2001 年 4 月
第 31 卷第 2 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Apr. 2002
Vol. 31 No. 2

最优证券组合投资模型

张 璞[1],李 鑫[2],窦霁虹[3]

(1. 西安交通大学 理学院,陕西 西安 710049;2. 长庆石油建设银行,甘肃 庆阳 745100;3. 西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:在 Markowitz 组合理论基础上,提出一种"投资偏好曲线",并以此作为工具,设计了一种确定特定投资者最优证券组合的方法,有效弥补了证券组合的不足。

关 键 词:证券组合;投资偏好曲线;风险偏好

中图分类号:O29;F224 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2001)02-0099-03

1952 年,美国经济学家、金融学家、诺贝尔奖获得者 Markowitz 第一次从风险资产的收益率与风险之间的关系出发,讨论了确定经济系统中最优资产组合的选择问题,证明了最小方差组合是一条开口向右的抛物线,分别确定了具有无风险资产和不具有无风险资产情况下的有效边缘,获得了著名的两基金分离定理。在具有无风险资产情况下,投资者的有效边缘是 R_fm 射线,其上任一组合都可由无风险资产 R_f 和切点资产组合 m 的线性组合得到,即投资者任意把资金分摊到这两个组合后所得组合仍是有效组合。但是,并没有从理论上告诉特定投资者如何根据自己的风险偏好在二组合中进行选择,即如何确定在二组合之间的投资比例。本文在此基础上,利用特定投资者对风险的偏好,有效地设计出了一种确定特定投资者最优投资组合的方法。

1 关于投资偏好曲线

投资者首先要对风险厌恶程度做出判断,这种判断要符合投资者的投资心理,代表投资者的投资倾向。它具体通过对下述参数的选择来进行。

设 $\alpha R=(1-\alpha)\sigma,\quad \alpha\in[0,h_0)$,

$$h_0=\frac{1}{1+\dfrac{R_m-R_f}{\sigma_m}}=\frac{\sigma_m}{R_m-R_f+\sigma_m}\text{(常数)},$$

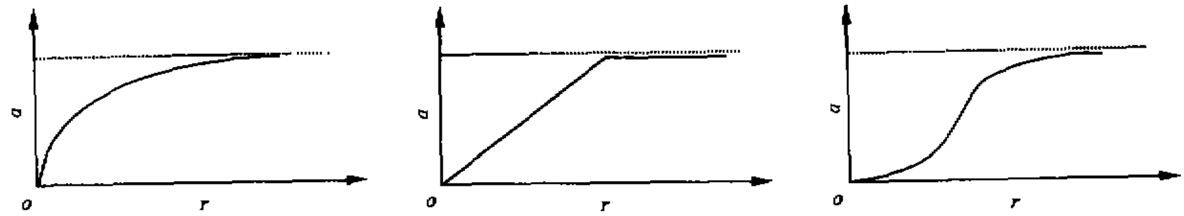
$$R=\frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma,\quad (\alpha\neq 0)。\qquad (1)$$

其中 R_f 为无风险收益率,R_m,σ_m 分别为市场证券组合的收益率和风险,$\alpha=\alpha(R_m-R_f)=\alpha(r)$,$r\geqslant 0$,$\alpha\in[0,h_0)$,风险因子 α 是 r 的增函数,且逐渐接近于 h_0。$\alpha(r)$ 服从如下规律:冒险型的投资者热衷于高风险、高收益,因此,随着超额收益 r 的增加,风险偏好因子 α 以递增的速度增加,其规律见图 1a;保守型的投资者更看重收益,随着超额收益 r 的增长,风险偏好因子 α 开始的速度增量小于零,当超额收益增长到很高程度时,风险偏好因子的速度增量大于零,并无限接近于 h_0,其规律见图 1c;中间型的投资者比较稳健,收益与风险并重,因此其风险偏好因子 α 与超额收益 r 的关系见图 1b。

