

一种分形插值函数的若干性质

李红达, 叶正麟, 彭国华

(西北工业大学 数学与信息科学系, 陕西 西安 710072)

摘要:由定义在 Sierpinski 垫片上的一种质量分布导出一个分形插值函数, 称之为质量分布分形插值函数, 给出了这类分形插值函数的 Hölder 连续性等若干性质, 这些性质反映了 Sierpinski 垫片的分形结构, 可用来对 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度进行估计。

关键词:分形; Sierpinski 垫片; Hausdorff 测度; 插值函数

中图分类号:O18 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274X(2001)03-0208-04

分形集的分形维数的估计和计算是分形理论中的一个基本问题, 而分形集的 Hausdorff 维数及在一定维数下的 Hausdorff 测度的估计在理论上具有更重要的意义。三角 Sierpinski 垫片就是经典分形集之一, 它具有严格的自相似性, 是一个结构十分良好的分形集, 它的 Hausdorff 维数 $s = \log_2 3$, 但是它的 s 维的 Hausdorff 测度的准确值, 甚至上、下界的估计都是一个十分困难的问题, 目前尚未得到解决。为估计其 Hausdorff 测度的精确值, 可在其上定义一个质量分布, 由此导出了相应质量分布的分形插值函数。三角 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度也是一种质量分布, 故它也导出一个类似的函数, 于是可以将 Hausdorff 测度的估计问题转化为求这类分形插值函数的极值问题^[1]。对这类函数性质的研究, 将有益于对其 Hausdorff 测度的精确值进行估计。

1 Sierpinski 垫片上质量分布与分形的插值函数

三角 Sierpinski 垫片生成如下: 在平面 R^2 上, 设 S_0 是边长为 1 的等边三角形, 连接 S_0 三边的中点, 将 S_0 分为 4 个边长为 $1/2$ 的小三角形, 去掉中间小三角形的内部, 剩下的记为 S_1 。对 S_1 中每个小三角形重复上述操作, 得到 S_2 。一般地, 对 $S_n (n \geq 0)$ 的 3^n 个边长为 $1/2^n$ 的小三角形(记为 T_n)进行上述操作

得到 S_{n+1} 。这样, 便得到一个递减的集合序列 $\{S_n\}$, 集合 $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ 就是三角 Sierpinski 垫片。在 S_0 上定义分布函数 μ , 使满足:

$$\begin{cases} \mu(S_0) = 1, \\ \mu(T_n) = \frac{1}{3^n}, (n = 1, 2, \dots) \\ \mu(S_0 - S) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

那么, μ 是 S_0 上的一个测度, μ 限制在 S 上为 S 上的一个质量分布。现以 S_0 的相邻两边为轴, 如图 1 建立仿射坐标系。在 R 上定义函数如下:

$$f(x) = \mu(S \cap B_x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

其中 $B_x = \{(s, t) : -\infty < s \leq x\}$ 为此仿射坐标系中的集合。显然, $f(x)$ 单调连续且满足

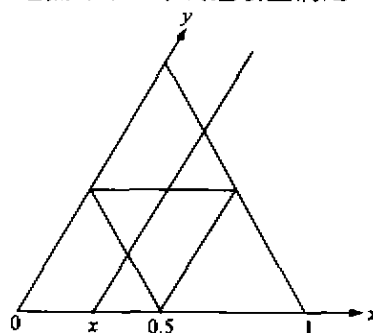


图 1 仿射坐标系

Fig. 1 Affine coordinate system

- 1) 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 1$ 。
- 2) 一般地

收稿日期: 2000-05-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071060)

作者简介: 李红达(1960-), 男, 陕西延安人, 西北工业大学博士生, 从事分形几何学、计算机图形学、数字图像处理等研究。

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}f\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{k+1}{2^n}\right),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

在 $X = [0, 1] \times [0, 1]$ 上建立一个迭代函数系统 $\{X; \omega_i, i = 1, 2\}$, 其中

$$\begin{aligned} \omega_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ \omega_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

