

用等效膜理论分析一维光子晶体的禁带特征

郑新亮, 陈慰宗, 付灵丽

(西北大学 物理学系, 陕西 西安 710069)

摘要: 论述了等效膜理论和等效折射率概念, 并通过数值计算得出了有限周期一维光子晶体的等效折射率随频率的变化。结果表明: 在光子禁带等效折射率不存在, 在光子禁带两边等效折射率分别趋于无穷大或者零; 在光子透射带, 等效折射率是有限值。此外, 还用等效折射率的不连续特点, 讨论了在不同结构的一维光子晶体中禁带发生位置的变化。

关键词: 等效膜理论; 一维光子晶体; 三层对称膜; 等效折射率; 光子禁带

中图分类号: O437 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-274 X (2003)04-0401-04

通常, 把折射率和厚度周期性变化的一个多层介质膜系, 可以分成很多个相同的三层对称膜。例如一个由高、低折射率介质薄膜(光学厚度各为 $\lambda_0/4$)组成的多层介质膜系, 它的膜层结构可以写成:

...HLHLHL...。其中 H, L 分别代表光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的高、低折射率的薄膜, 它可以分解成 $\frac{H}{2}L\frac{H}{2}$ 或者 $\frac{H}{2}L\frac{H}{2}$ 的基本对称单元的重复组合, 如图 1 所示。

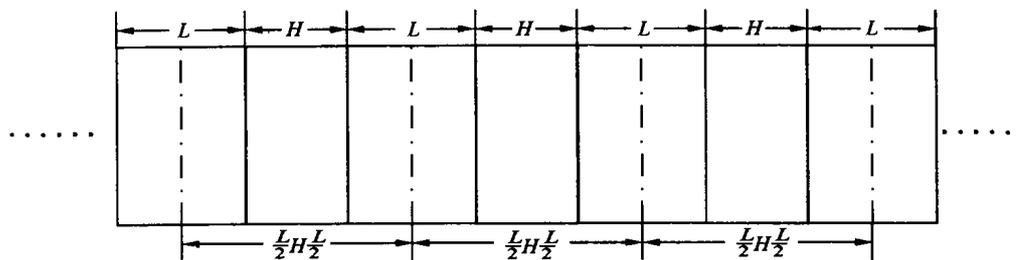


图 1 一个多层介质膜系可以分解成相同的三层对称膜的连续组合

Fig1 The many-layer stack can be resolved into connected combination of the same symmetric stack of three layers

每一个三层对称膜系可以相当于一个单层介质膜, 它有一个等效折射率和一个等效位相厚度^[1]。数学上可以证明, 对于以中间一层为中心、两边对称排列的多层膜, 具有类似单层膜特征矩阵的所有特点, 那么可将其看作一个等效层, 这样可以把一个复杂问题的处理简单化。

从结构上看, 周期性多层介质膜就是一维光子晶体, 因此, 用等效膜的方法对一维光子晶体进行分析, 有很多优点及方便之处。

1 对称介质膜系的等效层理论

单层介质膜的特征矩阵为

收稿日期: 2002-05-21

作者简介: 郑新亮(1974-), 男, 陕西富平人, 西北大学助教, 从事光子晶体及生物光子学研究。

$$M = \begin{bmatrix} \cos\delta & \frac{i}{\eta}\sin\delta \\ i\eta\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 η 是单层膜的导纳, 对于无吸收的介质来说, η 就是介质的折射率 n 与光的入射角 θ 的函数, 对于 s 偏振光 $\eta_s = n\cos\theta$, 对于 p 偏振光 $\eta_p = n/\cos\theta$ 。单层介质膜的位相厚度是 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}nd\cos\theta$, d 是其物理厚度。从式(1)看出, 单层介质膜的矩阵元 m_{11}, m_{22} 为实数, m_{12} 和 m_{21} 为纯虚数, 并且 $m_{11} = m_{22}$, 特征矩阵行列式的值等于 1, 即 $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$ 。

多层介质膜系的特征矩阵是各个单层膜特征矩阵的连乘积

$$M = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_k = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其矩阵元 M_{11} 和 M_{22} 为实数, M_{12} 和 M_{21} 为纯虚数, 特征矩阵行列式的值等于 1, 但一般说来 $M_{11} \neq M_{22}$. 因此, 不能和一层单层膜等效, 但对于以中间一层为中心, 两边对称排列的多层介质膜, 却具有类似单层膜特征矩阵的所有特点.

