2003年4月 西北大学学报(自然科学版) Apr. 2003
第33卷第2期 Journal of Northwest University(Natural Science Edition) Vol. 33 No. 2

相对拓扑空间的一些性质

汪贤华[1],王延庚[1],卫 国[2]

(1.西北大学 数学系,陕西 西安 710069;2.英国北卡罗莱纳州大学 彭布罗克分校,数学与计算机科学系,北卡罗莱纳 彭布罗克 28372)

摘要:在前人的研究基础上,证明了如果 X 是 Hausdorff 空间,Y 在 X 中仿紧,那么 Y 在 X 中正则;并讨论了正则、正规、紧、仿紧、序列式空间的子空间的相对拓扑性质的遗传性质,从而推广了一些已知结果。

关 键 词:相对拓扑;拓扑空间;Y 在 X 中正则;Y 在 X 中正规;Y 在 X 中紧;Y 在 X 中仿紧;Y 在 X 中序列式

中图分类号:O189.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)02-0133-04

关于相对拓扑性质的基本事实和系统阐述由文献[1]首先提出,文献[2]对相对拓扑性质和相对拓扑空间作了进一步的研究,得到了一系列较好的结果。

1 基本定义

设 Y 是拓扑空间 X 的子空间。

定义1[2] 称 Y 在 X 中正则是指如果对每一 $y \in Y$ 和任意 X 中不含有 y 的闭子集 P,都存在 X 中不相交的开集 U 和 V,使得:$y \in X$ 且 $P \cap Y \subset V$。

定义2[2] 称 Y 在 X 中正规是指如果对 X 中每一对不相交闭集 A 和 B,都存在 X 中不相交的开集 U 和 V,使得:$A \cap Y \subset U$ 且 $B \cap Y \subset V$。

定义3[2] 称 Y 在 X 中紧(Lindelof)是指如果对 X 的任意开覆盖,都存在有限的(可数的)子族 γ,使得 $Y \subset U\gamma$。

定义4[2] 称 Y 在 X 中仿紧是指如果对 X 的任意开覆盖 γ,都存在由 X 的开集构成的集族 μ,满足 μ 加细 γ,μ 在 Y 中每一点局部有限且 $Y \subset U\mu$。

定义5[3] 称 Y 在 X 中序列式是指如果对在 X 中不闭的 Y 的每一子集 A,存在 A 中一序列收敛于 $X \backslash A$ 中的点。

2 一些问题

在文献[2]中,有如下结论:

1) 如果 Y 在 X 中正则,则 Y 是正则空间。

2) 如果 X 是 Hausdorff 空间,Y 在 X 中紧,则 Y 是正则空间。

3) 如果 X 是 Urysohn 空间,Y 在 X 中紧,则 Y 是 Tychonoff 空间。

问题1 如果 X 是正则的 T_1 空间,Y 在 X 中紧,那么 Y 是否是正规空间?

在文献[4]中有 T_2 仿紧空间是正规的,那么:

问题2 如果 X 是 Hausdorff 空间,Y 在 X 中仿紧,那么 Y 是否在 X 中正规?

在文献[5]中,有如下结论:设 $f: X \to Y$ 是完备映射,如果 X_1 在 X 中是 Lindelof 的,则 $f(X_1)$ 在 Y 中是 Lindelof 的;如果 Y_1 在 Y 中是 Lindelof 的,则 $f^{-1}(Y_1)$ 在 X 中是 Lindelof 的。

问题3 对于相对紧性,相对仿紧性,相对正则性以及相对序列式是否有类似的结论?

