关于非线性方程的一类新的不带导数的迭代法*

李维国 陈金海
(中国石油大学数学与计算科学学院 东营 257061)

摘 要

通过二分法与动力系统的有机结合, 我们得到了一类求解非线性方程的新算法, 并证明了新算法具有良好的点序列 $\{x_n\}$ 和区间半径序列 $\{(b_n-a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的渐近收敛性. 数值试验表明新算法与 Newton 法、Steffensen 法以及现有的许多其它算法相比更为有效.

关键词: 动力系统, 二分法, 迭代法, 平方收敛

ON A CLASS OF NEW ITERATIVE METHODS WITHOUT DERIVATIVES FOR SOLVING NONLINEAR EQUATION

Li Weiguo Chen Jinhai
(*School of Mathematics and Computational Sciences, China University of Petroleum, Dongying 257061, Shandong Province, People's Republic of China*)

Abstract

In this paper, combining bisection method, we deduce new formulas by theory of dynamic systems, prove nice asymptotic quadratic convergence properties of points sequence $\{x_n\}$ and intervals diameters sequence $\{(b_n-a_n)\}_{n=1}^{\infty}$. The numerical experiments show that new methods are effective and comparable to well-known methods of Newton and Steffensen.

Key words: dynamic systems, iterative method, quadratic convergence, bisection method

§1. 引 言

Newton 法是科学与工程计算中数值求解非线性方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

在区间 $[a,b]$ 内的解 x^* 的常用方法. 由于 Newton 法及其修正 [4,5,6,10] 需要调用导数值以达到二阶收敛, 故各种避免导数的迭代法 [4,10] 应运而生, 但这些方法一般不具有二阶收

* 2004 年 12 月 1 日收到.

敛性. 为了保证二阶收敛性, 在迭代过程中, 各种各样的加速收敛方法如: Aitken 加速法和 Steffensen 加速法 [10,11], 被采用文 [1] 借助一种动力系统 [5]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{f(x)}{\mu f(x) + f'(x)}, \\ x(0) = x_0, x_0 \in [a, b], \end{cases} \tag{2}$$

并利用差商 $\dfrac{f(x+f(x))-f(x)}{f(x)}$ 代替导数 $f'(x)$, 得到了两个具有参数的不带导数迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{\mu f^2(x_n) + f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \tag{3}$$

$$x_{n+1} = x_n \exp\left\{-\frac{f^2(x_n)}{x_n\left(\mu f^2(x_n) + f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)\right)}\right\}, \quad x_n \neq 0, \tag{4}$$

其中 $\mu \in R$, 显然在 (4) 中取指数函数的一次近似就得到 (3).

注意到只有当 $f(x)$ 非常小时, 差商 $\dfrac{f(x+f(x))-f(x)}{f(x)}$ 才是导数 $f'(x)$ 好的近似, 这必然使得迭代公式 (3) 和 (4) 缺少数值稳定的保证, 同时限制了公式 (3) 和 (4) 的收敛范围及其适用范围. 众所周知, 二分法具有良好的区间序列渐近稳定收敛性 [8,9] 以及大范围收敛性质 [2,3], 但二分法的收敛速度仅仅是线性的.

针对上述情况讨论, 在本文中, 我们将继续探讨避免导数的具有高阶收敛性的求解非线性方程的算法. 我们将迭代公式 (3) 和 (4) 与二分法有机地结合 [3], 构造新的求解非线性方程的算法. 新算法既保持了二阶收敛性, 同时又具有良好的区间半径序列渐近稳定性与大范围收敛性质.

§2. 新算法的构造及其收敛性分析

由于指数型公式 (4) 是 (3) 的推广, 故我们只讨论公式 (4). 文 [1] 已证明了公式 (4) 具有二阶收敛, 但并不像二分法具有良好的区间半径序列 $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的渐近稳定性质的收敛性, 这使得我们考虑下列一类带步长 h_n 的迭代格式:

$$x_{n+1} = x_n \exp\left\{-\frac{h_n f^2(x_n)}{x_n\left(\mu f^2(x_n) + f(x_n + h_n f(x_n)) - f(x_n)\right)}\right\}, \tag{5}$$

其中 $\mu \in R$, $h_n > 0$.

