2003 年 12 月
第 33 卷第 6 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Dec. 2003
Vol. 33 No. 6

有关 L-函数的一个二次加权均值

高　丽

(延安大学 数学系,陕西 延安 716000)

摘要:利用广义 Kloostermann 和估计、特征和估计及其解析方法研究 Dirichlet L-函数的二次加权均值,得到一个较为精确的二次加权均值分布的渐近公式。

关 键 词:Dirichlet L-函数;广义 Kloostermann 和;均值分布;特征和;渐近公式

中图分类号:O156.4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-274X(2003)06-629-04

1 引言及结论[1]

设整数 $q\geqslant 2$,χ 表示模 q 的 Dirichlet 特征,对任意的整数 m,n,Kloostermann 和定义如下:

$$S(m,n,\chi,q)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{ma+n\bar{a}}{q}\right)。$$

其中 $\bar{a}$ 表示同余方程 $ab\equiv 1(\bmod q)$ 的解 b,即 $\bar{a}$ 是 a 关于模 q 的逆,$e(y)=e^{2\pi i y}$。

关于广义 Kloostermann 和 $S(m,n,\chi,q)$ 的上界估计,许多学者都做过讨论。例如,文献[2,3]证明了

$$|S(m,n,\chi,p)|\ll(m,n,p)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}+\epsilon},$$

其中 p 是素数,ϵ 为任意给定的正数,(m,n,q) 表示 m,n,q 三数的最大公因数。

对于一般的模 q,有猜想

$$|S(m,n,\chi,q)|\ll q^{\frac{1}{2}}(m,n,q)^{\frac{1}{2}}d(q),$$

其中 $d(q)$ 为除数函数,但这个结论似乎还没有被证明。然而我们还是相信它是正确的。事实上,$S(m,n,\chi,q)$ 在许多加权均值分布中表现出良好的分布性质。本文的主要目的也就是为了说明这一点。为此设 $L(s,\chi)$ 表示模 q 的 Dirichlet L-函数,其中 $q\geqslant 2$ 为整数,χ 表示模 q 的 Dirichlet 特征。本文将利用广义 Kloostermann 和估计、特征和估计及其解析方法研究 Dirichlet L-函数的二次加权均值

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|S(m,n,\chi,q)|^2|L(1,\chi)|^2$$

的渐近性质,其中 $\sum\limits_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}$ 表示对模 q 的所有奇特征求和。于是得到如下定理。

定 理 设 $q\geqslant 2$ 为整数,对任意的整数 m,n,当 $(m,q)=(n,q)=1$ 时,有渐近公式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|S(m,n,\chi,q)|^2|L(1,\chi)|^2=$$

$$\frac{\pi^2}{12q^2}\varphi^3(q)\left(q\prod_{p\mid q}\left(1+\frac{1}{p}\right)-3\right)+O(q^{\frac{3}{2}}\ln^2 q d^2(q)),$$

其中 $\varphi(q)$ 为 Euler 函数,$\prod\limits_{p\mid q}$ 表示对模 q 的所有不同素因子求积,$d(q)$ 为除数函数。

2 主要引理

为了完成定理的证明,我们先引入了下面几个预备引理。

引理 1[4] 设整数 $q\geqslant 2$,对任意的整数 m,n,有估计式

$$S(m,n,q)=\sum_{a=1}^{q}{}'e\left(\frac{ma+n\bar{a}}{q}\right)\ll(m,n,q)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}d(q),$$

其中 $\sum\limits_{a=1}^{q}{}'$ 表示对所有满足 $(a,q)=1$ 且 $a\leqslant q$ 的 a 求和,$a\bar{a}\equiv 1(\bmod q)$。

引理 2 设 $q\geqslant 2$ 为整数,χ 表示模 q 的 Dirichlet 特征,则有估计式

$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)|L(1,\chi)|^2\right|$$

收稿日期:2002-06-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271093);陕西省教委专项科研基金资助项目(00JK123)

作者简介:高　丽(1963-),女,陕西绥德人,延安大学副教授,从事解析数论方面的研究。

$$\ll q\ln^2 q d(q),$$

其中 $\sum\limits_{d|q}$ 表示对 q 的所有正除数求和。

证 明 为书写方便,设

$$A(\chi,y)=\sum_{\frac{q}{sd+1}<n\leqslant y}\chi(n),B(\chi,y)=\sum_{q<n\leqslant y}\chi(n)。$$

则由 L- 函数的定义与 Abel 恒等式得

$$L(1,\chi)=\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}+\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y=\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(n)}{n}+\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},y)}{y^2}\mathrm{d}y。$$

