关于两类循环矩阵求逆的一种快速算法 *1)

何承源　胡明
(成都师范高等专科学校数学系)

ON A FAST ALGORITHM FOR COMPUTING THE INVERSE OF TWO KIND CIRCULANT MATRIX

He Cheng-yuan　Hu Ming
(Dept. of Math, Chengdu Teacher's College, Chengdu 611930)

Abstract

In this paper, we give a fast algorithm to compute inverse of r-circulant matrix and symmetric r-circulant matrix, when circulant matrix is nonsingular; to compute the group inverse of r-circulant matrix, when r-circulant matrix singular; to compute the $\{1,2\}$ inverse of symmetric r-circulant matrix, when symmetric r-circulant matrix singular.

§1. 引　言

关于 r- 循环矩阵和对称 r- 循环矩阵的研究，特别是求逆问题的研究也为不少作者所关注 [1-3]. 它们中有的通过快速傅里叶变换 (FFT) 来实现，有的通过递归的方法来实现. 但是它们都要计算大量的三角函数，因而均有误差存在. 本文利用多项式的最大公因式给出的求 r- 循环矩阵和对称 r- 循环矩阵的逆的一种快速算法，克服了上述那些方法的缺陷. 该快速算法只利用循环矩阵自身的元素进行计算，不存在误差，所求的逆 (或群逆、或 $\{1,2\}$- 逆) 是精确的，是一种很好的快速算法. 若在计算机上实现该算法，则仅有舍入误差. 当循环矩阵的元素为有理数时，所求的逆 (或群逆、或 $\{1,2\}$- 逆) 也是精确的.

§2. 预备知识和定理

首先指出， Drazin 逆只对方阵有定义.

定义 1.[4] 设 $A \in C^{n\times n}$, 称满足

$$\operatorname{rank} A^{k+1} = \operatorname{rank} A^k$$

* 1997 年 2 月 25 日收到.
1) 四川省教委青年教师科研基金资助项目.

的最小非负整数 k 为 A 的指标，记作 $\mathrm{Ind}\,(A)=k$. 若 A 非奇异，则 $\mathrm{Ind}\,(A)=0$; 若 A 奇异，则 $\mathrm{Ind}\,(A)\geq 1$.

定义 2.[4] 设 $A\in C^{n\times n}$, $\mathrm{Ind}\,(A)=k$. 若 $X\in C^{n\times n}$ 满足

(1^k) $A^kXA=A^k$,

(2) $XAX=X$,

(5) $AX=XA$,

则称 X 为 A 的 Drazin 逆，记作 $X=Ad$.

当 $\mathrm{Ind}\,(A)=0$ 时， Drazin 逆就是通常所说的逆，记作 A^{-1}; 当 $\mathrm{Ind}\,(A)=1$ 时，Drazin 逆就是群逆，记作 Ag.

定义 3. 设 $A\in C^{n\times n}$, 且形如

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_1 & ra_2 & ra_3 & \cdots & ra_{n-1} & a_0 \end{pmatrix},$$

其中 $r\in C$ 为参数，称 A 为 r- 循环矩阵，简记为

$$A=Cr(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})\in CM_r.$$

定义 4. 设 $A\in C^{n\times n}$, 且形如

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & ra_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & ra_0 & ra_1 & \cdots & ra_{n-3} & ra_{n-2} \end{pmatrix},$$

其中 $r\in C$ 为参数，称 A 为对称 r- 循环矩阵，简记为

$$A=SC_r(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})\in SCM_r.$$

循环矩阵的性质如下：

性质 1. 若 $D=C_r(0,1,0,\cdots,0)\in CM_r$, 则 $D^i=C_r(0,\cdots,0,\overset{i+1}{1},0,\cdots,0)\in CM_r$, 且 $D^n=rI_n$(I_n 为 n 阶单位阵，下同), 并规定 $D^0=I_n$.

性质 2. D 的特征多项式 $f(x)=x^n-r$(下同).