定理 1. 设函数 $f(x) \in C^1_{[a,b]}$ (在 [a,b] 上连续且 1 阶可微). $f(a)f(b) < 0$, $x^* \neq 0$ 使得 $f(x^*) = 0$ 且 $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*)$ 存在. 若在 x^* 的某邻域 $U(x^*)$ 内, $\mu f(x) + f'(x) \neq 0$,

则对于任意有限的 h_n, 由迭代公式 (5) 所得的序列 $\{x_n\}$ 至少是二阶收敛的, 且有

$$e_{n+1} = e_n^2 \frac{\dfrac{\mu}{h_n} f'(x^*) + \dfrac{\dfrac{(1+h_n f'(x^*))f'(x^*)f''(x^*)}{2}}{f'(x^*) + \dfrac{f''(x^*)}{2}} + o(1)}{\dfrac{\mu}{h_n} f'(x^*)e_n + \dfrac{f'^2(x^*) + \dfrac{(3+h_n f'(x^*))f'(x^*)f''(x^*)}{2}e_n}{f'(x^*) + \dfrac{f''(x^*)}{2}e_n} + o(e_n)}$$

$$+e_n^2 \frac{\left(f'(x^*) + \dfrac{f''(x^*)}{2}e_n + o(e_n)\right)^2}{2x_n\left(\dfrac{\mu}{h_n} f'(x^*)e_n + \dfrac{f'^2(x^*) + \dfrac{(3+h_n f'(x^*))f'(x^*)f''(x^*)}{2}e_n}{f'(x^*) + \dfrac{f''(x^*)}{2}e_n} + o(e_n)\right)} + o(e_n^2), \quad (6)$$

其中 $e_n = x_n - x^*$.

证明. 设公式 (5) 的迭代函数为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x\exp\left\{-\frac{hf^2(x)}{x\left(\mu f^2(x) + f(x+hf(x)) - f(x)\right)}\right\}\\ &= x\exp\left\{-\frac{f(x)}{x\left(\dfrac{\mu}{h}f(x) + \dfrac{f(x+hf(x)) - f(x)}{hf(x)}\right)}\right\}\end{aligned}$$

其中 $h > 0$ 为有限数. 因为

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to x^*} \frac{f(x+hf(x)) - f(x)}{hf(x)} = f'(x^*),$$

故 $\varphi(x^*) = x^*$, 即 x^* 是迭代函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点.

注意到 $\exp(x)$ 的 Taylor 展开式

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^2),$$

我们有

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n\exp\left\{-\frac{f(x_n)}{x_n\left(\dfrac{\mu}{h_n}f(x_n) + \dfrac{f(x_n+h_nf(x_n)) - f(x_n)}{h_nf(x_n)}\right)}\right\}\\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{\mu}{h_n}f(x_n) + \dfrac{f(x_n+h_nf(x_n)) - f(x_n)}{h_nf(x_n)}}\end{aligned}$$

$$+\frac{f^2(x_n)}{2x_n\left(\frac{\mu}{h_n}f(x_n)+\frac{f(x_n+h_nf(x_n))-f(x_n)}{h_nf(x_n)}\right)^2}$$

$$+O\left(\frac{f^2(x_n)}{x_n\left(\frac{\mu}{h_n}f(x_n)+\frac{f(x_n+h_nf(x_n))-f(x_n)}{h_nf(x_n)}\right)^2}\right).$$

置 $e_n=x_n-x^*$, 采用类似于文献 [1] 中的证明方法即可得结论.

为了获得具有区间半径序列 $\{(b_n-a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的渐近收敛性, 在 (5) 中置 $h_n=\dfrac{b_n-a_n}{2|f(x_n)|}$, 我们可得如下迭代公式:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n\exp\left\{-\frac{(b_n-a_n)|f(x_n)|}{2x_n\left(\mu_nf^2(x_n)+f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-f(x_n)\right)}\right\}, \\ x_n &= a_n \text{ 或 } b_n,\quad n=0,1,2,\cdots, \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\mu_n=\operatorname{sign}\left(f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-f(x_n)\right)$.

在公式 (7) 中, 选择 $\mu_n=\operatorname{sign}\left(f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-f(x_n)\right)$, 即

$$\mu_n=\begin{cases} 1, & 若 f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-f(x_n)\geq 0, \\ -1, & 若 f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-f(x_n)<0. \end{cases}$$

这种选取对数值计算是有益的, 可以使 (7) 避免因分母过小而变得数值不稳定.

若 (7) 中 $\mu_n=0$, 可得下列迭代公式:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n\exp\left\{-\frac{(b_n-a_n)|f(x_n)|}{2x_n\left(f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-f(x_n)\right)}\right\}, \\ x_n &= a_n \text{ 或} b_n,\quad n=0,1,2,\cdots. \end{aligned} \tag{8}$$

结合迭代公式 (7) 与二分法, 可以构造以下新的算法:

算法 NA.