设最简单的对称膜系为 (pqp), 即两层相同的 p 介质, 中间夹一层 q 介质. 该对称膜系的特征矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta_p & \frac{i}{\eta_p} \sin\delta_p \\ i\eta_p \sin\delta_p & \cos\delta_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\delta_q & \frac{i}{\eta_q} \sin\delta_q \\ i\eta_q \sin\delta_q & \cos\delta_q \end{bmatrix}. \quad (3)$$

做矩阵乘法可以得出

$$M_{11} = M_{22} = \cos 2\delta_p \cos \delta_q - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_q}{\eta_p} + \frac{\eta_p}{\eta_q} \right) \sin 2\delta_p \sin \delta_q; \quad (4)$$

$$E = \frac{\eta_p [\sin 2\delta_p \cos \delta_q + \frac{1}{2} (\frac{\eta_p}{\eta_q} + \frac{\eta_q}{\eta_p}) \cos 2\delta_p \sin \delta_q - \frac{1}{2} (\frac{\eta_p}{\eta_q} - \frac{\eta_q}{\eta_p}) \sin \delta_q]^{\frac{1}{2}}}{[\sin 2\delta_p \cos \delta_q + \frac{1}{2} (\frac{\eta_p}{\eta_q} + \frac{\eta_q}{\eta_p}) \cos 2\delta_p \sin \delta_q + \frac{1}{2} (\frac{\eta_p}{\eta_q} - \frac{\eta_q}{\eta_p}) \sin \delta_q]^{\frac{1}{2}}}, \quad (10)$$

$$\Gamma = \cos^{-1} [\cos 2\delta_p \cos \delta_q - \frac{1}{2} (\frac{\eta_p}{\eta_q} + \frac{\eta_q}{\eta_p}) \sin 2\delta_p \sin \delta_q]. \quad (11)$$

式(10)和式(11)显示, 等效折射率和等效位相厚度仅仅依赖于 η_p/η_q , δ_p 和 δ_q . 当这些参数变化时, 对称膜的光学特性也会发生变化.

任何对称膜系在数学上存在着等效折射率和等效位相厚度, 即可以用一等效的单层膜来代替, 这一发现的重要性既在于它的光学特性容易得到解释和计算, 又在于容易将单个周期的结果推广到多个周期组成的多层膜.

若令一个周期性对称膜系的基本周期的特征矩阵如式(7)所示, 那么由 S 个基本周期组成的膜系的特征矩阵为

$$M^S = \begin{bmatrix} \cos S\Gamma & \frac{i}{E} \sin S\Gamma \\ iE \sin S\Gamma & \cos S\Gamma \end{bmatrix}, \quad (12)$$

可以证明^[2]

$$M^S = \begin{bmatrix} \cos S\Gamma & \frac{i}{E} \sin S\Gamma \\ iE \sin S\Gamma & \cos S\Gamma \end{bmatrix}. \quad (13)$$

