表达式有

$$l_1X_S + l_2Y_S + l_3Z_S = -l_4$$

$$l_5X_S + l_6Y_S + l_7Z_S = -l_8$$

$$l_9X_S + l_{10}Y_S + l_{11}Z_S = \frac{a_3}{r_3}X_S + \frac{b_3}{r_3}Y_S + \frac{c_3}{r_3}Z_S$$

$$= -\frac{a_3X_S + b_3Y_S + c_3Z_S}{a_3X_S + b_3Y_S + c_3Z_S} = -1$$

由以上三个表达式可解求外方位直线元素

由l_9、l_{10}、l_{11}的表达式有

$$a_3 = r_3 l_9$$

$$b_3 = r_3 l_{10}$$

$$c_3 = r_3 l_{11}$$

$$l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2 = \frac{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}{r_3^2} = \frac{1}{r_3^2}$$

$$a_3 = \frac{l_9}{\sqrt{l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2}}$$

$$b_3 = \frac{l_{10}}{\sqrt{l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2}}$$

$$c_3 = \frac{l_{11}}{\sqrt{l_9^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2}}$$

。。。。。。

外方位角元素：

$$tg\varphi = \frac{a_3}{c_3}$$

$$\sin\omega = -b_3$$

$$tg\kappa = \frac{b_1}{b_2}$$

§7.5 有关技术问题

一、*DLT*解法的性质

本质是一种空间后方交会-空间前方交会解法。

用物方空间布置的控制点解求l_i系数（相当于后方交会）

用解求的l_i系数和两张以上待定点的坐标仪坐标解求待定点的物方空间坐标。

二、控制点空间分布的要求

控制点不能布设在空间的任意同一平面内。

引申为控制点布设在空间的起伏不大，解算结果也不稳定。

要求:

控制点在空间分布均匀；在像片上的构像范围大。

三、操作特点

* 像片可任意放置，不归心、不定向；

对数字影像，在图像坐标系中量测控制点和待定点的影像坐标。量测精度有像素级和子像素级。

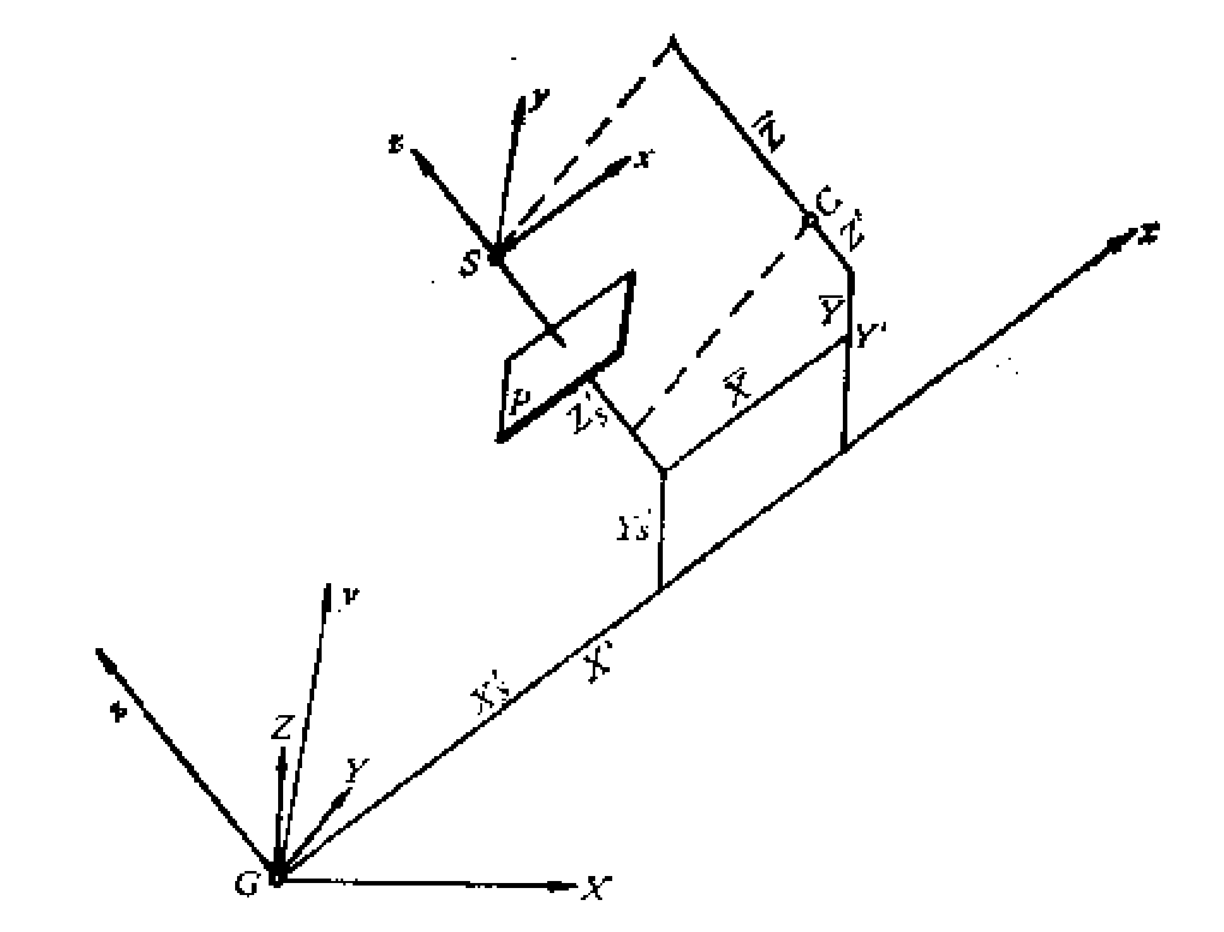
* 既可单片量测像点坐标，也可立体量测像点坐标；

四、摄站位置安置的要求

- 摄站点不能与物方坐标系原点重合

  原因是解算过程存在*A*值的解算

- *A*值的几何意义


S
C
P
G
X
Y
Z
X'
Y'
Z'

D-XYZ:物方空间坐标系

S-xyz:像空间坐标系

*D-xyz*与*S-xyz*坐标轴平行

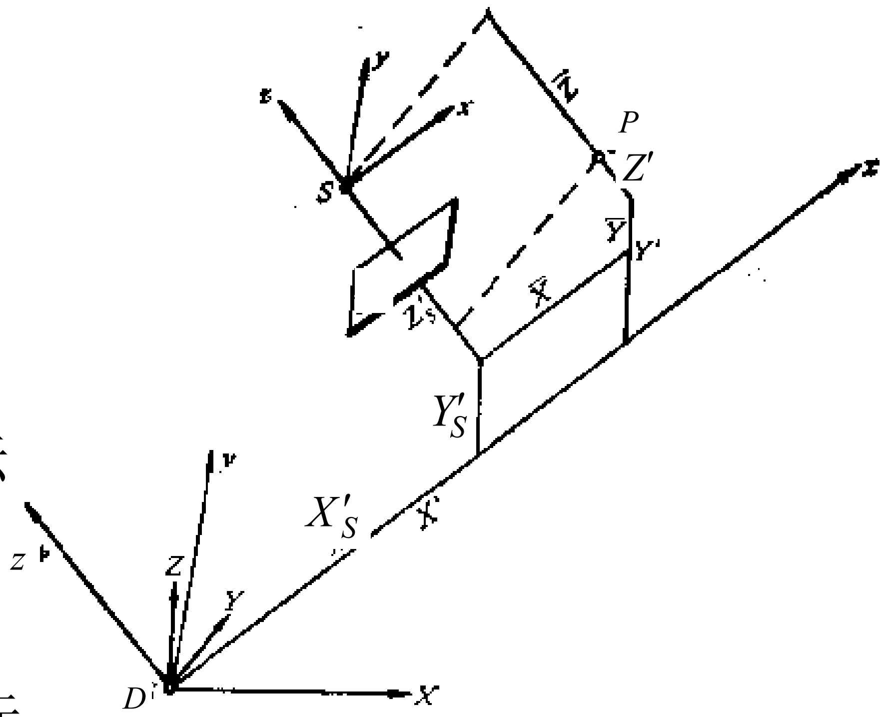
点*P*：(X,Y,Z)在*D-XYZ*中坐标

(X',Y',Z') 在*D-xyz*中坐标

$(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ 在*S-xyz*中坐标

点*S*：(X_S,Y_S,Z_S)在*D-XYZ*中坐标

(X'_S,Y'_S,Z'_S)在*D-xyz*中坐标



$$\begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' - X'_S \\ Y' - Y'_S \\ Z' - Z'_S \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X' - X'_S \\ Y' - Y'_S \\ Z' - Z'_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