为了符合一般习惯,可令 $\beta=(1+\dfrac{R_m-R_f}{\sigma_m})\alpha=\dfrac{\alpha}{h_0}$,即 $\alpha=h_0\beta$,$\beta\in[0,1)$ α 和 β 是线性关系,服从相同的规律,实践中只要对 β 进行选择即可,比如:当 $\beta=0$ 时,$\alpha=0$,$\sigma=0$,表示极度风险厌恶;当 $\beta=0.8$ 时,$\alpha=0.8h_0$,$R=\dfrac{1-0.8h_0}{0.8h_0}\sigma$,表示投资者具有冒险精神,敢于冒高风险去追求高收益;当 $\beta\to 1$ 时,$\alpha\to h_0$,$R\to\dfrac{1-h_0}{h_0}\sigma=\dfrac{R_m-R_f}{\sigma_m}\sigma$,偏好曲线和证券市场线接 r。

风险因子 β 从 0 到 1 变化过程,也就是投资者

收稿日期:1999-12-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19802017)
作者简介:张璞(1967-),男,陕西延安人,西安交通大学博士生,从事经济数学研究。



a b c

图 1 风险偏好因子与超额收益之关系

Fig. 1 Relationship between the risk preferred factor and the excessive profit

从极度风险厌恶状态到完全风险暴露状态变化的过程，所以 β 可用来衡量投资者对风险的厌恶程度，不同的投资者可选择不同的 β 值。

而 $R=\frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma$ 为经过原点斜率为 $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ 的一条直线(见图 2)，斜率的大小衡量了投资者风险厌恶程度或投资偏好程度，我们把它叫做“投资偏好曲线”。

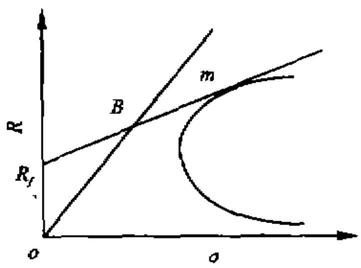


图 2 风险与收益率之关系

Fig. 2 Relationship between the risk and the rate of profit

2 投资者偏好曲线的最优证券组合

由证券组合理论知，证券组合的最小方差曲线是开口向右的一条抛物线，在有无风险资产的情况下，投资者有效边缘曲线是连接 R_f 和切点组合 m 的射线。

设资本市场线 CML 的方程为

$$R=R_f+\frac{R_m-R_f}{\sigma_m}\sigma, \tag{2}$$

联立式(1)与式(2)得

$$\begin{cases} R=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\sigma, \\ R=R_f+\dfrac{R_m-R_f}{\sigma_m}\sigma, \end{cases}$$

由式(1)知，$0\leqslant\alpha<h_0=\frac{\sigma_m}{R_m-R_f+\sigma_m}$，

$$1+\frac{R_m-R_f}{\sigma_m}<\frac{1}{\alpha},$$

$$\frac{R_m-R_f}{R_m-R_f+\sigma_m}<1-\alpha\leqslant 1,$$

则 $\frac{1-\alpha}{\alpha}>\frac{R_m-R_f}{\sigma_m}$。

即偏好曲线的斜率大于资本市场线的斜率，该方程组有解。通过求解上方程组得

$$\begin{cases} R_0=\dfrac{(1-\alpha)\sigma_m R_f}{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)}, \\ \sigma_0=\dfrac{\alpha\sigma_m R_f}{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)}。 \end{cases}$$

即 B 点的坐标为 (σ_0,R_0)，它是该投资者的最优均值方差证券组合。记 R_f 到 $B(\sigma_0,R_0)$ 点的有向线段长度为 d_1，$B(\sigma_0,R_0)$ 到 m 的有向线段长度为 d_2，则从 m 到 $B(\sigma_0,R_0)$ 的有向线段长度为 $-d_2$。而且，计算时总是从线段的左端开始向右度量，否则，前面加负号，则

$$d_1=\sqrt{(R_0-R_f)^2+\sigma_0^2}=$$

$$\frac{\alpha R_f\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|}。$$

$$d_2=\sqrt{(R_0-R_m)^2+(\sigma_0-\sigma_m)^2}=$$

$$\frac{|\alpha R_m-(1-\alpha)\sigma_m|\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|}。$$