式(13)表示 S 个周期性对称膜组成的对称膜系, 在它的透射带中仍然存在着一个等效折射率, 它与基本周期的等效折射率 E 完全相同, 并且它的等

$$M_{12} = \frac{i}{\eta_p} [\sin 2\delta_p \cos \delta_p + \frac{1}{2} (\frac{\eta_q}{\eta_p} + \frac{\eta_p}{\eta_q}) \cdot \cos 2\delta_p \sin \delta_q + \frac{1}{2} (\frac{\eta_p}{\eta_q} - \frac{\eta_q}{\eta_p}) \sin \delta_q]; \quad (5)$$

$$M_{21} = i\eta_p [\sin 2\delta_p \cos \delta_p + \frac{1}{2} (\frac{\eta_q}{\eta_p} + \frac{\eta_p}{\eta_q}) \cdot \cos 2\delta_p \sin \delta_q - \frac{1}{2} (\frac{\eta_p}{\eta_q} - \frac{\eta_q}{\eta_p}) \sin \delta_q]. \quad (6)$$

由于式(4)成立, 即对称膜系的特征矩阵和单层膜的特征矩阵具有相同的形式, 可设

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & \frac{i}{E} \sin \Gamma \\ iE \sin \Gamma & \cos \Gamma \end{bmatrix}. \quad (7)$$

因此, 三层对称膜系可以用 1 层特殊的等效单层膜来描述, 这层等效膜的折射率为 E , 等效位相厚度为 Γ . 它们分别由下面两式决定

$$\cos \Gamma = M_{11} = M_{22}, \quad (8)$$

$$E = (\frac{M_{21}}{M_{12}})^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

这样, 再从式(4~6)可以得出

等效位相厚度等于基本周期的等效位相厚度 Γ 的 S 倍. 这说明, 在考虑周期性对称膜系透射带中的透射率问题时, 只要考虑它的基本周期的性质就够了.

2 用等效膜理论分析一维光子晶体的禁带特征

周期性的多层介质膜和一维光子晶体在结构上是相同的, 因此, 可以用等效膜的方法分析一维光子晶体的特征.

2.1 光子禁带与等效折射率

从式(4)可以看出: 在某些波长范围内会出现 $|M_{11}| = |M_{22}| > 1$ 的情况, 这时 $|\cos \Gamma| > 1$, 等效位相厚度 Γ 是虚数, 这个波长范围对应着一维光子晶体的禁带, 而 Γ 是实数的波段, 即 $|\cos \Gamma| < 1$, 对应着光子晶体的透射带.

当 $|\cos \Gamma| = 1$ 时的波长是由光子透射带向禁带过渡的波长, 由于特征矩阵是单位矩阵, $M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1$, 而这时 $M_{11}M_{22} = 1$, $M_{12}M_{21} = 0$. 根据式(9), M_{12} 和 M_{21} 中, 若 $M_{12} = 0$, E 就趋于无限

大;若 $M_{21} = 0$, E 就趋于零,所以在禁带的两边, E 就趋于无限大或趋于零。因此,只要计算出 E 的值,就可以找到光子禁带的位置。而在禁带的中间, E 不存在。

2.2 由 $\lambda_0/4$ 厚度的薄膜组成的一维光子晶体的等效折射率 E 与光子禁带

现在讨论由高、低折射率介质薄膜(光学厚度各为 $\lambda_0/4$) 组成的一维光子晶体的等效折射率及禁带特征。假定折射率分别是: $n_p = 1.35$ (MgF_2), $n_q =$ (TiO_2), 参考波长 $\lambda_0 = 1\mu$, 并假定光线是正入射。如图 1 所示的方法,把这个一维光子晶体看成是由中心对称的基本周期组成,现在用数值解计算中心对称的基本周期的 E 随相对频率 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 变化的曲线。为

此,设 $2\delta_p = 2\delta_{p1}g, \delta_q = \delta_{q1}g, \delta_{p1}$ 和 δ_{q1} 是常数位相厚度。对于由 $\lambda_0/4$ 光学厚度的薄膜组成的一维光子晶体: $2\delta_{p1} = \delta_{q1} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{2\delta_{p1}}{\delta_{q1}} = 1$ 。

按以上给出的参数,可以计算出 $E-g$ 变化曲线,如图 2 所示。从图 2 可以看出,在 $g = 1, 3, 5, \dots$ 等处, E 值不连续,出现断开处,这些位置是光子禁带,在禁带的一边 E 趋于零,而另一边 E 趋于无限大。