本文着重就这几个问题进行了讨论,并将文献[4]中的部分性质推广到相应的相对拓扑领域。

收稿日期:2001-06-22

基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(98SL06)

作者简介:汪贤华(1977-),男,陕西商南人,西北大学硕士生,从事拓扑学研究。

3 主要结论

定理1 如果X是正则T_1的空间,Y在X中紧,则$\overline{Y}$是正规空间。

证 明 由于X是正则的T_1空间,在文献[2]中有:Y在X中紧当且仅当$\overline{Y}$紧。而正则的紧空间是正规空间[4]。故$\overline{Y}$是正规空间。

定理2 如果X是Hausdorff空间,Y在X中仿紧,则Y在X中正则。

证 明 任给$y \in Y$和X的闭子集P满足$y \notin P$。对每一$x \in P$,由于X是Hausdorff空间,故存在X的开子集U_x和V_x,使得

$$x \in U_x, y \in V_x, \text{且} U_x \cap V_x = \Phi。$$

所以$\mu = \{U_x\}_{y \in Y} \cup \{X \backslash P\}$是$X$的开覆盖。

因为Y在X中仿紧,故存在由X的开集构成的集族$\omega = \{W_s\}_{s \in S}$,使得$\omega$加细$\mu$,$\omega$在$Y$中每一点局部有限且$Y \subset \bigcup \omega$。

令$S_0 = \{s \in S : W_s \cap P \neq \Phi\}$,则对每一$s \in S_0$,$y \notin \overline{W}_s$,$P \supset \bigcup_{s \in S_0} W_s$。所以$P \cap Y \subset \bigcup \{W_s : W_s \cap Y \neq \Phi, s \in S_0\}$。令$V = \bigcup \{W_s : W_s \cap Y \neq \Phi, s \in S_0\}$,$U = X \backslash \overline{V}$。

由于ω在Y中每一点局部有限,所以

$$\overline{V} = \bigcup \{\overline{W}_s : W_s \cap Y \neq \Phi, s \in S_0\}。$$

故U和V是X中不相交的开集且

$$y \in U, P \cap Y \subset V。$$

即Y在X中正则。

推论1 如果是Hausdorff空间,Y在X中紧,则Y是正则空间。

证 明 由定理2知Y在X中正则。再由相对正则的定义知Y是正则空间。

这是文献[2]中推论40。

推论2 如果X是Hausdorff空间,Y在X中仿紧且是X的闭子空间,则Y在X中正规且Y是正规空间。

证 明 设A和B是X中任意不相交的两个闭集,则:$A \cap Y$,$B \cap Y$亦是X中互不相交的闭集。对任意$\alpha \in Y \cap A$,由定理2得:存在X的不交开子集U_α和V_α,使得:$\alpha \in U_\alpha$,$B \cap Y \subset V_\alpha$。

故$\mu = \{U_\alpha\}_{\alpha \in Y \cap A} \cup \{X \backslash (Y \cap A)\}$是$X$的开覆盖。

由于Y在X中仿紧,故存在由X的开集构成的集族$\omega = \{W_s\}_{s \in S}$,使得$\omega$加细$\mu$,$\omega$在$Y$中每一点局部有限且$Y \subset \bigcup U\omega$。令$S_0 = \{s \in S : W_s \cap (A \cap Y) \neq \Phi\}$,

则对每一$s \in S_0$,$(B \cap Y) \cap \overline{W}_s = \Phi$,$A \cap Y \subset \bigcup_{s \in S_0} W_s$。令

$$U = \bigcup_{s \in S_0} W_s, \quad V = X \backslash \overline{V},$$

则:U,V是X中开集且满足

$$A \cap Y \subset U, B \cap Y \subset V, U \cap V = \Phi。$$

所以Y在X中正规。又由于Y在X中闭,所以Y是正规空间。

定理3 1) 设$f: X \to Y$是完备映射,如果X_1在X中紧,则$f(X_1)$在Y中紧;如果Y_1在Y中紧,则$f^{-1}(Y_1)$在X中亦紧。

2) 设$f: X \to Y$是完备映射,如果Y_1在Y中仿紧,则$f^{-1}(Y_1)$在X中仿紧。

3) 设$f: X \to Y$是满的完备映射,X,Y均为Hausdorff空间,如果Y_1在Y中正则,则$f^{-1}(Y_1)$在X中正则;如果X_1在X中正则,则$f(X_1)$在Y中正则。