那么, 由迭代函数系统理论知其必存在吸引子^[2], 且为某个连续函数的图像, 记为 G . 由 $f(x)$ 的性质不难得到: $G = \{(x, f(x)); 0 \leq x \leq 1\}$, 即 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上就是由迭代函数系统 $\{X; \omega_i, i = 1, 2\}$ 所决定的分形插值函数 (见图 2). 这样, 就不难得到它的 Hausdorff 维数为 1. 存在一个与 $f(x)$ 相似的函数 $g(x)$, 定义如下:

$$g(x) = \mu(S \cap B_x), \quad -\infty < x < \infty,$$

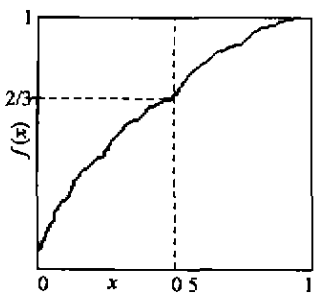


图 2 分形插值函数 $f(x)$

Fig. 2 Fractal interpolation function $f(x)$

其中 $B_x = \{(s, t): -\infty < s + t \leq x\}$. 在 $[0, 1]$ 上, $g(x)$ 是由下面定义在 $X = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的迭代函数系统 $\{X; T_i, i = 1, 2\}$ 所决定的.

$$\begin{aligned} T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是具有自相似性的分形函数^[3], 它可以通过自身的伸缩、平移的叠加而得到. 下面, 主要给出 $f(x)$ 的性质, 而 $g(x)$ 的性质则类似地得到.

2 质量分布分形插值函数的性质

性质 1 $f(x) = \frac{2}{3}f(2x) + \frac{1}{3}f(2x-1)$.

性质 2 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(|x_1 - x_2|)$.

性质 1 与性质 2 是显然的. 图 3 是由二元函数

$$F(x_1, x_2) = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{f(|x_1 - x_2|)}, \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

所定义的平面分形灰度图, 由此可以看出它具有自相似性. 它的自相似性是由 Sierpinski 垫片本身的自相似性所产生的.



图 3 分形灰度图

Fig. 3 Fractal gray image

性质 3 $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{2}{3}f(x), g\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{3}g(x), 0 \leq x \leq 1$.

证明 由性质 1 得, $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{2}{3}f(x) + f(x-1)$, 由于 $x-1 < 0$, 因此 $f(x-1) = 0$. 同理, 可证另一等式.

性质 4 (Hölder 连续性) 对 $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$, 有 $M_1|x_1 - x_2|^a \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq M_2|x_1 - x_2|^{a-1}$. 其中 $M_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^a} \leq 1, M_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{a-1}} \geq 1$. 其中 a 为 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 维数.

证明 1) 对任意的 x_1, x_2 , 若 $x_1 = x_2$, 则结论成立. 否则, 设 $x = x_1 - x_2 > 0$, 由性质 2 与性质 3 可得 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(|x_1 - x_2|) = \frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$. 那么,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)^{a-1}} \leq \frac{\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)}{x^{a-1}} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}.$$

因此, 对任意的正整数 n , 有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)^{a-1}} \leq \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^{a-1}}.$$

上式对 n 求上极限即得 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M_2 |x_1 - x_2|^{a-1}$. 由 $f(\frac{1}{2^n}) = (\frac{1}{2^n})^{a-1}$ 对任意的整数 n 成立可得 $M_2 \geq 1$.

$F(x) = \frac{f(x)}{x^{a-1}}$ 如图 4, 可以证明它也是一个分形插值函数.

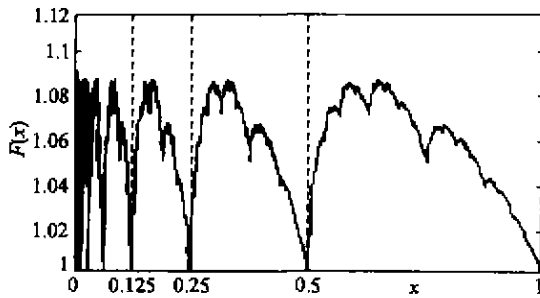


图 4 分形插值函数 $F(x)$ 的图像

Fig. 4 The graph of fractal interpolation function $F(x)$

2) 对任意的 $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, 记 $t = 1 - |x_1 - x_2|$, 则由 $f(x)$ 的定义有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq$$

$$f(1) - f(1 - |x_1 - x_2|) = 1 - f(t).$$

再利用 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的对称性, 得 $f(1) - f(1 - t) = g(1 - t)$, 从而, 由 $g(x)$ 的性质, 对任意的正整数 n , 有

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^a} \geq \frac{g(1-t)}{(1-t)^a} = \frac{g\left(\frac{1-t}{2^n}\right)}{\left(\frac{1-t}{2^n}\right)^a}.$$

由 $g(\frac{1}{2^n}) = (\frac{1}{2^n})^a$, 对上式两边求下极限可得结论.