1. 置 $q_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.
2. 计算 $f(q_n)$, 若 $f(q_n)=0$, 则停止并输出 q_n.
3. 若 $\operatorname{sign}(f(q_n))=\operatorname{sign}(f(a_n))$, 则 $\bar{a}_n=q_n$, $\bar{b}_n=b_n$, 否则 $\bar{a}_n=a_n$, $\bar{b}_n=q_n$.
4. 置

$$w_n=x_n\exp\left\{-\frac{(b_n-a_n)|f(x_n)|}{2x_n\left(\mu_nf^2(x_n)+f(q_n)-f(x_n)\right)}\right\}.$$

5. 如果 $w_n \in [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$, 则若 $f(a_n)f(w_n) < 0$, 那么 $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [\bar{a}_n, w_n]$, 否则 $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [w_n, \bar{b}_n]$, $x_{n+1} = w_n$.

6. 如果 $w_n \notin [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$, 那么 $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$.

7. 若 $|f(x_{n+1})| < \epsilon_1$ 或 $b_{n+1} - a_{n+1} < \epsilon_2$, 则停止并输出 x_{n+1}; 否则 $n = n + 1$, 返回步骤 1.

在算法中, ϵ_1, ϵ_2 为预先给定的误差精度.

注 1. 算法 NA 或者得到所要的解, 或者得到一个渐近缩小的的含根区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$, 在算法中, 若不采用步骤 4, 则不进行加速计算, 此时对应二分法的结果; 若加速计算成功, 则需要比二分法多调用函数计算过程, 但获得比二分法更快的收敛速度——平方收敛, 因此算法 NA 的最差结果就是二分法的结果.

注 2. 由于算法 NA 采用了二分法的策略, 因此算法 NA 扩大了迭代公式 (3) 和 (4) 的收敛范围及适用范围.

由算法的执行过程知, 我们可得到迭代序列 $\{x_n\}$ 和区间半径序列 $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

定理 2. 设函数 $f(x)$ 满足定理 1 的假设条件, 则算法 NA 或者在有限步内得到方程 $f(x) = 0$ 的根, 或者产生的区间半径序列 $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 0.

因为二分法的收敛性是明显的, 故定理的证明也是显然的.

下面我们给出算法 NA 的收敛性证明.

定理 3. 设函数 $f(x) \in C^1_{[a,b]}$, $f(a)f(b) < 0$, $f(x^*) = 0$ 且 $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*)$ 存在, 若在 x^* 的某邻域 $U(x^*)$ 内, $\mu f(x) + f'(x) \neq 0$, 若算法 NA 不能在有限步内得到方程 $f(x) = 0$ 的精确解而终止, 则算法 NA 所得的序列 $\{x_n\}$ 渐近平方收敛于 x^*, 且算法产生的区间半径序列 $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ Q- 平方收敛 [10] 于零, 即存在一个常数 C, 使得

$$b_{n+1} - a_{n+1} \le C(b_n - a_n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

证明. 序列 $\{x_n\}$ 的收敛是显然的, 因为至少有 $b_{n+1} - a_{n+1} \le \dfrac{b_n - a_n}{2}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. 当 x_n 与 x^* 充分接近时, 公式 (7) 被执行, 所以算法产生的序列 $\{x_n\}$ 是渐近平方收敛的.

下证区间半径序列 $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的平方收敛性. 利用 Taylor 展开公式

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

将 (7) 式表示为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{(b_n - a_n)|f(x_n)|}{2\left(\mu_n f^2(x_n) + f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) - f(x_n)\right)} \\ &\quad + \frac{(b_n - a_n)^2 f^2(x_n)}{8x_n\left(\mu_n f^2(x_n) + f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) - f(x_n)\right)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

$$+O\left(\frac{(b_n-a_n)^2f^2(x_n)}{4x_n\left(\mu_nf^2(x_n)+f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)-f(x_n)\right)^2}\right).$$

再采用文献 [7] 中的证明方法即得 $b_{n+1}-a_{n+1}\le C(b_n-a_n)^2,\quad n=0,1,2,\cdots$, C 为一常数.