从而有

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)|L(1,\chi)|^2\Big|=$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}+\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)\times\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}+\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\Big)\Big|\leqslant\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot$$

$$\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}\Big)\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\Big)\Big|+$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}\Big)\Big(\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\Big)\Big|+$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\Big)\Big(\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)\Big|+$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot\Big(\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)\Big(\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\Big)\Big|\triangleq$$

$$M_1+M_2+M_3+M_4。$$

下面我们分别估计上式中的各项。

1) 首先,由模 q 的特征和的正交性知,当 $(mn,q)=1$ 时,有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(n)\overline{\chi}(m)=\begin{cases}\frac12\varphi(q), & 如果\ n\equiv m(\bmod q);\\ -\frac12\varphi(q), & 如果\ n\equiv -m(\bmod q);\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

于是得

$$M_1=\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}\Big)\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\Big)\Big|=$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac1n\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac1m\cdot\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(n(sd+1))\overline{\chi}(m)\Big|\leqslant$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\varphi(q)\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}\\ (sd+1)n\equiv m(q)}}\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{1}{mn}\leqslant$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\varphi(q)\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac{1}{(sd+1)n^2}\ll$$

$$q\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\frac{1}{sd+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ll q\ln q d(q)。$$

2) 其次,由 Pólya-Vinogradov 定理知,对任意 $z\geqslant 1$,都有 $|B(\overline{\chi},z)|\ll q^{\frac12}\ln q$。

由此及特征和的正交性得

$$M_2=\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac{\overline{\chi}(n)}{n}\Big)\Big(\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\Big)\Big|=$$

$$\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}}\frac1n\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\overline{\chi}(n)\cdot\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\Big|\leqslant\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\cdot$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{sd+1}\\ sd+1\equiv n(q)}}\frac1n\varphi(q)\int_q^{+\infty}\frac{q^{\frac12}\ln q}{z^2}\mathrm{d}z\ll q\ln^2 q d(q)。$$

3) 同样,由 Pólya-Vinogradov 定理知,对任意 $y\geqslant 1$,都有 $|A(\chi,y)|\leqslant q^{\frac12}\ln q$。

从而我们有

$$M_3=\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac12}\Big|\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot$$

$$\left(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\right)\left(\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)\Bigg| =$$

$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac{1}{2}}\Bigg|\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{1}{m}\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)\cdot$$

$$\overline{\chi}(m)\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Bigg| \ll q\ln^2 d(q)。$$

4) 再由 Pólya-Vinogradov 定理知,对任意 $y\geqslant 1,z\geqslant 1$ 有

$$|A(\chi,y)|\ll q^{\frac{1}{2}}\ln q,\ |B(\overline{\chi},z)|\ll q^{\frac{1}{2}}\ln q。$$

于是得

$$M_4=\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac{1}{2}}\Bigg|\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)$$

$$\left(\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{q}^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\right)\Bigg| \ll q\ln^2 qd(q),$$

综上可得

$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac{1}{2}}\Bigg|\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)|L(1,\chi)|^2\Bigg| \ll$$

$$q\ln^2 qd(q)。$$

引理 3[5]　设整数 $q\geqslant 2$,则我们有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2=$$

$$\frac{\pi^2}{12q^2}\varphi^2(q)\left(q\prod_{p\mid q}\left(1+\frac{1}{p}\right)-3\right)。$$

3　定理的证明

有了上面的预备引理,参考文献[6],下面我们来给出定理的具体证明。

由广义 Kloostermann 和的定义知

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|S(m,n,\chi,q)|^2|L(1,\chi)|^2=$$

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\left(\frac{(a-b)m+(\overline{a}-\overline{b})n}{q}\right)\cdot$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a\overline{b})|L(1,\chi)|^2=$$

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{c=1}^{q}{}'e\left(\frac{a(1-\overline{c})m+\overline{a}(1-c)n}{q}\right)\cdot$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(c)|L(1,\chi)|^2=$$

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2+$$

$$\sum_{c=2}^{q}{}'\sum_{a=1}^{q}{}'e\left(\frac{a(1-\overline{c})m+\overline{a}(1-c)n}{q}\right)\cdot$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(c)|L(1,\chi)|^2。$$

由此及引理 1 得

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|S(m,n,\chi,q)|^2|L(1,\chi)|^2=$$

$$\varphi(q)\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2+$$

$$O\left(\sum_{c=2}^{q}{}'((c-1)m,(\overline{c}-1)n,q)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}d(q)\cdot\right.$$

$$\left.\Bigg|\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(c)|L(1,\chi)|^2\Bigg|\right)。$$

注意到 $(m,q)=(n,q)=(c,q)=1$,及 $(1-c,q)=(c\overline{c}-c,q)=(c(\overline{c}-1),q)=(\overline{c}-1,q)$,于是有 $(c-1,\overline{c}-1,q)=(c-1,q)$,所以由上式及引理 2、引理 3 得