性质 5 $f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \leq \frac{1}{3}f(x_1) + \frac{2}{3}f(x_2)$, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$. 当 $x_2 = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

证明 当 x_1, x_2 为二等分点, 即 $x_1, x_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$ 时, 不难验证结论成立. 设当 x_1, x_2 为 $2^n (n \geq 1)$ 等分点时结论正确. 当 x_1, x_2 为 2^{n+1} 等分点, 即

$$x_1 = \frac{p}{2^{n+1}}, x_2 = \frac{q}{2^{n+1}},$$

$$0 \leq p \leq 2^{n+1}, 0 \leq q \leq 2^{n+1}.$$

那么, 存在满足下面条件的 a_1, a_2, b_1, b_2

$$0 \leq a_1, a_2 \leq 2^n; a_1 \leq a_2 \leq a_1 + 1; a_1 + a_2 = p,$$

$$0 \leq b_1, b_2 \leq 2^n; b_1 \leq b_2 \leq b_1 + 1; b_1 + b_2 = q.$$

使 $x_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1}{2^n} + \frac{1}{2} \frac{a_2}{2^n}, x_2 = \frac{1}{2} \frac{b_1}{2^n} + \frac{1}{2} \frac{b_2}{2^n}$. 于是, 有

$$f(x_1) = \frac{1}{3}f\left(\frac{a_1}{2^n}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a_2}{2^n}\right), f(x_2) =$$

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{b_1}{2^n}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{b_2}{2^n}\right), \text{从而由假设可得}$$

$$\frac{1}{3}f(x_1) + \frac{2}{3}f(x_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}f\left(\frac{a_1}{2^n}\right) +$$

$$\frac{2}{3}f\left(\frac{b_1}{2^n}\right)\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}f\left(\frac{a_2}{2^n}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{b_2}{2^n}\right)\right) \geq$$

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{a_1+b_1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a_2+b_2}{2^{n+1}}\right).$$

下设 $p \neq 0, q \neq 0$ 若否结论成立.

1) 若 p 与 q 一奇一偶, 则有 $a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + 1$. 由 $f(x)$ 的性质立即得到下面的等式

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{a_1+b_1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a_2+b_2}{2^{n+1}}\right) =$$

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2^{n+2}}\right) + \left(\frac{a_2+b_2}{2^{n+2}}\right) = f\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right),$$

于是结论成立.

2) 若 p 与 q 均为奇数, 则 $a_1 = \frac{1}{2}(p-1), a_2 = \frac{1}{2}(p+1); b_1 = \frac{1}{2}(q-1), b_2 = \frac{1}{2}(q+1)$. 若 $\frac{1}{2}(p$

$+ q)$ 为奇数, 则由假设立即可得结论. 下设 $\frac{1}{2}(p + q)$ 为偶数. 为方便, 记 $t_1 = \frac{p+q-4}{2^{n+2}}, t_2 = \frac{a_1+b_1}{2^{n+1}},$

$$t_3 = \frac{p+q}{2^{n+2}}, t_4 = \frac{a_2+b_2}{2^{n+1}}, t_5 = \frac{p+q+4}{2^{n+2}}, \text{则有}$$

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{a_1+b_1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a_2+b_2}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}f(t_2) +$$

$$\frac{2}{3}f(t_4) = \frac{1}{9}f(t_1) + \frac{4}{9}f(t_3) + \frac{4}{9}f(t_5) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}f(t_1) + \frac{2}{3}f(t_2)\right) + \frac{4}{9}f(t_3) + \frac{2}{9}f(t_5) \geq$$

$$\frac{1}{3}f(t_3) + \frac{4}{9}f(t_3) + \frac{2}{9}f(t_5) \geq f(t_3),$$

而 $f(t_3) = f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)$, 从而结论成立.

