2003 年 12 月
第 33 卷第 6 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Dec. 2003
Vol. 33 No. 6

# 正定二次规划的一个区域分解算法

刘小冬[1],刘　哲[1],张　蕾[2]

(1. 西北工业大学 应用数学系,陕西 西安　710072;2. 西北大学 计算机科学系,陕西 西安　710069)

**摘要**:给出了一个求解正定二次规划的区域分解方法。首先证明了任何一个正定二次规划问题与一个有界区域上的正定二次规划问题是等价的。然后,依据一定的准则将有界区域分解成一系列的单纯形,通过求解每个单纯形上正定二次函数的最优解,迭代到原问题的最优解。该方法有很明显的优点:① 求解单纯形上目标函数的最优解是一个无约束正定二次规划问题;② 构造单纯形是通过求解线性规划问题得到。算例表明,本算法是有效的。

**关　键　词**:正定二次规划;单纯形;仿射流形;最优解

**中图分类号**:O221.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-274X(2003)06-625-04

20 世纪 40 年代以前,寻求函数极值的方法主要是采用古典的微分法与变分法。在第二次世界大战之后,由于军事上的需要逐渐形成了运筹学,出现了许多用古典数学方法不能替代的最优化方法,如线性规划、非线性规划、动态规划、几何规划和最大值原理等。这些方法到 20 世纪 60 年代开始在各个领域得到应用和发展。文献[1]介绍了线性与非线性规划的原理与传统的求解方法。1961 年 Dantzig 和 Wolfe[2]给出了一种求解大规模线性规划问题的分解方法,开辟了用分解算法求解大规模问题的研究分支。本文考虑求解正定二次规划 $\min\left\{f(x)=d^{\mathrm{T}}x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}x:\boldsymbol{A}x\leqslant b,x\geqslant 0\right\}$ 其中 $d,x$ 为 $n$ 维列向量,$b$ 为 $m$ 维列向量,$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{H}$ 为 $n\times n$ 正定对称阵。应用文献[3]的思想,给出了正定二次规划的一个区域分解算法。

## 1　等价问题

**引理 1**　设 $x^0\in\{x:\boldsymbol{A}x\leqslant b,x\geqslant 0\}$,$\nabla f(x^0)\neq 0$,则 $f(x)$ 在 $\{x:\boldsymbol{A}x\leqslant b,x\geqslant 0\}$ 上的最优解 $x^*$ 满足

$$x_i^*\leqslant\sqrt{(\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\mathrm{e})(d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}d+2f(x^0))}-\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}d\triangleq u\qquad(i=1,2,\cdots,n)。$$

因此,任何正定二次规划

$$\min\left\{f(x)=d^{\mathrm{T}}x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}x:\boldsymbol{A}x\leqslant b,x\geqslant 0\right\}$$

问题有等价问题

$$\min\left\{f(x)=d^{\mathrm{T}}x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}x:x\in X\right\}。$$

其中

$$X=\{x:\boldsymbol{A}x\leqslant b,\ 0\leqslant x\leqslant u\mathrm{e}\},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{T}}=(1,1,\cdots,1)。$$

## 2　正定二次函数在仿射流形上的最优解

**定义 1**　设 $B=\{x^1,\cdots,x^k\}$,$\mathrm{Aff}B=\{x:x=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^j,\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1\}$ 称为由 $B$ 生成的仿射流形。

**定义 2**　设 $B=\{x^1,\cdots,x^k\}$,若 $x^1-x^k,\cdots,x^{k-1}-x^k$ 线性无关,则 $B=\{x^1,x^2,\cdots,x^k\}$ 称为仿射基。

**引理 2**　设 $B=\{x^1,\cdots,x^k\}$ 为仿射基,则 $\mathrm{Aff}B$ 上的任何 $x=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^j(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1)$ 的表示是惟一的,并且有 $x=Dv+x^k$,其中 $D=(x^1-x^k,\cdots,x^{k-1}-x^k)$,$v\in\mathbf{R}^{k-1}$。