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|S(m,n,\chi,q)|^2|L(1,\chi)|^2=$$

$$\varphi(q)\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2+$$

$$O\left(q^{\frac{1}{2}}d(q)\sum_{c=2}^{q}{}'(c-1,q)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\Bigg|\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(c)|L(1,\chi)|^2\Bigg|\right)=$$

$$\varphi(q)\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2+$$

$$O\left(q^{\frac{1}{2}}d(q)\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d^{\frac{1}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.\Bigg|\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(sd+1)|L(1,\chi)|^2\Bigg|\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{12q^2}\varphi^3(q)\left(q\prod_{p\mid q}\left(1+\frac{1}{p}\right)-3\right)+$$

$$O(q^{\frac{3}{2}}\ln^2 qd^2(q))。$$

于是完成了定理的证明。

参考文献:

[1] APOSTOL TOM M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York:Springer-Verlag,1976.

[2] AMALYSHEV A V. A generalization of Kloostermann sums and their estimates (in Russian)[J]. Vestnik Leningrad Univ,1960,15:59-75.

[3] CHOWLA S. On Kloostermann's sum[J]. Norkse Vid Selbsk Fak Frondheim,1967,40:70-72.

[4] ESTERMANN T. On Kloostermann's sum[J]. Mathematica,1961,8:83-86.

[5] ZHANG Wen-peng. Lecture Notes in Contemporary Mathematics[M]. Beijing:Science Press China,1989.

173-179.

[6] 易 媛,张文鹏.关于Dirichlet L-函数的一次加权均值[J].系统科学与数学,2000,20(3):346-351.

(编 辑 亢小玉)

On the second power mean of Dirichlet L-functions with the weight of general Kloostermann sums

GAO Li

(Yan'an University,Yan'an Shaanxi 716000,China)

Abstract: The main purpose is to use the classical estimation of Kloostermann sum, estimation of the character sum and the analytic method for studying the second power mean of Dirichlet L-functions with the weight of genernal Kloostermann sums, and for giving an interesting second power mean value asymptotic formula.

Key words: Dirichlet L-functions; genernal Kloostermann sums; distribution of the mean value; character sums; asymptotic formula

·学术动态·

“211工程”建设推动地质学系实现跨越式发展

学校“211工程”建设的实质性启动为地质学系的发展提供了难得的机遇。全系上下经过反复讨论、认真论证,克服各种困难,确定了“集中财力,成就大事”的指导思想,明确要将“211工程”建设经费用于全系科学研究的平台建设,改善全系的科研条件。按照这一建设思想,地质学系在这5年期间着重进行了以下几方面的科研平台建设。

一是用“211工程”建设经费加强地质学系的图书资料室建设,使专业藏书量比过去有了很大提高,特别是一批高水平的外文专业期刊和图书的订阅,为科研工作的开展奠定了良好的基础。此后,又为图书资料室配备了微机、电话、调制解调器,使教师能够上网查阅资料。现在又为图书资料室订购了国外网络期刊资料库,便于教师及时了解国内外最新的科研动态。

二是在1999年即用“211工程”建设经费建成了全系的宽带局域网,方便教师们随时掌握本学科的前沿学术成果,及时进行国内外学术交流与合作。局域网建成后,地质学系又不断完善网络建设,提高全系教职员工的微机和网络应用水平,使全系教师能够充分发挥互联网作用,开展科研工作。

三是借助“211工程”建设的东风将全系的科研实验室整合为大陆动力学实验室,用“211工程”建设经费集中力量建设大陆动力学实验室,使该实验室成为全系争取“973”重大项目、国家基金重点项目和横向重大项目等的重要技术支撑,而全系的科学研究工作又有力地促进了实验室建设,使该实验室于2000年以评审得分排名第一的优异成绩成为教育部重点实验室,2002年再次以优秀的评审成绩成为省部共建国家重点实验室培育基地。此外,大陆动力学实验室自2001年开始连续3年在国际上参加了全球实验室测试水平检验,2001年的检验结果为3个全优实验室之一,2002年和2003年的检验结果均为全球第一。

四是用“211工程”建设经费强化国内外学术交流,提高教师整体科研水平。5年内邀请了近百位国内外知名专家学者来校讲学或合作交流;派出数十人次出国参加学术交流与合作研究,仅2002年就有18人次出国;派出200余人次参加了国际国内学术会议。

五是用“211工程”建设经费改善了地质学系的整体环境,为教师们创造了优良的科研条件。

正是由于地质学系始终坚持将“211工程”建设经费用于科研平台建设,才使得“211工程”建设成为地质学系科学研究腾飞的翅膀,使地质学系的科研到款经费远远大于投入的“211工程”建设经费。

(薛 鲍)