有理参数多项式曲线的一种快速生成算法

康宝生[1],张雪锋[1],王三福[1,2]

(1. 西北大学 数学系,陕西 西安 710069;2. 天水师范学校,甘肃 天水 741000)

摘要:利用曲线各阶差分的递推计算,给出了有理参数多项式曲线的一种快速生成算法。在曲线的生成过程中只用到整数的加减法,故算法的效率较高。

关 键 词:有理参数多项式曲线;逐点生成算法;差分;整数加减法

中图分类号:TP319 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2002)01-0007-02

在CAD/CAM中,有理参数多项式曲线是最常用的曲线表示形式。在用计算机绘制有理参数多项式曲线时,尚无有效的像素级绘制算法,这给实际应用带来了很大不便[1~3]。本文给出一种有效的逐点生成有理参数多项式曲线的算法,该算法利用曲线各阶差分的递推计算,在生成曲线的过程中只用到整数加减法,故算法的效率极高。

1 算法原理

设有理参数多项式曲线的方程如下

$$x(u)=\frac{f(u)}{g(u)},y(u)=\frac{h(u)}{w(u)},u\in[0,1]。$$

令整数 l 满足条件

$$l\geqslant\max_{u\in[0,1]}\{x'(u),y'(y)\}=\max_{u\in[0,1]}\left\{\left|\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)'\right|,\left|\left(\frac{h(u)}{w(u)}\right)'\right|\right\},$$

根据值 l 对参数区间 $[0,1]$ 划分,节点为 $u_i=\frac{i}{l}$,$i=0,1,\cdots,l$,则由Lagrange中值定理有

$$|x(u_{i+1})-x(u_i)|=\frac{1}{l}\cdot|x'(\theta)|\leqslant 1,$$
$$\theta\in[u_i,u_{i+1}]。$$

取 $x_i=[\frac{f(u_i)}{g(u_i)}+0.5]$,则 x_i 即为曲线上点的像素坐标。下面给出具体的求 x_i 的过程。

设 $f(u)$,$g(u)$ 的系数均为有理数,则一定存在正整数 N,使得 $N\cdot f(u)$、$N\cdot g(u)$ 均为 i 的整系数多项式。记 $F(i)=N\cdot f(u_i)$,$G(i)=N\cdot g(u_i)$。

根据有理数在实数中的稠密性,把多项式的系数限定为有理数并不影响曲线的精度。

根据差分公式

$$\begin{cases}\Delta^{k+1}F(i)=\Delta^kF(i+1)-\Delta^kF(i)\\ \Delta^{k+1}G(i)=\Delta^kG(i+1)-\Delta^kG(i),\\ \quad k=0,1,\cdots,n-1。\end{cases}$$

和 n 次多项式的 n 阶差分为常数的性质可知,当 i 处的各阶差分 $\Delta^kF(i)$,$\Delta^kG(i)$ 已知时,用 n 次加法即可求出 $i+1$ 处的各阶差分

$$\begin{cases}\Delta^kF(i+1)=\Delta^{k+1}F(i)+\Delta^kF(i),\\ \Delta^kG(i+1)=\Delta^{k+1}G(i)+\Delta^kG(i),\\ \quad k=0,1,\cdots,n-1。\end{cases}$$

其中,零阶差分即为函数值。

利用公式 $x_i=[\frac{F(u_i)}{G(u_i)}+0.5]$ 即可求出曲线上点的 x 坐标。

对于方程 $y(u)=\frac{h(u)}{w(u)}$,做法完全同上。

下面讨论整数 l 的确定问题。

引理1[4] 设有理Bézier曲线的形式如下

$$x(u)=\frac{X(u)}{w(u)},y(u)=\frac{Y(u)}{w(u)},u\in[0,1],$$

其中 $$w(u)=\sum_{i=0}^{n}\omega_iB_i^n(u),$$

$$X(u)=\sum_{i=0}^{n}\omega_ix_iB_i^n(u),$$

收稿日期:2000-12-28

基金项目:陕西省教育厅专项基金资助项目(00JK119);西北大学科研基金资助项目(98NW02C)

作者简介:康宝生(1961-),男,陕西西安人,西北大学教授,从事计算机辅助几何设计、计算机图形学、科学计算可视化等研究。

$$Y(u)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i y_i B_i^n(u),\quad 则$$

$$x'(u)=\frac{1}{w(u)}[X'(u)-w'(u)\cdot\frac{X(u)}{w(u)}],$$

$$y'(u)=\frac{1}{w(u)}[Y'(u)-w'(u)\cdot\frac{Y(u)}{w(u)}]。$$

记 $A_x=\max\limits_i|x_{i+1}-x_i|$, $A_y=\max\limits_i|y_{i+1}-y_i|$, $\omega=\min\limits_i\{\omega_i\}$, $w=\max\limits_i\{\omega_i\}$, 则

$$|x'(u)|\leqslant n\cdot A_x\cdot\frac{w^2}{\omega^2},|y'(u)|\leqslant n\cdot A_y\cdot\frac{w^2}{\omega^2}。$$

因此,可取

$$l=\max\{n\cdot A_x\cdot\frac{w^2}{\omega^2},n\cdot A_y\cdot\frac{w^2}{\omega^2}\}。$$

引理 2[5] 设 $\alpha=(B_0^n(u),B_1^n(u),\cdots,B_n^n(u))^T$, $\beta=(1,u,u^2,\cdots,u^n)^T$, 则

$$\alpha=H^n\cdot\beta,\quad \beta=H_n^{-1}\cdot\alpha。$$

其中

$$H_n=\begin{bmatrix}C_n^0 & & & \\ & C_n^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_n^0 & -C_n^1 & \cdots & (-1)^nC_n^n\\ 0 & C_{n-1}^0 & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & C_0^0\end{bmatrix};$$

$$H_n^{-1}=\begin{bmatrix}C_n^0 & C_n^1 & \cdots & C_n^n\\ 0 & C_{n-1}^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & C_0^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/C_n^0 & & & \\ & 1/C_n^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/C_n^n\end{bmatrix}。$$