**定理 3**　设 $B=\{x^1,\cdots,x^k\}$ 为仿射基,$D=(x^1-x^k,\cdots,x^{k-1}-x^k)$,则 $\min\{f(x):x\in\mathrm{Aff}B\}$ 有最

**收稿日期**:2002-05-01

**基金项目**:航空科学基金资助项目(01J53079)

**作者简介**:刘小冬(1963-),男,陕西西安人,西北工业大学教授、博士,从事自然语言理解、运筹学等方面研究。

优解 $x^* = Dv^* + x^k$，其中 $v^* = -(D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}D)^{-1}(d^{\mathrm{T}}D + (x^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}D)$。

因 $B$ 为仿射基，对任何 $x \in \mathrm{Aff}B$，有 $x = Dv + x^k$，$D = (x^1 - x^k, \cdots, x^{k-1} - x^k)$，$v \in \mathbf{R}^{k-1}$，所以 $\min\{f(x) : x \in \mathrm{Aff}B\}$ 与 $\min\{f(Dv + x^k) : v \in \mathbf{R}^{k-1}\}$ 等价。定理 3 表明，若 $B$ 为仿射基，则求解 $\min\{f(x) : x \in \mathrm{Aff}B\}$ 等价于求解一个无约束正定二次规划问题 $\min\{f(Dv + x^k) : v \in \mathbf{R}^{k-1}\}$，且有公式解。

## 3 正定二次函数在单纯形上的最优解

**定义 3** 设 $B = \{x^1, \cdots, x^k\}$ 为仿射基，$\mathrm{Sim}B = \{x : x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, k\}$ 称为由 $B$ 生成的单纯形，$x^1, x^2, \cdots, x^k$ 称为 $\mathrm{Sim}B$ 的极点。

**定义 4** 设 $B = \{x^1, \cdots, x^k\}$ 为仿射基，$\mathrm{RiSim}B = \{x \in \mathrm{Sim}B : \forall\, d \in \mathbf{R}^n, \exists\, \varepsilon > 0$，当 $x + \varepsilon d \in \mathrm{Aff}B$ 时，有 $x + \varepsilon d \in \mathrm{Sim}B\}$ 称为 $\mathrm{Sim}B$ 相对于 $\mathrm{Aff}B$ 的内点集。

**定义 5** 设 $B = \{x^1, \cdots, x^k\}$ 为仿射基，$x \in \mathrm{Sim}B$，即 $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j$，$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, k$，若 $\lambda_j > 0$，则称 $x^j$ 为 $x$ 的有效极点。

**引理 4** 设 $B = \{x^1, \cdots, x^k\}$ 为仿射基，若 $x \in \mathrm{RiSim}B$，则 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 都是 $x$ 的有效极点。

**定理 5** 设 $\bar{B}$ 为仿射基，$\bar{x} \in \mathrm{RiSim}\bar{B}$ 为 $\min\{f(x) : x \in \mathrm{Sim}\bar{B}\}$ 最优解的充分必要条件是对任何 $x \in \mathrm{Aff}\bar{B}$，均有 $\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x - \bar{x}) = 0$。

**证　明**

必要性

1) 若存在 $x^0 \in \mathrm{Aff}\bar{B}$，使 $\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^0 - \bar{x}) < 0$，因为 $\bar{x} \in \mathrm{RiSim}\bar{B}$，则对于充分小的 $\lambda > 0$，有 $\hat{x} = \bar{x} + \lambda(x^0 - \bar{x}) \in \mathrm{Sim}\bar{B}$，使 $f(\hat{x}) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^0 - \bar{x}) + \frac{\lambda^2}{2}(x^0 - \bar{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(x^0 - \bar{x}) < f(\bar{x})$，与题设矛盾。

2) 若存在 $\hat{x} \in \mathrm{Aff}\bar{B}$，使 $\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(\hat{x} - \bar{x}) > 0$，取 $x^0 = 2\bar{x} + (-1)(\bar{x} + \lambda(\hat{x} - \bar{x})) \in \mathrm{Aff}\bar{B}$ 对于充分小的 $\lambda > 0$ 成立，但 $\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^0 - \bar{x}) = -\lambda \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(\hat{x} - \bar{x}) < 0$，转化为情况 1。

充分性

因为对任何 $x \in \mathrm{Aff}\bar{B}$，$x \neq \bar{x}$，$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(x - \bar{x}) > f(\bar{x})$，所以，$\bar{x}$ 是 $\min\{f(x) : x \in \mathrm{Sim}\bar{B}\}$ 的最优解。