1) 当 (σ_m,R_m) 在 $R=\frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma$ 下方时，意即 $B(\sigma_0,R_0)$ 必落在线段 R_fm 内，此时有

$$\alpha R_m-(1-\alpha)\sigma_m<0,$$

$$d_1=\sqrt{(R_0-R_f)^2+\sigma_0^2}=$$

$$\frac{\alpha R_f\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|},$$

$$d_2=\sqrt{(R_0-R_m)^2+(\sigma_0-\sigma_m)^2}=$$

$$\frac{((1-\alpha)\sigma_m-\alpha R_m)\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|},$$

$$d_1+d_2=$$

$$\frac{[(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)]\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|},$$

$$\frac{d_1}{d_1+d_2}=\frac{\alpha R_f}{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)},$$

$$\frac{d_2}{d_1+d_2}=\frac{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha R_m}{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)}=$$
$$1-\frac{d_1}{d_1+d_2}。$$

即投资者把比例为 $\frac{d_2}{d_1+d_2}$ 的资金投资到无风险证券上,把剩余比例为 $\frac{d_1}{d_1+d_2}$ 的资金投资到风险证券组合 m 上。

2) 当组合 (σ_m,R_m) 在 $R=\frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma$ 上时,有

$$\alpha R_m-(1-\alpha)\sigma_m=0。$$

此时, $d_1=\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}$, $d_2=0$,

$$\frac{d_1}{d_1+d_2}=1,\quad \frac{d_2}{d_1+d_2}=0。$$

即投资者不投资也不卖空无风险证券,只是把所有资金都投资到市场证券组 m。

3) 当组合 (σ_m,R_m) 在 $R=\frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma$ 的上方时,最优均值方差组合落在射线 R_fm 上 m 点的右边,此时有 $\alpha R_m-(1-\alpha)\sigma_m>0$。

$$d_1=\sqrt{(R_0-R_f)^2+\sigma_0^2}=$$
$$\frac{\alpha R_f\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|},$$
$$d_2=\sqrt{(R_0-R_m)^2+(\sigma_0-\sigma_m)^2}=$$
$$\frac{(\alpha R_m-(1-\alpha)\sigma_m)\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|},$$
$$d_1+(-d_2)=$$
$$\frac{[(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)]\sqrt{(R_m-R_f)^2+\sigma_m^2}}{|(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)|}$$
$$=R_fm,$$

则 $(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)>0$。

$$\frac{d_1}{R_fm}=\frac{d_1}{d_1-d_2}=\frac{\alpha R_f}{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha(R_m-R_f)}=$$
$$1+\frac{\alpha R_m-(1-\alpha)\sigma_m}{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha R_m+\alpha R_f}>1,$$
$$\frac{-d_2}{d_1-d_2}=1-\frac{d_1}{d_1-d_2}=$$
$$-\frac{\alpha R_m-(1-\alpha)\sigma_m}{(1-\alpha)\sigma_m-\alpha R_m+\alpha R_f}<0。$$

此结果说明投资者是冒险型的,他不仅把自己的全部资金投资到风险证券组合 m 上,而且卖空比例为 $\frac{d_2}{d_1-d_2}$ 的无风险证券,并把所得资金全部投资到风险证券组合 m 上。

从上面的分析讨论可以看出,该方法具有简单、方便、有效和可操作性强的特点,投资者只需要在 0 和 1 之间选择自己的风险偏好因子,就能很快确定他的最优投资组合。该方法对证券投资者及进一步理论研究具有参考价值。

参考文献:

[1] 荣喜民.组合证券投资模型研究[J].系统工程学报,1998,18(1):28-32.

[2] 刘　星.证券组合投资决策的两种优化方法[J].预测,1996,10(2):36-42.

[3] 张国卫.无风险投资或贷款下证券组合优化模型及应用[J].预测,1996,10(1):23-26.

[4] ZENIOUS S. Financial Optimization[M]. London:Cambridge University Press,1993.

(编　辑　曹大刚)

On optimal portfolio investment models

ZHANG Pu[1], LI Xin[2], DOU Ji-hong[3]

(1. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Construction Bank of Changqing, Qingyang, Gansu 745100, China; 3. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Based on the Markowitz portfolio theory, an investment preferred curve is proposed and an approach to determining the optimal portfolio of a specific investor is designed by using the preferrd curve as its tool. This algorithm is an effective complement for the portfolio selection theory.

Key words: portfolio; investment preferred curve; preference