2 算 法

基于上述讨论,可建立有理 Bézier 曲线的快速逐点生成算法,其中 (x,y) 表示像素点。a_k,b_k,c_k 分别表示差分 $\Delta^kX(i),\Delta^kY(i),\Delta^k\omega(i),k=1,\cdots,n$。

Step 1 应用引理 1 求出正整数 l。

Step 2 由 $X(i),Y(i),\omega(i),i=0,\cdots,n$,求 X,Y,ω 在 $i=0$ 处的各阶差分 a_k,b_k,c_k。

$$a_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^{k-i}X(k-i),k=1,2,\cdots,n;$$

$$b_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^{k-i}Y(k-i),k=1,2,\cdots,n;$$

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^{k-i}\omega(k-i),k=1,2,\cdots,n。$$

Step 3 由 $x=[\frac{X(0)}{\omega(0)}+0.5],y=[\frac{Y(0)}{\omega(0)}+0.5]$ 求出对应于 $i=0$ 的点 (x,y)。

Step 4 画第一个点 (x,y)。

Step 5 对 $i=1,\cdots,l$,循环

$X(i)=X(i-1)+a_1$,

$Y(i)=X(i-1)+b_1$,

$\omega(i)=X(i-1)+c_1$,

$x=[\frac{X(i)}{\omega(i)}+0.5],y=[\frac{Y(i)}{\omega(i)}+0.5]$。

画点 (x,y)。

$a_k=a_k+a_{k+1},k=1,\cdots,n-1;$

$b_k=b_k+b_{k+1},k=1,\cdots,n-1;$

$c_k=c_k+a_{k+1},k=1,\cdots,n-1$。

Step 6 算法结束。

对于非 Bézier 形式的有理参数多项式曲线,先应用引理 2 将其转化成有理 Bézier 形式,然后应用上述算法即可。

3 结 论

本文给出的快速逐点生成有理参数多项式曲线的算法,适用于任意次数的有理参数多项式曲线。算法中只用到了整数的加减法,因此算法的效率较高。对于较复杂的曲线或曲线次数较高、导数上界较大的情况,相应的正整数 l 会取较大值才能满足条件。这样,可能出现整数溢出的问题。对此,需要将曲线分割成子曲线段来处理,也需要更有效的方法来解决这一问题。

参考文献:

[1] 黄有度,朱功勤.参数多项式曲线的快速生成算法[J].计算机学报,2000,23(4):393-397.

[2] 刘永奎,石教英.曲线的整数型生成算法[J].计算机学报,1998,21(3):270-280.

[3] FLOATER M S. Derivatives of rational Bézier curves[J]. Computer Aided geometric Design,1992,9(2):161-174.

[4] 唐荣锡,汪家业,彭群生,等.计算机图形学教程[M].北京:科学出版社,1999.

[5] 施法中.计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条(CAGD&NURBS)[M].北京:北京航空航天大学出版社,1994.

(编 辑 曹大刚)

(下转第 25 页)

参考文献:

[1] FAWZY A, MAGDA H. Determination of some cephalosporins using derivative spectrophotometry[J]. Anal Lett, 1985, 18(B5): 629-640.

[2] MOHAMED A, MOHAMED H, MONA M, *et al*. Colorimetric determination of some penicillins and cephalosporins with 2-nitrophenylhydrazine hydrochloride[J]. Tanata, 1989, 36(12): 1 253-1 257.

[3] MOHAMED A. Selective spectrophotometric determination some cephalosporins in pharmaceutical formulations[J]. Anal Lett, 1991, 24(1): 55-67.

[4] FOGG A G, ABDALLA M A, HENRIQUES H P. Titrimetric determination of the yield of sulphide formed by alkaline degradation of cephalosporins[J]. Analyst, 1982, 107(4): 449-452.

[5] 曾泳淮,马红艳. 头孢拉定的电化学行为[J]. 分析化学, 1997, 25(9): 1 006～1 009.

[6] 欧阳耀国,蔡维平,谢　箐,等. 光化学荧光分析法测定头孢氨苄的研究[J]. 分析化学, 1994, 22(12): 1 211-1 213.

(编　辑　张银玲)

A study of the analytical method for indirect determination of cephalosporins by atomic absorption spectrometry

XIE Zhi-hai, WANG Ya-ting, LANG Hui-yun

(Department of Chemstry, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: A rapid, sensitive, accurate method for determining cephalosporins is reported. In alkaline medium, cephalosporins can be hydrolyzed by heating and generate sulphite, the content of Cu in precipitate formed sulphite with Cu^{2+} can be determined by atomic absorption spectrometry. The linear rang is 36.5～183 μg/mL, 35～175 μg/mL, 19～95 μg/mL of cephazoline, cephalexin and cephracline, respecitvely. The recovery is 99%～102%, RSD < 2%. The method is successfully applied to the determination of cephalosporins.

Key words: cephalosporins; atomic absorption spectrometry; indirect determination

(上接第8页)

A fast generating algorithm for rational parametric polynomial curves

KANG Bao-sheng[1], ZHANG Xue-feng[1], WANG San-fu[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Education School of Tianshui, Tianshui 741000, China)

Abstract: A fast generating algorithm for rational parametric polynomial curves is presented. Using this algorithm, the rational parametric polynomial curves can be generated by integer additive and subtractive operations only. So it is quite efficient.

Key words: rational parametric polynomial curve; point by point generating algorithm; difference; integer additive and subtractive operations