## 4 由正定二次函数在流形上的最优解求单纯形上的最优解

**定理 6** 设 $\bar{B} = \{x^1, \cdots, x^{k-1}\}$ 和 $B = \{x^1, \cdots, x^{k-1}, x^k\}$ 均为仿射基，$D = (x^1, \cdots, x^{k-1}, x^k)$，$\bar{x} \in \mathrm{RiSim}\bar{B}$ 为 $\min\{f(x) : x \in \mathrm{Sim}\bar{B}\}$ 的最优解，$\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^k - \bar{x}) < 0$，$x^* \in \mathrm{Aff}B$ 为 $\min\{f(x) : x \in \mathrm{Aff}B\}$ 上的最优解，$x^* = Dw^*$，$w^* = (w_1^*, w_2^*, \cdots, w_k^*)^{\mathrm{T}}$，$\sum_{i=1}^{k} w_i^* = 1$，则

1) $w_k^* > 0$。

2) 若 $w_j^* \geqslant 0, j = 1, \cdots, k-1$，则 $x^*$ 也是 $\min\{f(x) : x \in \mathrm{Sim}B\}$ 上的最优解。

3) 若有 $w_j^* < 0 (j = 1, 2, \cdots, k-1)$，则有 $\hat{x} \in \{x : x = \lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x^*, 0 < \lambda < 1\}$，$\hat{x} = D\hat{\mu}$，$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \cdots, \hat{\mu}_k)^{\mathrm{T}}$，$\sum_{i=1}^{k} \hat{\mu}_i = 1$，$\hat{\mu}_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$，使得存在 $\hat{\mu}_p = 0 (p \in \{1, \cdots, k-1\})$。

**证　明**

1) 因为 $f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x - \bar{x})$ 对所有 $x \in \mathrm{Aff}B$ 成立，所以 $f(x^*) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^* - \bar{x})$。又 $\mathrm{Sim}\bar{B} \subset \mathrm{Aff}B$，则 $f(x^*) < f(\bar{x})$，所以 $\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^* - \bar{x}) < 0$，由于 $x^* = Dw^* = \sum_{i=1}^{k} w_i^* x^i$，$\sum_{i=1}^{k} w_i^* = 1$，因而就有 $\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{k} w_i^* x^i - \bar{x}) = w_k^* \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^k - \bar{x}) < 0$，所以 $w_k^* > 0$。

2) 因为 $\mathrm{Sim}B \subset \mathrm{Aff}B$，所以结论很明显。

3) 因为 $\hat{x} = D\hat{\mu}$，$\bar{x} = D\bar{w}$，$\bar{w}_k = 0$，$\bar{w}_i > 0$，$(i = 1, \cdots, k-1)$，$x^* = Dw^*$，$w_k^* > 0$，$w_j^* < 0$，所以 $\hat{\mu} = \lambda\bar{w} + (1 - \lambda)w^*$，$0 < \lambda < 1$，取 $\hat{\lambda} = \max\left\{-\frac{w_i^*}{\bar{w}_i - w_i^*} : w_i^* < 0\right\} \triangleq -\frac{w_p^*}{\bar{w}_p - w_p^*}$，则 $\hat{x} = \hat{\lambda}\bar{x} + (1 - \hat{\lambda})x^*$，有 $\hat{\mu} \geqslant 0$，且 $\hat{\mu}_p = 0$。

**定理 7** 设 $f(x^*) < f(\bar{x})$，则当 $x \in \{x : x = \lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x^*, 0 < \lambda < 1\}$，就有 $f(x^*) < f(x) < f(\bar{x})$。

由定理 6 和定理 7，若 $\hat{x} \in \{x : x = \lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x^*, 0 < \lambda < 1\}$，则 $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$，令 $\hat{x}$ 的有效极点基为 $\hat{B}$，则 $\hat{x} \in \mathrm{RiSim}\hat{B}$，而 $\bar{x} \in \mathrm{RiSim}\bar{B}$，则 $f(x)$ 在 $\mathrm{Sim}\hat{B}$ 上的最小值小于 $\mathrm{Sim}\bar{B}$ 上的最小值。