4) 设$f: X \to Y$是满的商映射,X_1在X中序列式且$f^{-1}f(X_1) = X_1$,则:$f(X_1)$在Y中序列式。

证 明 1) 首先假设X_1在X中紧。设μ是Y的开覆盖,则$f^{-1}(\mu)$是X的开覆盖。由于X_1在X中紧,故存在有限集$\mu' \subset \mu$,使得$X_1 \subset \bigcup f^{-1}(\mu')$。所以$f(X_1) \subset \bigcup \mu'$。即$f(X_1)$在$Y$中紧。

其次,假设Y_1在Y中紧。

设$\mu = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$是$X$的任意开覆盖。由于$f: X \to Y$是完备映射,故对每一$y \in Y$,$f^{-1}(y)$被$\mu$中有限个$U_\alpha$所覆盖,记这有限个$U_\alpha$的并为$V_y$,则

$$f^{-1}(y) \subset V_y。$$

又因为f是连续闭映射,据文献[4]定理1中4.13.知存在y的邻域O_y,使得

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(O_y) \subset V_y。$$

令:$W_y = f^{-1}(O_y)$,则:W_y在X中开且

$$f^{-1}(y) \subset W_y \subset V_y, W_y = f^{-1}f(W_y),$$

且$f(W_y)$是y中开集。

所以,$\{f(W_y)\}_{y \in Y}$覆盖Y。

由于Y_1在Y中紧,故存在有限个$\{f(W_{y_1}), \cdots, f(W_{y_n})\}$,使得$Y_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(W_{y_i})$。

从而$f^{-1}(Y_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$。而对每一$W_{y_i} V_{y_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$,$V_{y_i}$是有限个$U_\alpha$的并。

所以$f^{-1}(Y_i)$被有限U_α覆盖。即$f^{-1}(Y_i)$在X中紧。

2) 设 $\mu = \{U_s\}_{s\in S}$ 是 X 的开覆盖。对每一 $y \in Y$，因为 $f^{-1}(y)$ 是紧集，所以存在有限集 $S(y) \subset S$，使得

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{s\in S(y)} U_s。$$

由于 f 是完备映射，故存在 Y 的开邻域 V_y，使得

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_y) \subset \bigcup_{s\in S(y)} U_s。$$

则 $\{V_y\}_{y\in Y}$ 覆盖 Y。

由于 Y_i 在 Y 中仿紧，故存在 Y 中开集构成的集族 $\omega = \{W_t\}_{t\in T}$，使得 ω 加细 $\{V_y\}_{y\in Y}$，ω 在 Y_1 中每一点局部有限且

$$Y_1 \subset \bigcup \omega。$$

则 $\{f^{-1}(W_t)\}_{t\in T}$ 在 X 中开且在 $f^{-1}(Y_1)$ 中每一点局部有限。

对任意 $t \in T$，存在 $y_t \in Y$，使得

$$f^{-1}(W_t) \subset f^{-1}(V_{y_t}) \subset \bigcup_{s\in S(y_t)} U_s。$$

令　$v = \{f^{-1}(W_t) \cap U_s : t \in T, s \in S(y_t)\}$，则 v 加细 μ，v 在 $f^{-1}(Y_1)$ 中每一点局部有限且

$$f^{-1}(Y_1) \subset \bigcup v。$$

即 $f^{-1}(Y_1)$ 在 X 中仿紧。

3) 首先假设 Y_1 在 Y 中正则。任给 $x \in f^{-1}(Y_1)$ 和 X 中不含 x 的闭子集 P，则 $P \cap f^{-1}f(x)$ 是紧的且不含 x。又因为 Y 是 Hausdorff 空间，所以存在 X 中的不交开集 U_1, V_1，使得

$$x \in U_1, P \cap f^{-1}f(x) \subset V_1。$$

故 $f(P\backslash V_1)$ 在 Y 中闭且不含 $f(x)$。而 $f(x) \in Y_1$，所以存在 Y 中不交开集 U_2, V_2，使得

$$f(x) \in U_2, Y_1 \cap f(P\backslash V_1) \subset V_2。$$

故　$f^{-1}(Y_1 \cap f(P\backslash V_1)) \subset f^{-1}(V_2)$。

即　$x \in f^{-1}(U_2)$，

$f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}f(P \cap V_1) \subset f^{-1}(V_2)$，而 $f^{-1}(Y_1) \cap (P\backslash V_1) \subset f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}f(P \cap V_1)$。