性质 3. 设 $A\in C^{n\times n}$, 则 $A=C_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in CM_r \Longleftrightarrow A=g(D)$, $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^i$(下同).

性质 4[5]. 设 $A=C_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})=g(D)\in CM_r(r\neq 0)$, 则 A 非奇异 (奇异)$\Longleftrightarrow (f(x),g(x))=1\ (\neq 1)$.

性质 5.[5] 设 $A=C_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in CM_r$, $B=SC_r(a_{n-1},\cdots,a_1,a_0)\in SCM_r$, 则 $B=AK$ 或 $BK=A$, 其中 $K=SC_1(0,\cdots,0,1)\in SCM_1$.

性质 6. 设 $A=SC_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in SCM_r$, $B=C_r(a_{n-1},\cdots,a_1,a_0)\in CM_r(r\neq 0)$, 则 A 非奇异 (奇异) $\Longleftrightarrow B$ 非奇异 (奇异).

定理 1. 设 $A=C_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})=g(D)\in CM_r(r\neq 0)$ 且非奇异，则存在唯一的 r- 循环矩阵 $B=C_r(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})=q(D)\in CM_r$, 使得 $AB=I_n$, 其中 $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$ (下同).

证明. 因为 r- 循环矩阵 $A=C_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})=g(D)\in CM_r(r\neq 0)$ 非奇异，所以由性质 4, 得

$$(f(x),g(x))=1.$$

从而存在多项式 $p(x)$, $q'(x)$, 使得

$$f(x)p(x)+g(x)q'(x)=1.$$

令 $q'(x)=f(x)u(x)+q(x)(u(x)$ 是用 $f(x)$ 去除 $q'(x)$ 所得的商式), 而 $\alpha^0(q(x))<n$ 且 $q(x)\neq 0$, 所以

$$f(x)[p(x)+g(x)u(x)]+g(x)q(x)=1,$$

故

$$g(D)q(D)=I_n. \tag{1}$$

令 $B=q(D)=q'(D)=C_r(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})\in CM_r$, $q(x)=b_0+b_1x+\cdots b_{n-1}x^{n-1}$, 这就是我们所要求的.

若还存在一个 r- 循环矩阵 B_1, 使得

$$AB_1=I_n. \tag{2}$$

由 (1), (2) 两式，得 $A(B-B_1)=0$. 因为 A 非奇异，所以 $B_1=B$.

由 (1) 式易知 r- 循环矩阵 B 满足定义 2 的三个条件，故 r- 循环矩阵 B 是 r- 循环矩阵 A 的 Drazin 逆.

定理 2. 设 $A=C_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})=g(D)\in CM_r$ $(r\neq 0)$ 且奇异，则存在唯一的 r- 循环矩阵 $H=C_r(h_0,h_1,\cdots,h_{n-1})=h(D)\in CM_r$, 使得

$$AHA=A,\ HAH=H,\ AH=HA.$$

H 称做 A 的群逆，其中 $h(x)=h_0+h_1x+\cdots+h_{n-1}x^{n-1}$.

证明. 因为 $A=C_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})=g(D)\in CM_r$ $(r\neq 0)$ 且奇异，所以由性质 4, 得

$$(f(x),g(x))=d(x),$$

其中 $\alpha^0(d(x)) > 0$, 从而存在多项式 $u(x), v(x)$, 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$