## 5 正定二次函数在可行域上的最优解

**定理 8**　设 $\bar{B}$ 为仿射基,$\bar{x} \in \mathrm{RiSim}\bar{B}$ 为 $\min\{f(x): x \in \mathrm{Sim}\bar{B}\}$ 的最优解,$x^k$ 为 $\min\{\nabla f(\bar{x})^T x: x \in X\}$ 的最优解,则 $\bar{x}$ 为 $\min\{f(x): x \in X\}$ 最优解的充分必要条件是 $\nabla f(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) = 0$。

**证　明**

必要性

因为 $x^k$ 为 $\min\{\nabla f(\bar{x})^T x: x \in X\}$ 的最优解,$\bar{x} \in X$,所以 $\nabla f(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) \leqslant 0$。若 $\nabla f(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) < 0$,令 $x^k - \bar{x} = s$,有 $f(\bar{x} + \varepsilon s) - f(\bar{x}) = \varepsilon \nabla f(\bar{x})^T s + \frac{\varepsilon^2}{2} s^T \boldsymbol{H} s < 0$ 对充分小的正数 $\varepsilon$ 成立,与 $f(\bar{x})$ 是 $f(x)$ 在 $X$ 上的最优解矛盾,所以 $\nabla f(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) = 0$。

充分性

由 $\boldsymbol{H}$ 正定,有 $f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$,又 $x^k$ 为 $\min\{\nabla f(\bar{x})^T x: x \in X\}$ 的有限最优解,所以 $\nabla f(\bar{x})^T x^k \leqslant \nabla f(\bar{x})^T x$ 对所有 $x \in X$ 成立.因而有 $f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) = f(\bar{x})$,所以 $\bar{x}$ 为 $f(x)$ 在 $X$ 上的最优解。

## 6 算法描述

**step0**　设 $B$ 为仿射基,$x^* \in \mathrm{RiSim}B$ 为 $\min\{f(x): x \in \mathrm{Sim}B\}$ 的最优解。

**step1**　求解 $\min\{\nabla f(x^*)^T x: x \in X\}$,得 $X$ 的一个极点 $\hat{x}$。若 $\nabla f(x^*)^T(\hat{x} - x^*) = 0$,则 $x^*$ 为 $f(x)$ 在 $X$ 上的最优解;否则转 step2。

**step2**　若 $f(\hat{x}) < f(x^*)$,令 $x^* = \hat{x}$,$B = \{x^*\}$,$\mathrm{Sim}B = \{x^*\}$,转 step1;否则转 step3。

**step3**　令 $B = B \cup \{\hat{x}\} \triangleq \{x^1, x^2, \cdots, x^k\}$,$D = (x^1, x^2, \cdots, x^k)$。

**step4**　求解 $\min\{f(x): x \in \mathrm{Aff}B\}$,得最优解 $\bar{x}$,$\bar{x} = D\bar{w}$,$e^T\bar{w} = 1$,$\bar{w} = (\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_k)^T$,$\bar{w}_k > 0$,

1) 若 $\bar{w}_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, k-1)$,则 $\bar{x}$ 为 $f(x)$ 在 $\mathrm{Sim}B$ 上的最优解,令 $x^* = \bar{x}$ 转 step1。

2) 若 $\bar{w} \geqslant 0$,但存在 $\bar{w}_j = 0$.令 $\hat{x} = \bar{x}$,转 step5。

3) 若有 $\bar{w}_i < 0$,计算 $\hat{x} = \lambda_0 x^* + (1 - \lambda_0)\bar{x}$,$\lambda_0 = \max\left\{-\frac{w_i^*}{\bar{w}_i - w_i^*}: w_i^* < 0\right\}$,转 step5。

**step5**　去掉 $\hat{x}$ 的非有效极点,得到一个新的仿射基,记作 $\hat{B}$,且 $\hat{x} \in \mathrm{RiSim}\hat{B}$,

1) 若 $\mathrm{Sim}\hat{B}$ 为零维的,$\hat{x}$ 为 $f(x)$ 在 $\mathrm{Sim}\hat{B}$ 上的最优解,令 $x^* = \hat{x}$、$B = \hat{B}$,转 step1。