由 $f(x)$ 的定义可得: 对任意的 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, 有

$$\frac{1}{2}f(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f\left(\frac{1}{2}\right). \text{因此, 得 } \frac{1}{3}f(x) +$$

$$\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}f(x) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2} + x\right).$$

再由性质 3 得

$$\frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2} + x\right) =$$

$$f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right). \text{证毕.}$$

性质 6 $f(x) \geq x^a$, 当 $0 \leq x \leq 1$. 其中 a 为 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 维数.

证明 记 $\Psi(x) = f(x) - x^\alpha$. 在 $X = [0, 1]$ $\times R$ 上定义一个迭代函数系统 $\{X; \omega_1, \omega_2\}$:

$$\omega_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix},$$

$$\omega_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

其中 $\varphi_1 = \frac{1}{3}x^\alpha, \varphi_2 = \frac{1}{3}x^\alpha - \frac{1}{3}(x+1)^\alpha + \frac{2}{3}$, 则不难得到: $\Psi(x)$ 就是该迭代函数系统在 $[0, 1]$ 上定义的分形插值函数. 由于 $\varphi_1(x) \geq 0$ 及 $\varphi_2(x) \geq 0$, 从而必有 $\Psi(x) \geq 0$. 证毕.

性质 7 $f(\frac{1}{2}) - f(x) \leq 2(\frac{1}{2} - x)^\alpha,$
 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$

函数 $G(x) = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(x)}{(\frac{1}{2} - x)^\alpha}, 0 \leq x < \frac{1}{2}$, 是—

个分形插值函数, 它的结构如图 5. 利用 $G(x)$ 的自相似性可以完成性质 7 的证明.

证明 1) 首先证明当 $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ 时结论成立. 由性质 6, 有 $f(x) \geq x^\alpha$, 因此, 有

$$f(\frac{1}{2}) - f(x) \leq f(\frac{1}{2}) - x^\alpha = \frac{2}{3} - x^\alpha,$$

参考文献:

[1] 周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学(A 辑), 1997, 27(6): 491-496.
 [2] BARNSELY M F. Fractal Everywhere[M]. New York: Academic Press, 1988.
 [3] PETER R. Massopust, fractal function and applications[J]. Chaos Solitons & Fractal, 1997, 8(2): 171-190.

(编辑 姚远)

Some properties of a fractal interpolation function

LI Hong-da, YE Zheng-lin, PENG Guo-hua

(Department of Mathematics and Information Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A fractal interpolation function is obtained from a certain of mass distribution defined on Sierpinski gasket, it shows fractal structure of Sierpinski gasket. Its properties, such as Hölder continuity, are discussed. The results are useful to estimating Hausdorff measure of Sierpinski gasket.

Key word: fractal; Sierpinski gasket; Hausdorff measure; interpolation function

由函数 $\varphi(t) = \frac{2}{3} - x^\alpha - 2(\frac{1}{2} - x)^\alpha$ 在 $[0, \frac{1}{4}]$ 上的单调性立即可知结论成立.

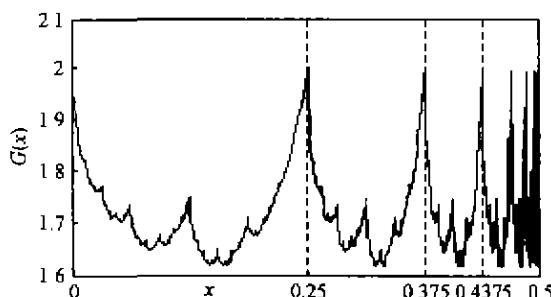


图 5 分形插值函数 $G(x)$ 的图像

Fig. 5 The graph of fractal interpolation function $G(x)$

2) 若 $x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}] (n \geq 1)$ 时成立. 令 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$,

则 $y \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2}}]$, 而有性质 5, 得

$$f(y) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f(\frac{1}{2}).$$

$$\frac{|f(\frac{1}{2}) - f(y)|}{|\frac{1}{2} - y|^\alpha} = \frac{|f(\frac{1}{2}) - f(x)|}{|\frac{1}{2} - x|^\alpha}.$$

因此, 当 $y \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2}}]$ 时结论也成立, 从而由(1)的结论出发可推得结论.