设 $f(x) = d(x)f_1(x)$, $g(x) = d(x)g_1(x)$, 于是

$$f_1(x)u(x) + g_1(x)v(x) = 1,$$

易知 $(f_1(x), d(x)) = 1$ (因为 $f(x) = x^n - r$), 所以

$$(f_1(x), g_1(x)d(x)) = (f_1(x), g(x)) = 1.$$

进一步有

$$(f_1(x), g(x)d(x)) = 1.$$

于是存在多项式 $s(x)$, $t(x)$, 使得

$$f_1(x)s(x) + g(x)d(x)t(x) = 1. \tag{3}$$

在 (3) 式两端乘以 $g(x)$, 得

$$f(x)g_1(x)s(x) + g(x)d(x)t(x)g(x) = g(x). \tag{4}$$

令 $d(x)t(x) = f(x)e(x)+h(x)$ ($e(x)$ 是除 $d(x)t(x)$ 的商式), 这里 $\alpha^0(h(x)) < n$ 且 $h(x) \neq 0$, 从而 (4) 式为

$$f(x)[g_1(x)s(x) + g(x)e(x)g(x)] + g(x)h(x)g(x) = g(x),$$

所以

$$g(D)h(D)g(D) = g(D).$$

令 $H = h(D) = d(D)t(D)$, $h(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_{n-1}x^{n-1}$, 即 $AHA = A$. 在 (3) 式两端乘以 $d(x)t(x)$, 得

$$f(x)t(x)s(x) + d(x)t(x)g(x)d(x)t(x) = d(x)t(x),$$

所以 $HAH = H$. 又因为 A, H 均为 r- 循环矩阵，它们所对应的多项式满足乘法可换，所以 $AH = HA$.

若还存在一个 r- 循环矩阵 H_1, 使得

$$AH_1A = A,\ H_1AH_1 = H_1,\ AH_1 = H_1A.$$

令 $AH = HA = E$, $AH_1 = H_1A = F$. 显然 $E^2 = E$, $F^2 = F$, 于是有

$$E = AH = AH_1AH = FE, \quad F = H_1A = H_1AHA = FE,$$

故 $E=F$, 从而 $H=HAH=EH=FH=H_1AH=H_1E=H_1F=H_1AH_1=H_1$.

从上面两个定理的证明过程可以看出，已给出了求 r- 循环矩阵 A 的逆 (或 A 的群逆) 的具体计算方法. 若同时注意到: $D^n=rI_n$, 在具体求逆 (或群逆) 时计算还可简化，即不需计算除法 $q'(x)=f(x)u(x)+q(x)$(或 $d(x)t(x)=f(x)e(x)+h(x)$), 只需把 $q'(x)$(或 $d(x)t(x)$) 的常数项与 x^n 项 (若存在的话) 的系数 r 倍相加， x 项的系数与 x^{n+1} 项 (若存在的话) 的系数 r 倍相加，等等即得 $q(x)$(或 $h(x)$) 的各项系数.

由性质 5 和 6 结合前面关于 r- 循环矩阵的逆 (或群逆) 的结论可得如下关于对称 r- 循环矩阵的逆 (或 $\{1,2\}$ 一逆，即只满足定义 2 中的 (1), (2) 两条件且 $k=1$) 的结论.

定理 3. 设 $C=SC_r(a_{n-1},\cdots,a_1,a_0)\in SCM_r(r\neq 0)$ 且非奇异，则 $C^{-1}=KB$ $(B=q(D))$.

定理 4. 设 $C=SC_r(a_{n-1},\cdots,a_1,a_0)\in SCM_r(r\neq 0)$ 且奇异，则 C 不存在群逆，但存在一个对称 r- 循环矩阵 $X=KH$ $(H=h(D))$ 满足 $XCX=X$ 和 $CXC=C$.

§3. 算法及举例

现在的问题就是如何去求 $q'(x)$ 和 $d(x)t(x)$. 这里用矩阵的行初等变换来求，只需把矩阵的元素换成多项式，利用通常的矩阵行初等变换就可实现.

定理 5.[6] 设多项式矩阵

$$\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

经过行初等变换化为

$$\begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix},$$

则 $(f(x),g(x))=d(x)$, 且满足 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$.