2) 若 $\mathrm{Sim}\hat{B}$ 的维数大于零,则令 $x^* = \hat{x}$、$B = \hat{B}$,转 step4 。

## 7 算法的有限终止性

**定理 9**　以上描述的算法是有限步终止的。

**证　明**

上面所述算法,每次总能求得目标函数在某个单纯形上的最优解,且每次求得的最优解严格递减,由引理 1,不论可行域是否有界,问题总等价于一个有界可行域上的优化问题,因而分解的单纯形个数只有有限个,所以该算法是有限步终止的。

## 8 算例与结论

本算法使用线性规划和无约束正定二次规划迭代来求解一般正定二次规划问题,尤其当原问题约束为块对角状或阶梯状等结构时,其等价的有界域问题并不改变原问题约束的结构,所以可采用分解算法求解线性规划,因而适合处理大型问题。算例表明算法是有效的。

## 参考文献:

[1] BAZARRA M S, SHETTY C M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithm[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.

[2] DANTZIG G B, WOLFE P. The decomposition algorithm for linear programs[J]. Econometrica, 1961, 29: 767-778.

[3] VON HOHENBALKEN B. A finite algorithm to maximize certain pseudoconcave functions on polytopes[J]. Math Programming, 1975, (9): 189-206.

(编　辑　亢小玉)

# A region decomposition method to solve positive definite quadratic programming

LIU Xiao-dong[1], LIU Zhe[1], ZHANG Lei[2]

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. Department of Computer Science, Northwest University, Xi'an 710069, China)

**Abstract**: A region decomposition method to solve a positive definite quadratic programming is presented. It proved that any positive definite quadratic programming is equivalent to a positive definite quadratic programming in a boundary region. In the algorithm, the feasible region is decomposed into a series of simplice and iterating the optimal solutions in the simplice to the optimal solution of the original problem. There are some advantages: ① To find the minimum of a positive definite quadratic function in a simplex is equivalent to a non-constrained problem. ② The simplex is constructed by solving a linear problem. Numerical simulation shows that the method is feasible and can be used to solve the large-scale problems.

**Key words**: positive definite quadratic programming; simplex; affine manifold; optimal solution

· 学术动态 ·

## CA 收录中国综合性高校学报统计

| 刊　　名 | ISSN | 代码 | 累计收录量/条 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | CA | 2002 | 2003 |
| 辽宁大学学报(Nat. Sci.) | 1000-5846 | LDXZAS | 438 | 85 | 58 |
| 重庆大学学报(Nat. Sci.) | 1000-582X | CDXZF2 | 380 | 97 | 50 |
| 福州大学学报(Nat. Sci.) | 1000-2243 | FDXKEN | 587 | 53 | 37 |
| 黑龙江大学自然科学学报 | 1001-7011 | HDZXEQ | 22 | | 22 |
| 内蒙古大学学报(Nat. Sci.) | 1000-1638 | NDZKEJ | 504 | 57 | 20 |
| 山东大学学报(Nat. Sci.) | 1671-9352 | SDXLAT | 74 | 54 | 20 |
| 山西大学学报(Nat. Sci.) | 0253-2395 | SDXKDT | 808 | 90 | 19 |
| 湖北大学学报(Nat. Sci.) | 1000-2375 | HDXZEM | 449 | 35 | 18 |
| 东华大学学报(Nat. Sci.) | 1671-0444 | DDXZA8 | 101 | 54 | 13 |
| 石河子大学学报(Nat. Sci.) | 1007-7383 | SXZKFB | 133 | 30 | 6 |
| **西北大学学报(Nat. Sci. Ed.)** | **1000-274X** | **HPI-IPAQ** | **740** | **6** | **0** |
| 暨南大学学报(Nat Sci & Med) | 1000-9965 | JDXUET | 483 | 46 | 0 |
| 北华大学学报(Nat. Sci.) | 1009-4822 | BDXZAK | 106 | 37 | 0 |
| 广西大学学报(Nat. Sci.) | 1001-7445 | GDXZEB | 52 | 17 | 0 |
| 延边大学学报(Nat. Sci.) | 1004-4353 | YXZKE8 | 204 | 14 | 0 |

(薛　鲍)