§3. 结合试位法的高阶免导迭代法和重零点的免导公式

在第 2 节, 我们是在公式 (5) 中取 $h_n=\dfrac{b_n-a_n}{2|f(x_n)|}$, 并结合二分法而构造的具有区间序列收敛和点收敛的算法, 当然我们也可以对公式 (5) 取不同的 h_n, 而构造不同的具有区间序列收敛和点收敛的新算法. 譬如类似于文 [2], 令

$$h_n=\frac{b_n-a_n}{f(a_n)-f(b_n)},$$

由定理 1 可知, 对应的迭代公式

$$x_{n+1}=x_n\exp\left\{-\frac{\dfrac{b_n-a_n}{f(a_n)-f(b_n)}f^2(x_n)}{x_n\left(\mu f^2(x_n)+f(x_n-\dfrac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)}f(x_n))-f(x_n)\right)}\right\}\tag{11}$$

所产生的迭代序列仍然是渐近二阶收敛.

迭代公式 (11) 是结合试位法 [10] 的另一种加速迭代过程. 用完全类似于本文第 2 节的步骤, 我们也可以生成含零点 x^* 的区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$, 且其渐近收敛阶也是 2 阶.

对于方程有 m 重零点的情况, 类似于文 [2,7], 我们只要对方程 $f(x)=0$ 做适当处理即可, 令

$$F(x)=\tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{sign}(f(x))f(x)|f(x)|^{\frac{1}{m}}}{\mathrm{sign}\left(f(x+\mathrm{sign}(f(x))|f(x)|^{\frac{1}{m}})-f(x)\right)f(x)|f(x)|^{\frac{1}{m}}+f(x+\mathrm{sign}(f(x))|f(x)|^{\frac{1}{m}})-f(x)},$$

其中 m 为正整数, 则 $f(x)$ 的重零点转化为 $F(x)$ 的单零点. 对 $F(x)$ 应用算法 NA 就得到了计算重零点的避免导数的具有渐近稳定二次收敛的算法.

§4. 数值试验

例 1. $f(x)=-\ln x,\quad [a,b]=[0.5,5]$.

例 2. $f(x)=e^{\sin x}-x-1,\quad [a,b]=[1,4]$.

例 3. $f(x)=5x^3-xe^x-6,\quad [a,b]=[4,6]$.

例 4. $f(x)=-x^{10}+x^3+x+158,\quad [a,b]=[0.5,4]$.

例 5. $f(x)=1-2\sin x,\quad [a,b]=\left[0.1,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

例 6. $f(x)=-x^5-\arctan x-\sin x+32,\quad [a,b]=[1,4]$.

例 7. $f(x)=(10-x)e^{-10x}-x^{10}+1, \quad [a,b]=[0.5,6]$.

例 8. $f(x)=-\dfrac{x^3+x-11}{3x^4-2x^2+5}, \quad [a,b]=[1,7]$.

易知例 1 ~ 8 均满足 $f(a)f(b)<0$, 即各数值算例在相应的迭代区间 $[a,b]$ 内均至少有一根.

数值计算中, 各迭代算法初值都取为 $x_0=b$, 误差精度均取为 $|f(x_n)|\le 1\times10^{-15}$ 或者 $b_n-a_n\le 1\times10^{-15}$, 最大迭代次数取为 100. 指数型公式 (3), (4) 中参数 μ 按如下策略选取:

$$\mu_n=\begin{cases}1, & 若 f(x_n+f(x_n))-f(x_n)\ge 0,\\ -1, & 若 f(x_n+f(x_n))-f(x_n)<0.\end{cases} \tag{13}$$

例 1 ~ 4 就各算法的迭代步数 IT, 近似解 x_n, 误差精度 $|f(x_n)|$, 将新算法与 Newton 法, Steffensen 法及其文献 [1] 中的方法, 即本文中的公式 (4), 做了比较. 计算结果见表 1.

表 1

例	Algorithm NA			Formula (4)			Steffensen			Newton		
	IT	x_n	$\|f(x_n)\|$	IT	x_n	$\|f(x_n)\|$	IT	x_n	$\|f(x_n)\|$	IT	x_n	$\|f(x_n)\|$
1	9	1.00e+00	0.00e+00	61	1.00e+00	8.88e-16	Divergent			Divergent		
2	9	1.70e+00	8.89e-16	56	1.70e+00	4.44e-16	Divergent			Not convergent to x^* in $[a,b]$		
3	50	4.69e+00	1.71e-13	Divergent			Divergent			100	4.69e+00	1.14e-13
4	16	1.67e+00	8.53e-14	Divergent			Divergent			100	1.67e+00	8.53e-14

其中 Divergent 表示相应算法在最大迭代步数之内迭代过程中断或者误差精度 $|f(x_n)|>10^{-3}$, Newton 法求解例 2 时, 所得迭代解收敛到例 2 的另一个根 $\tilde{x}^*=0.00$.