取第三式

$$Z' - Z'_S = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z'_S = a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S$$

$$\begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix}$$

$$\overline{Z} = a_3 (X - X_S) + b_3 (Y - Y_S) + c_3 (Z - Z_S)$$

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

$$l_9 = \frac{a_3}{r_3}$$

$$l_{10} = \frac{b_3}{r_3}$$

$$l_{11} = \frac{c_3}{r_3}$$

$$r_3 = -(a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S)$$

$$A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$$

$$= 1 - \frac{a_3}{a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S} X$$

$$- \frac{b_3}{a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S} Y$$

$$- \frac{c_3}{a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S} Z$$

通分

$$= -\frac{a_3(X - X_S) + b_3(Y - X_S) + c_3(Z - Z_S)}{a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S}$$

$$= \frac{\bar{Z}}{Z'_S}$$

$$Z'_S = a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S$$

$$A = \frac{\overline{Z}}{Z'_S}$$

$$Z'_S = a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S$$

如果摄影中心在坐标系的原点

$$Z'_S = 0$$

解决方法：坐标重心化

五、影响精度的因素

1、精度：直接线性变换解法可提供1/5000摄影距离精度的测量成果。

2、影响直接线性变换解法精度的因素有：

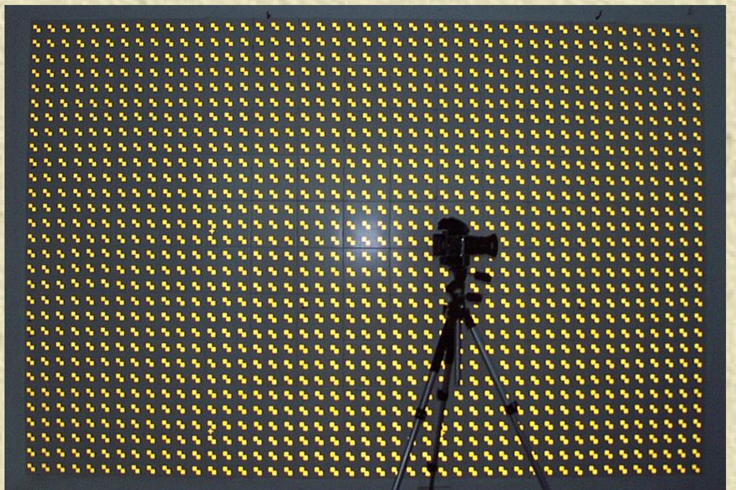
* 像点坐标量测精度；
* 控制点的 数量、质量、分布；
* 两像片主光轴的交会角(交会图形)；
* 像片张数；
* 非线性畸变误差的改正 程度；

§7.6 二维直接线性变换

一、基本关系式

可由三维直接线性变换基本关系式导出

被测目标为二维平面时，可认为Z为常数



$$\begin{cases} x + \dfrac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ y + \dfrac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x + \dfrac{\dfrac{l_1}{l_{11}Z+1}X + \dfrac{l_2}{l_{11}Z+1}Y + \dfrac{l_3 Z + l_4}{l_{11}Z+1}}{\dfrac{l_9}{l_{11}Z+1}X + \dfrac{l_{10}}{l_{11}Z+1}Y + 1} = 0 \\[2ex]
y + \dfrac{\dfrac{l_5}{l_{11}Z+1}X + \dfrac{l_6}{l_{11}Z+1}Y + \dfrac{l_7 Z + l_8}{l_{11}Z+1}}{\dfrac{l_9}{l_{11}Z+1}X + \dfrac{l_{10}}{l_{11}Z+1}Y + 1} = 0
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{l_1^* X + l_2^* Y + l_3^*}{l_7^* X + l_8^* Y + 1} = 0 \\ y + \dfrac{l_4^* X + l_5^* Y + l_6^*}{l_7^* X + l_8^* Y + 1} = 0 \end{cases}$$

也是投影变换公式