一类奇次周期Riccati型方程的周期解

窦霁虹

(西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:根据 m(m 为大于1的奇数)次代数方程的性质,得到了一类奇次周期 Riccati 型方程3个周期解的存在性和稳定性判别准则,推广了周尚仁等关于阿贝尔方程周期解的一些结果,且给出了定理实现的例子。

关 键 词:周期 Riccati 型方程;实分支曲线;周期解;存在性;稳定性

中图分类号:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2002)02-0114-03

本文主要讨论下列周期 Riccati 型方程[1]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(t)x^m+b(t)x+c(t), \tag{1}$$

其中 $a(t),b(t),c(t)\in C[R]$,$a(t+\omega)=a(t)$,$b(t+\omega)=b(t)$,$c(t+\omega)=c(t)$,ω 为最小正周期,m 为大于1的奇数。

文献[2]讨论了 $m=3$ 时,式(1)周期解的存在性与稳定性,这里将讨论 m 为大于1的奇数时,式(1)3个 ω 周期解的存在性与稳定性,它对一般的 Riccati 型方程周期解的研究起着重要的作用[1]。

引理1 代数方程

$$x^m+px+q=0, \tag{2}$$

其中 $p,q\in R$,$m(m>1)$ 为奇数,至少有一个实根,最多有3个的实根。

引理2 代数式(2)当

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^2-\left(\frac{-p}{m}\right)^{\frac{2m}{m-1}}<0, \tag{3}$$

时,有且仅有3个不相同的实根 x_i^0,$i=1,2,3$,且

$$x_1^0<-\left(\frac{-P}{M}\right)^{\frac{1}{m-1}}<x_2^0<\left(\frac{-P}{M}\right)^{\frac{1}{m-1}}<x_3^0。$$

证 明 设 $f(x)=x^m+px+q$,由式(3)得 $f'(x)=mx^{m-1}+p=0$ 只有两个实根,分别为 $\pm\left(\frac{-p}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}$,而

$$f\left[-\left(\frac{-p}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]\cdot f\left[\left(\frac{-p}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]=$$

$$(m-1)^2\left[\left(\frac{q}{m-1}\right)^2-\left(\frac{-p}{m}\right)^{\frac{2m}{m-1}}\right]<0。$$

因此,式(2)有且仅有3个不相同的实根 x_i^0,$i=1,2,3$,且

$$x_1^0<-\left(\frac{-P}{M}\right)^{\frac{1}{m-1}}<x_2^0<\left(\frac{-P}{M}\right)^{\frac{1}{m-1}}<x_3^0。\quad\square$$

我们知道,式(1)的实分支曲线[3]就是式(1)的代数示性方程

$$a(t)x^m+b(t)x+c(t)=0,$$

的实解 $x^0(t)$。$x^0(t)$ 显然为周期函数,$x^0(t)$ 的值域所在的区域为闭矩形域

$$D(x^0(t))=\{(t,x)\mid 0\leqslant x\leqslant\omega,$$
$$\min_{t\in[0,\omega]}x^0(t)\leqslant x\leqslant\max_{t\in[0,\omega]}x^0(t)\}。$$

定义1 $x_1^0(t)$,$x_2^0(t)$ 是式(1)的两个实分支曲线,若 $D(x_1^0(t))\cap D(x_2^0(t))=\varnothing$(空集),则称实分支曲线 $x_1^0(t)$,$x_2^0(t)$ 是分离的。

定义2 若式(1)的任意两个实分支曲线都是分离的,则称实分支曲线是相互分离的。

由引理2得

引理3 若式(1)满足条件

$$\left[\frac{c(t)}{(m-1)a(t)}\right]^2-\left[\frac{-b(t)}{ma(t)}\right]^{\frac{2m}{m-1}}<0, \tag{4}$$

则式(1)有且仅有3个不同的实分支曲线 $x_i^0(t)$,$i=1,2,3$ 且

$$x_1^0(t)<-\left(\frac{-b(t)}{ma(t)}\right)^{\frac{1}{m-1}}<x_2^0(t)<$$

收稿日期:2001-12-14

基金项目:陕西省重点学科资助项目(00029)

作者简介:窦霁虹(1962-),女,陕西富平人,西北大学副教授,主要从事微分方程理论及应用方面的研究。

$\left(\frac{-b(t)}{ma(t)}\right)^{\frac{1}{m-1}} < x_3^0(t)$。

由引理3易得

引理4　若式(1)满足式(4)，且$\frac{b(t)}{a(t)}$是不等于零的常数，则式(1)有且仅有3个不同的实分支曲线且相互分离。

引理5　若式(1)中$a(t)b(t)<0, c(t)\equiv 0, \forall t \in [0,\omega]$，则式(1)有且仅有3个不同的实分支曲线且相互分离。