例 5 ~ 8 将新算法与文献 [1] 中的迭代公式, 即本文中的公式 (3), 文献 [4] 中的指数下降迭代公式

$$x_{n+1}=x_n\exp\left(-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{x_n(f(x_n)-f(x_{n-1}))}\right) \tag{14}$$

及文献 [6] 中的带导数的指数迭代法

$$x_{n+1}=x_n\exp\left(-\frac{f(x_n)}{x_nf'(x_n)}\right). \tag{15}$$

分别就函数值 ($f(x)$ 或者 $f'(x)$) 的赋值次数 n, 近似解 x_n, 误差精度 $|f(x_n)|$ 做了比较. 其中公式 (14) 取初始值 $x_0=b$, $x_1=a$.

事实上, 公式 (3), (14), (15) 每迭代一次需要的函数赋值次数均为 2 次, 而新算法 NA 至多需要 4 次函数赋值. 即使如此, 从各算法的计算结果 (表 2), 我们仍看出新算法 NA 较公式 (3), (14), (15) 更有效.

表 2

例	Algorithm NA			Formula (3)			Formula (14)			Formula (15)		
	n	x_n	$\|f(x_n)\|$	n	x_n	$\|f(x_n)\|$	n	x_n	$\|f(x_n)\|$	n	x_n	$\|f(x_n)\|$
5	33	5.24e-01	2.22e-16	15	5.24e-01	0.00e+00	Divergent			Divergent		
6	49	1.97e+00	7.11e-15	Divergent			Divergent			201	1.97e+00	7.11e-15
7	49	1.00e+00	9.99e-16	Divergent			67	1.00e+00	9.99e-16	47	1.00e+00	9.99e-16
8	45	2.07e+00	0.00e+00	Divergent			Divergent			Divergent		

表 1, 2 的数值试验结果表明: 本文提出的新算法 NA 比 Newton 法, Steffensen 法和迭代公式 (3),(4), (14),(15), 即文献 [1,4,6,10] 中的算法, 具有更大的收敛范围, 更快的收敛速度, 更高的计算精度和稳定性.

§5. 结　论

本文提出了一种避免导数的迭代方法, 该方法不仅具有传统方法的高阶收敛性质, 而且同时具有点序列 $\{x_n\}$ 和区间半径序列 $\{(b_n-a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的渐近收敛性. 数值试验表明本文提出的算法, 比 Newton 法, Steffensen 法等求解非线性方程的方法更有效.

我们需要说明的是, 本文给出了构造一类具有点和区间半径序列的渐近收敛算法的一般理论框架. 在本文中, 我们是对一类带参数的迭代法, 首先进行参数选择, 然后结合二分法构造了新算法. 因此, 对参数不同的选择, 可以构造出不同的具有点和区间半径序列渐近收敛的算法, 其收敛性可类似于本文得到.

参 考 文 献

[1] 郑权, 具有参数的不带有导数的平方收敛的迭代法, 计算数学, 25(2003), 107-112.

[2] 吴新元, 罗亮生, 同时具有点和区间半径序列收敛性免导迭代法的进一步讨论, 高等学校计算数学学报, 24(2002), 327-334.

[3] 杨帆, 吴新元, 关于不用计算导数的大范围收敛迭代法的注记, 高等学校计算数学学报, 23(2001), 186-192.

[4] 吴新元, 吴忠麟, 超线性收敛的指数下降迭代法, 高等学校计算数学学报, 22(2000), 41-46.

[5] 吴新元, 对牛顿迭代法的一个重要修改, 应用数学与力学, 20(1999), 863-866.

[6] 吴新元, 解非线性方程的二阶敛速指数迭代法, 计算数学, 20(1998), 367-370.

[7] X.Y.Wu, J.L.Xia, R.Shao, Quadratically convergent multiple roots finding method without derivatives, Computers and Mathematics with Applications, 42(2001),115-119.

[8] G.Alefeld, F.A.Potra, Y.X.Shi, On enclosing simple roots of nonlinear equations, Math. Comp., 61(1993), 733-744.

[9] G.Alefeld, F.A.Potra, Some efficient methods for enclosing zeroes of nonlinear equations, BIT, 32(1992), 334-344.

[10] J.M.Ortega, W.C.Rheinboldt, Ierative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York, 1970.

[11] I.F.Steffensen, Remarks on iteration, Skand Aktuarietidskr, 16(1933), 64-72.