利用这一定理不难得到 r- 循环矩阵求逆 (或群逆) 的一种快速算法，其步骤为

1° 由 r- 循环矩阵得到 $g(x)$;

2° 由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 求出最大公因式 $d(x)$;

3° 若 $d(x)=1$, 则所给的 r- 循环矩阵非奇异，而 $v(x)$(若 $\alpha^0(v(x))<n$) 的系数就是 r- 循环矩阵的逆的第一行元素;

4° 若 $d(x)\neq 1$, 则所给的 r- 循环矩阵奇异. 于是用 $d(x)$ 去除 $f(x)$ 得商式 $f_1(x)$;

5° 由 $f_1(x)$ 和 $g(x)d(x)$ 求得 $t(x)$, 于是 $d(x)t(x)$ (若 $\alpha^\circ(d(x)t(x))<n$) 的系数就是 r- 循环矩阵的群逆的第一行元素.

例 1. 设 $A=C_2(1,-1,-1,1)$, 求 A^{-1}.

解. 因为 2- 循环矩阵 $A=C_2(1,-1,-1,1)$, 所以 $f(x)=-2+x^4$, $g(x)=1-x-x^2+x^3$. 于是作矩阵

$$\begin{pmatrix} -2+x^4 & 1 & 0 \\ 1-x-x^2+x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对该矩阵作行初等变换

$$\begin{pmatrix} -2+x^4 & 1 & 0 \\ 1-x-x^2+x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-x(2)} \begin{pmatrix} -2-x+x^2+x^3 & 1 & -x \\ 1-x-x^2+x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} -3+2x^2 & 1 & -1-x \\ 1-x-x^2+x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2(2)-x(1)} \begin{pmatrix} -3+2x^3 & 1 & -1-x \\ 2+x-2x^2 & -x & 2+x+x^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} -3+2x^2 & 1 & -1-x \\ x-1 & 1-x & 1+x^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-2x(2)} \begin{pmatrix} -3+2x & 1-2x+2x^2 & -1-3x-2x^3 \\ -1+x & 1-x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-2(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1+2x^2 & -3-3x-2x^2-2x^3 \\ -1+x & 1-x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

可见 $(f(x),g(x))=1$, $u(x)=1-2x^2$, $v(x)=3+3x+2x^2+2x^3$, 故 $A^{-1}=C_2(3,3,2,2)$. $q(x)=3+3x+2x^2+2x^3$.

例 2. 设 $A=C_1(1,-1)$, 求 A 的群逆.

解. 因为 1- 循环矩阵 $A=C_1(1,-1)$, 所以 $f(x)=-1+x^2$, $g(x)=1-x$. 于是作矩阵 $\begin{pmatrix} -1+x^2 & 1 & 0 \\ 1-x & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 对该矩阵作行初等变换

$$\begin{pmatrix} -1+x^2 & 1 & 0 \\ 1-x & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+x(2)} \begin{pmatrix} -1+x & 1 & x \\ 1-x & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{pmatrix} -1+x & 1 & x \\ 0 & 1 & 1+x \end{pmatrix}.$$

可见 $(f(x),g(x))=-1+x\neq 1$, 从而说明 A 奇异, 于是 $f(x)=(x-1)(x+1)$, $f_1(x)=1+x$. 作矩阵 $\begin{pmatrix} f_1(x) & 1 & 0 \\ g(x)d(x) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 0 \\ -1+2x-x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 对该矩阵作行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 0 \\ -1+2x-x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+x(1)} \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 0 \\ -1+3x & x & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 0 \\ -4 & -3+x & 1 \end{pmatrix}.$$

易知 $(f_1(x),g(x)d(x))=1$, $t(x)=-1/4$, 于是 $d(x)t(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}x$, 故 A 的群逆矩阵 $H=C_1(1/4,-1/4)$.

§4. 算法的计算机实现

为了方便，将整个算法分为二块，求最大公因式 $d(x)$ 及 $v(x)$, 求 r- 循环矩阵的逆或群逆.

由 r- 循环矩阵得到 $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $f(x)=x^n-r=\sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$. 从前面的算例，将定理 5 的矩阵可改为 $\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ g(x) & 1 \end{pmatrix}$.