证　明　当$c(t)\equiv 0$时，式(1)为

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^m + b(t)x。$$

由条件$a(t)b(t)<0$得上方程有3个不同的实分支曲线$x_2^0(t)=0, x_1^0, x_3^0 = \pm\left[\frac{-b(t)}{a(t)}\right]^{\frac{1}{m-1}}$，显然它们是相互分离的。□

1　主要结果

定理1　若$a(t), b(t), c(t)$满足式(4)，且

1) $\forall t\in[0,\omega], a(t)\neq 0$；

2) 式(1)的实分支曲线相互分离。

则式(1)至少存在3个ω周期解$x_1(t)<x_2(t)<x_3(t)$，当$a(t)>0$时，$x_2(t)$为稳定的，$x_1(t), x_3(t)$为不稳定的；当$a(t)<0$时，$x_2(t)$为不稳定的，$x_1(t), x_3(t)$为稳定的。

证　明　只证$a(t)>0$的情形，$a(t)<0$时类似可证。

式(1)的代数示性方程为

$$a(t)x^m + b(t)x + c(t) = 0,$$

令$p(t)=\frac{b(t)}{a(t)}, q(t)=\frac{c(t)}{a(t)}$，则上式可化为

$$x^m + p(t)x + q(t) = 0。\tag{5}$$

由条件1)及引理3，$\forall t\in[0,\omega]$，式(1)有且仅有3个不同的实分支曲线$x_i^0(t), i=1,2,3$且$x_1^0(t)<x_2^0(t)<x_3^0(t)$，再由条件2)可令

$$f_1(t) = \min_{t\in[0,\omega]}\{x_1^0(t)\} - 1;$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2}\{\min_{t\in[0,\omega]}\{x_2^0(t)\} + \max_{t\in[0,\omega]}\{x_1^0(t)\}\};$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2}\{\min_{t\in[0,\omega]}\{x_3^0(t)\} + \max_{t\in[0,\omega]}\{x_2^0(t)\}\};$$

$$f_4(t) = \max_{t\in[0,\omega]}\{x_3^0(t)\} + 1。$$

易见，$f_i(t), i=1,2,3,4$均为常函数，则有

$$\frac{df_i(t)}{dt} \equiv 0, t\in[0,\omega], i=1,2,3,4。$$

又由条件2)得，

$f_1(t)<x_1^0(t)<f_2(t)<x_2^0(t)<f_3(t)<x_3^0(t)<f_4(t)$。设$x=x(t)(t\geqslant 0)$是式(1)的任一解，则该解沿曲线$y=f(t)$的导数为

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=f_k(t)} = a(t)p(t,f_k(t))(f_k(t)-x_1^0(t))\cdot (f_k(t)-x_2^0(t))(f_k(t)-x_3^0(t)),$$

其中$p(t,x)=x^{m-3}+\alpha_1(t)x^{m-4}+\cdots+\alpha_{m-3}(t)$，我们可得：$\forall t\in[0,\omega], x\in R$(实数集合)，都有$p(t,x)>0$。

事实上，当$m=3$时，$p(t,x)=1>0$，当$m>3$时，假如上结论不成立，由于m为奇数，则$p(t,x)$是关于x的偶次多项式，所以，$\exists t_0\in[0,\omega], x_0\in R$，使$p(t_0,x_0)=0$，即$x_0^{m-3}+\alpha_1(t_0)x_0^{m-4}+\cdots+\alpha_{m-3}(t_0)=0$，则$x=x_0$是方程

$$a(t_0)p(t_0,x)(x-x_1^0(t_0))(x-x_2^0(t_0))\cdot (x-x_3^0(t_0))=0,\tag{6}$$

的实根，由引理1知，这与式(6)最多有3个实根相矛盾。故上结论成立。

因此，$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=f_1(t)} < 0 = \frac{df_1}{dt}$，

同理可得

$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=f_2(t)} > \frac{df_2}{dt}, \frac{dx}{dt}\Big|_{x=f_3(t)} < \frac{df_3}{dt}, \frac{dx}{dt}\Big|_{x=f_4(t)} > \frac{df_4}{dt}$，由文献[3]定理2.1得，式(1)至少存在3个$\omega$周期解$x_1(t)<x_2(t)<x_3(t)$，并由证明过程知，当$a(t)>0$时，$x_2(t)$为稳定的，$x_1(t), x_3(t)$为不稳定的。类似可证$a(t)<0$的情形。

当$m=3$时，式(1)是*Abel*方程。文献[2]中定理3.3正是这里定理1当$m=3$时的特例。

定理1的条件1)易于验证，而条件2)并非如此，由引理4与引理5给出两个实用性的结果。

推论1　若

1) $\forall t\in[0,\omega]$，即$a(t)\neq 0$且$a(t), b(t), c(t)$满足式(4)；

2) $\frac{b(t)}{a(t)}$为非零常数，则式(1)至少存在3个ω周期解$x_1(t)<x_2(t)<x_3(t)$，当$a(t)>0$时，$x_2(t)$为稳定的，$x_1(t), x_3(t)$为不稳定的；当$a(t)<0$时，$x_2(t)$为不稳定的，$x_1(t), x_3(t)$为稳定的。