当两种折射率的差别增大时,如 $n_p = 1.35$ (MgF_2), $n_q =$ (聚苯乙烯),仍按上述方法作出 $E-g$ 曲线,如图 3 所示。从图 3 可以看出,光子禁带仍出现在 $g = 1, 3, 5, \dots$ 等处,但 E 的断开处增宽,也就是光子禁带宽度加大了,这和用转移矩阵方法得到的结果一致^[3]。

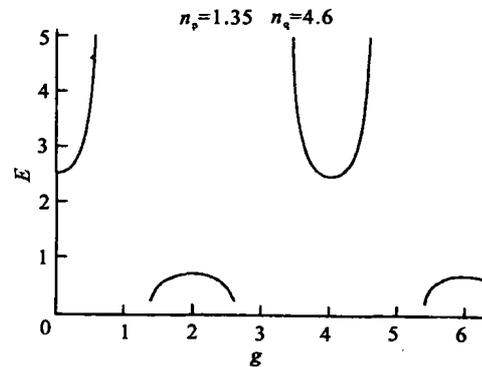
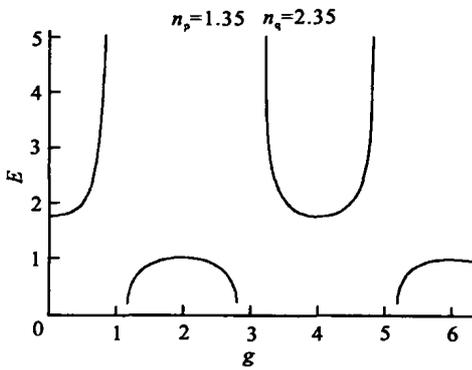


图 2 等效折射率 E 随相对频率 $g(= \frac{\omega}{\omega_0})$ 的变化 ($\frac{2\delta_{p1}}{\delta_{q1}} = 1$)

Fig. 2 The variation of equivalent refractive indexes E with relative frequency $g(= \frac{\omega}{\omega_0})$, ($\frac{2\delta_{p1}}{\delta_{q1}} = 1$)

图 3 等效折射率 E 随相对频率 $g(= \frac{\omega}{\omega_0})$ 的变化 ($\frac{2\delta_{p1}}{\delta_{q1}} = 1$)

Fig. 3 The variation of equivalent refractive indexes E with relative frequency $g(= \frac{\omega}{\omega_0})$, ($\frac{2\delta_{p1}}{\delta_{q1}} = 1$)

2.3 不同结构的基本对称周期具有不同位置的光子禁带

在 2.2 中讨论的是由 $\lambda_0/4$ 薄膜组成的一维光子晶体的等效折射率 E 与光子禁带,在这种情况下, $2\delta_{p1}/\delta_{q1} = 1$ 。现在讨论当基本对称周期的结构不是 $\lambda_0/4$ 薄膜,而是当 $2\delta_{p1}/\delta_{q1} = 2$ 时,即 $2\delta_{p1} = \frac{\pi}{3}, \delta_{q1} = \frac{2\pi}{3}$, 但 $2\delta_{p1} + \delta_{q1} = \pi$ 仍然成立, $n_p = 1.35, n_q = 2.35$, 做出 $E-g$ 变化曲线,如图 4 所示。从图 4 中可以看出,光子禁带出现在 $g = 1, 2, 4, 5, \dots$ 等处。

$\delta_{q1} = \pi$ 仍然成立。其他参数不变。作出 $E-g$ 变化曲线,如图 5 所示。从图 5 可以看出,光子禁带出现在 $g = 1, 2, 3, 5, 6, \dots$ 等处。其结果与其他方法得到的结果相同^[4]。从图 4, 5 中还可看出,在禁带 E 仍然是断开的,在禁带一边, E 趋于无穷大,在另一边趋于零。这一点与 2.2 的情况相同。