所以

$$P \cap f^{-1}(Y_1) \subset V_1 \cup f^{-1}(V_2)。$$

令　$U = U_1 \cap f^{-1}(U_2), V = V_1 \cup f^{-1}(V_2)$，则 $x \in U, P \cap f^{-1}(Y_1) \subset V$。

即 $f^{-1}(Y_1)$ 在 X 中正则。

其次假设 X_1 在 X 中正则，任给 $y \in f(X_1)$，F 是 Y 中的闭集且 $y \notin F$，则 $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(F) = \Phi$，$f^{-1}(y)$ 紧，$f^{-1}(F)$ 闭且 $f^{-1}(F) \subset X - f^{-1}(y)$。所以存在 X 中的开集 U 和 V，使得

$$f^{-1}(y) \subset U, f^{-1}(F) \cap X_1 \subset V，且$$

$$U \cap V = \Phi。$$

由于 f 是连续闭映射，由文献[4]知存在 X 中的开集 U', V'，使得：$f^{-1}(y) \subset U' \subset U, f^{-1}(F) \cap X_1 \subset V' \subset V$ 且 $f(U')$ 和 $f(V')$ 是 Y 中的开集。

又因为

$$f(f^{-1}(F) \cap X_1) = F \cap f(X_1),$$

所以

$$y \in f(U'), F \cap f(X_1) \subset f(V')。$$

即 $f(X_1)$ 在 Y 中正则。

4) 任给 $A \subset f(X_1)$ 满足 A 在 Y 中不闭。要证明在 A 中存在序列收敛于 $Y\backslash A$ 中的点。由于 f 是商映射，故 $f^{-1}(A)$ 在 X 中不闭。由于 $f^{-1}f(X_1) = X_1$，故

$$f^{-1}(A) \subset X_1。$$

而 X_1 在 X 中序列式，故存在 $f^{-1}(A)$ 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于点

$$x \in X\backslash f^{-1}(A)。$$

由于 f 连续，所以 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$。而

$$f(x_n) \in A, y = f(x) \in Y\backslash A,$$

所以 $f(X_1)$ 在 Y 中序列式。

定理 4　设 A 是一指标集，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一组不相交的拓扑空间，对每一 $\alpha \in A, Y_\alpha \subset X_\alpha$。

1) 如果 A 是有限集，对每一 $\alpha \in A$，Y_α 在 X_α 中紧，则 $\bigoplus_{\alpha\in A} Y_\alpha$ 在 $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ 中紧。

2) 如果 A 是可数集，对每一 $\alpha \in A$，Y_α 在 X_α 中是 Lindelof 的，则 $\bigoplus_{\alpha\in A} Y_\alpha$ 在 $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ 中是 Lindelof 的。

3) 如果对每一 $\alpha \in A$，Y_α 在 X_α 中仿紧，则 $\bigoplus_{\alpha\in A} Y_\alpha$ 在 $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ 中仿紧。

证　明　只需证明 3)，1) 和 2) 证明方法类似。

设 $\mu = \{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ 的任意开覆盖，则对每一 $\alpha \in A$，$\{X_\alpha \cap U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 X_α 的开覆盖。