显然，当式(1)为常系数时也有相应的结论。

推论2　若式(1)中$a(t)b(t)<0, c(t)\equiv 0, \forall t\in[0,\omega]$，则式(1)至少存在3个$\omega$周期解$x_1(t)<x_2(t)<x_3(t)$，当$a(t)>0$，$x_2(t)$为稳定的，$x_1(t)$，

$x_3(t)$ 为不稳定的；当 $a(t)<0$ 时，$x_2(t)$ 为不稳定的，$x_1(t)$，$x_3(t)$ 为稳定的。

定理 2 若式(1)中 $\forall t\in[0,\omega]$，$c(t)\equiv 0$，$b(t)$ 满足 $\int_0^{\omega} b(t)\mathrm{d}t\neq 0$，且一阶周期线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(1-m)b(t)y+(1-m)a(t)。$$

1) 有惟一的正 ω 周期解时，则式(1)有且仅有 3 个不同的实 ω 周期解；2) 有惟一的负 ω 周期解时，则式(1)仅有平凡的实 ω 周期解。

证明 当 $c(t)\equiv 0$ 时，式(1)为

$$\dot{x}=a(t)x^m-b(t)x。\tag{7}$$

显然式(7)有平凡的周期 ω 解 $x(t)=0$。

令 $y=\dfrac{1}{x^{m-1}}$，

则式(7)化为一阶周期线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-m)b(t)y+(1-m)a(t)。\tag{8}$$

由于 $\int_0^{\omega} b(t)\mathrm{d}t\neq 0$，因此式(8)有惟一的 ω 周期解 $y_0(t)$，而 $x^{1-m}=y_0(t)$，若 $y_0(t)>0$，$t\in[0,\omega]$，m 为大于 1 的奇数，则式(7)有且仅有两个非平凡的实 ω 周期解 $x(t)=\pm[y_0(t)]^{\frac{-1}{m-1}}$，从而式(1)有且仅有 3 个不同的实 ω 周期解；若 $y_0(t)<0$，$t\in[0,\omega]$，$x^{1-m}=y_0(t)$ 无实解，则式(1)仅有平凡的实 ω 周期解。 □

推论 3 若式(7)满足 $a(t)b(t)>0$，$\forall t\in[0,\omega]$，则式(7)无非平凡的实 ω 周期解；若 $a(t)b(t)<0$，$\forall t\in[0,\omega]$，则式(7)有且仅有 3 个不同的实 ω 周期解。

证 明 由于 $a(t)b(t)>0$，$\forall t\in[0,\omega]$，不妨设 $a(t)>0$，$b(t)>0$，因此，可得 $\int_0^{\omega} b(t)\mathrm{d}(t)\neq 0$，式(8)有惟一的 ω 周期解。

设 $f_1(t)\equiv 0$，$f_2(t)=-M$，(M 为充分大的正数)，则有 $\dfrac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}=0$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{y=f_1(t)}=(1-m)b(t)0+(1-m)a(t)<0$，$\dfrac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=0$，总存在充分大的正数 M 使得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{y=f_2(t)}=-(1-m)b(t)M+(1-m)a(t)>0$，由文献[3]定理 2.1 得，式(8)有惟一的负实 ω 周期解。同理可得，当 $a(t)b(t)<0$，$\forall t\in[0,\omega]$，式(8)有惟一的正实 ω 周期解，由定理 2、推论 3 结论成立。 □

2 例子

考虑 Riccati 型方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{m-1}x^m-\frac{1}{m-1}(-\sin t+4\mathrm{e}^{-\cos t})x$$

其中 m 为大于 1 的奇数，易于验证上方程既满足定理 1 的条件也满足定理 2 的条件，我们确实可求得其有且只有 3 个 ω 周期解为 $x_1(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{m-1}\cos t}$，$x_2(t)=0$，$x_3(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{m-1}\cos t}$，并且 $x_2(t)$ 为稳定的，$x_1(t)$，$x_3(t)$ 为不稳定的。

参考文献：

[1] DOU Ji-hong, ZHANG Di. Periodic solutions of a class of periodic Riccati-type equation[J]. Annof Diff Equs 1993, 9(3): 305-310.

[2] 周尚仁，苏殿贞. 阿贝尔方程的周期解[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，1984，20(数学专号)：57-62.

[3] 窦霁虹. 周期 Riccati 型方程周期解的存在性与稳定性[J]. 工程数学学报，1994，11(2)：89-94.

(编　辑　曹大刚)

Periodic solutions on a class of periodic Riccati-type equation with the odd degree

DOU Ji-hong

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: *The existence and stability criteria of periodic solutions on a class of periodic Riccati-type equation are obtained on the basis of the characteristies of algebraic equation, some results obtained by Zhou Shangren and are extended, and an example is given.*

Key words: periodic Riccati-type equation; real branch curve; periodic solution; existence; stability