一. 求 $d(x)$ 及 $v(x)$

算法如下:

1° 令 $f_i = b_i$, $g_i = a_i$, $v_i = 0$, $i = \overline{0,n}$, $t_0 = 1$, $t_i = 0$, $i = \overline{1,n}$(一般情形时，n 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数最大值);

2° 顺序检查 f_i 与 g_i, 如果 f_i 全为零转 6°, 如果 g_i 全为零转 7°;

3° 设 f_i, g_i 最后一个不为零的元素分别是 f_p, g_q. 如果 $q = 0$ 转 6°, 如果 $p = 0$ 转 7°.

4° 如果 $q < p$, 令 $f_i = f_i - (f_p/g_q)g_{q-p+i}$, $V_i = V_i - (f_p/g_q)t_{q-p+i}$, $i \geq p - q$;

5° 如果 $q \geq p$, 令 $g_i = g_i - (g_q/f_p)f_{p-q+i}$, $t_i = t_i - (g_q/f_p)V_{p-q+i}$, $i \geq q - p$;

6° 设 g_i, t_i 中最后一个不为零的元素分别为 g_s, t_k, 令 $d_i = g_i/g_s$, $i = \overline{0,s}$; $V_i = t_i/g_s$. $i = \overline{0,k}$, 转 8°;

7° 设 f_i, V_i 中最后一个不为零的元素分别为 f_s, V_k, 令 $d_i = f_i/f_s$, $i = \overline{0,s}$; $V_i = V_i/f_s$, $i = \overline{0,k}$;

8° 输出 d_i, V_i 结束.

得到 $d(x) = \sum_{i=0}^{s} d_i x^i$, $V(x) = \sum_{i=0}^{k} V_i x^i$.

二. 逆与群逆

若 $d(x) = 1$, (一) 中最后所得 V_i 即为 r- 循环矩阵逆的第一行元素.

若 $d(x) \neq 1$, 用 $d(x)$ 去除 $x^n - r$ 得商式 $f_1(x)$, 在 (一) 中 $f(x) = f_1(x)$, $g(x) = g(x)d(x)$, 再求出 $t(x)$((一) 中的 $V(x)$) 并令 $V(x) = d(x)t(x)$, $k = \alpha^0(d(x)t(x))$.

1° 判断 $k < n$ 是否成立，若成立，结束；否则继续;

2° 令 $V_i = V_i + rV_{n+i}$, $i = \overline{0, k-n}$, 转 1°;

最后所得的 V_i 即为 r- 循环矩阵群逆的第一行元素.

在 (二) 中，用到了多项式的乘法与除法，容易在计算机上实现，故算法略.

按上述算法求逆和群逆时，仅有舍入误差. 为了减少误差，可将算法中的诸数用分数表示. 如 f_i 表示为 $f_i = f_{1i}/f_{2i}$, 再将 f_{1i}/f_{2i} 用有序对 (f_{1i}, f_{2i}) 表示，将算法中的求 f_i 化为求 f_i 的分子 f_{1i}, f_i 的分母 f_{2i}, 这样在计算中可避免舍入误差. 当 r- 循环矩阵的元素为有理数时，可得逆或群逆的精确解.

参 考 文 献

[1] 曾泳泓，r- 循环矩阵的快速算法和并行算法，数值计算与计算机应用，**10**:1 (1989).
[2] 殷作勤，陈天与，r- 循环矩阵快速求逆的新算法，数值计算与计算机应用，**14**:2 (1993).
[3] 成礼智，r- 轮换矩阵快速求逆算法的推广，计算数学，**17**:3 (1995).
[4] 王国荣，矩阵与算子广义逆，科学出版社.
[5] 江兆林，关于两类循环矩阵的非异性，数学的实践与认识，2 (1995).
[6] 张小红，蔡秉衡，高等代数专题研究选编，陕西科学技术出版社，1992.