由于对每一 $\alpha \in A$，Y_α 在 X_α 中仿紧，故存在由 X_α 的开集构成的集族 V_α，使得 V_α 加细 $\{X_\alpha \cap U_\beta\}_{\beta\in B}$，$V_\alpha$ 在 Y_α 中每一点局部有限且 $Y_\alpha \subset \bigcup v_\alpha$。令　$v = \bigcup_{\alpha\in A} v_\alpha$。则 v 在 $\bigoplus_{\alpha\in A} Y_\alpha$ 中每一点局部有限，v 加细 μ 且 $\bigoplus_{\alpha\in A} Y_\alpha \subset \bigcup v$。即 $\bigoplus_{\alpha\in A} Y_\alpha$ 在 $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ 中仿紧。

理定 5　设 Y 是可数紧空间，$Y \subset X$，则下列命题等价：

1) Y 在 X 中紧；

2) Y 在 X 中是 Lindelof 的；

3) Y 在 X 中仿紧。

证　明　1)⇔2)，1)⇨3) 显然。

3)⇨1)：假设 Y 在 X 中仿紧，但 Y 在 X 中非紧，则存在 X 的开覆盖 μ 没有有限子族 μ' 使得

$$Y \subset \bigcup \mu'。$$

由于Y在X中仿紧，存在由X中开集构成的集族v，使得v加细μ，v在Y中每一点局部有限且

$$Y \subset \bigcup v。$$

显然v也没有有限子族v'，使得

$$Y \subset \bigcup V'。$$

由此，可以在v中取$V_1, V_2, \cdots$使得

$$V_i \cap Y \neq \Phi \text{且} V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i \neq \Phi。$$

对每一n，取

$$y_n \in (V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i) \cap Y,$$

则$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$在空间Y中无聚点(假设y是其聚点，则$y \in Y$。点y的任何邻域应包含无限多个$\{y_n : n \in N\}$中的点，从而与无限多个V_n相交，这与v在Y中每一点局部有限矛盾)。

故Y不是可数紧空间，矛盾。因此，Y在X中紧。

参考文献：

[1] ARHANGEL'SHII A V, GENEDI H M M. Beginnings of the theory of relative topological properties[M]. Spaces and Mappings, Moscow: MGU, 1989: 3-48.

[2] ARHANGEL'SHII A V. Relative topological properties and relative topological space[J]. Topology Appl, 1996, 70: 87-99.

[3] ARHANGEL'SHII A V, NOGURA T. Relative sequentiality[J]. Topology Appl, 1998, 82: 49-58.

[4] ENGELKING R. General Topology[M]. Warszawa: PWN, 1977.

[5] DOW A, VERMEER J. An example concerning the property of a space being Lindelof in another[J]. Topology Appl, 1993, 51: 255-260.

(编 辑 曹大刚)

Some properties of the relative topological space

WANG Xian-hua[1], WANG Yan-geng[1], WEI Guo[2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Department of Mathematics & Computer Science, University of North Carolina at Pembroke, Pembroke 28372, U. S. A.)

Abstract: Based on the existent knowledge, it is proved that if X is an Hausdorff space Y, Y is paracompact in X, then Y is regular in X. The relative topological properties of subspace of regular, normal, compact, paracompact and sequential space are discussed. And some known results are generalized.

Key words: relative topology; topological space; Y is regular in X; Y is normal in$X$; Y is compact in X; Y is paracompact in X; Y is sequential in X

· 学术动态 ·

2001年SCI收录的中国化学领域论文按机构排序

(据中国科技信息研究所2001年度中国科技论文统计与分析年度研究报告)

位 次	机 构	论文数	位 次	机 构	论文数
1	北京大学	402	11	兰州大学	176
2	中国科学科院化学研究所	355	12	中山大学	167
3	浙江大学	339	13	武汉大学	161
4	南开大学	302	14	山东大学	139
5	南京大学	300	15	复旦大学	137
6	清华大学	260	16	中国科学院大连化学物理研究所	135
7	中国科技大学	232	17	厦门大学	112
8	吉林大学	230	18	西北大学	100
9	中国科学院上海有机化学研究所	220	19	四川大学	96
10	中国科学院长春应用化学研究所	204	20	中国科学院福建物质结构研究所	95

(薛 鲍)