由此可以看出,当一维光子晶体的基本对称周期的结构不相同,光子禁带出现的位置不同。这样就可以通过选择基本周期的参数,设计出所需要的光子禁带的位置、宽度等特性。

当 $2\delta_{p1}/\delta_{q1} = 3$, 即 $2\delta_{p1} = \frac{\pi}{4}, \delta_{q1} = \frac{3\pi}{4}$, 但 $2\delta_{p1} +$

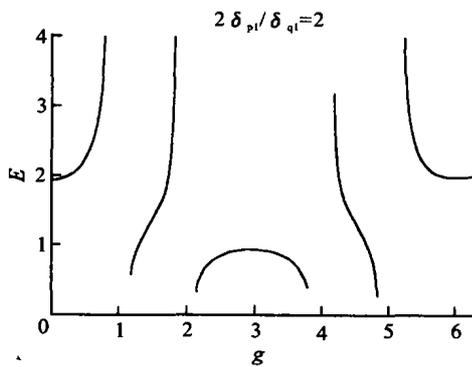


图 4 等效折射率 E 随相对频率 $g(=\frac{\omega}{\omega_0})$ 的变化 ($n_p = 1.35$, $n_q = 2.35$)

Fig. 4 The variation of equivalent refractive indexes E with relative frequency $g(=\frac{\omega}{\omega_0})$, ($n_p = 1.35, n_q = 2.35$)

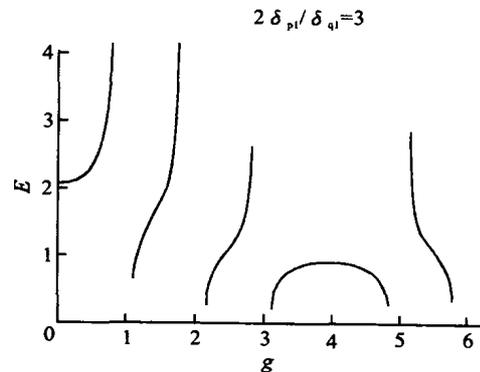


图 5 等效折射率 E 随相对频率 $g(=\frac{\omega}{\omega_0})$ 的变化 ($n_p = 1.35$, $n_q = 2.35$)

Fig. 5 The variation of equivalent refractive indexes E with relative frequency $g(=\frac{\omega}{\omega_0})$, ($n_p = 1.35, n_q = 2.35$)

参考文献:

- [1] 唐晋发, 郑 权. 应用薄膜光学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984. 90-100.
- [2] Van der LAAN C J, FRANKENA H J. Equivalent layers; another way to look at them[J]. Applied Optics, 1995, 34(4): 681-687.

- [3] 陈慰宗, 申 影, 郑新亮, 等. 一维光子晶体的带隙分析[J]. 光子学报, 2001, 30(9): 1 077-1 080.
- [4] 陈慰宗, 申 影, 忽满利, 等. 一维光子晶体的基本周期结构及其禁带特征[J]. 光子学报, 2001, 30(12): 1 453-1 456.

(编辑 曹大刚)

Analysis the properties of forbidden bands in one-dimensional photonic crystal with equivalent-layer theory

ZHENG Xin-liang, CHEN Wei-zong, FU Ling-li

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: The concept of equivalent-layer theory and equivalent refractive index were described. The numerical calculation of equivalent refractive index variety with frequency in finite-period one-dimensional photonic crystal has been done. The results indicated that the equivalent refractive indexes are not existence in photonic forbidden bands and in both sides of forbidden bands. The equivalent refractive indexes tend to infinity or zero. The equivalent refractive indexes are finite values in pass bands. The forbidden bands places in different structures of one-dimensional photonic crystals were discussed with the unconnected character of equivalent refractive indexes.

Key words: equivalent-layer theory; one-dimensional photonic crystal; symmetric stack of three layers; equivalent refractive index; photonic forbidden band