关于一阶双曲型方程差分解的外推及其稳定性*

陈德辉　　胡承列

（华东师范大学数学系）

ON EXTRAPOLATIONS OF DIFFERENCE SOLUTION FOR THE FIRST ORDER HYPERBOLIC EQUATION AND THEIR STABILITY

Chen De-hui　Hu Cheng-lie

(Department of Mathematics, East-China Normal University)

Abstract

First, stability of extrapolations of difference schemes for the first order hyperbolic equation is discussed and the stability conditions are obtained. Then, a class of improved extrapolations are proposed, which possess better stability and higher accuracy than Twizell's and Khaliq's algorithms.

E. H. Twizell 和 A. Q. M. Khaliq 在[1]—[3]中讨论了一阶双曲型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1}$$

（常数 $a>0, t>0, x>0$）初边值问题的差分格式，并给出了相应的关于时间变量 t 的外推算法，但未涉及这些算法的稳定性问题. 本文首先对各差分格式的稳定性予以讨论，导出其稳定性条件，然后提出一类改进的差分格式，它们比[1]～[3]中的算法有较高的精度或较好的稳定性.

设空间变量 x 方向的步长为 h，时间变量 t 方向的步长为 τ，网格结点为 (x_j, t_n)，记 $U_{jn}=u(x_j,t_n)$，u_{jn} 表示相应的差分方程的解，网格比 $r=a\tau/h$.

将 $u(x_j,t_{n+1})$ 在 $t=t_n$ 进行 Taylor 展开，得

$$u(x_j,t_{n+1})=u(x_j,t_n)+u_t'(x_j,t_n)\tau+\frac{1}{2!}\tau^2u_{tt}''(x_j,t_n)+\cdots$$

$$=\left(I+\tau\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2!}\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\cdots\right)u(x_j,t_n)$$

* 1987 年 5 月 21 日收到.

$$= e^{\tau\frac{\partial}{\partial t}} u(x_j,\ t_n).$$

其中 I 为单位算子. 于是

$$U_{j,n+1} = e^{\tau\frac{\partial}{\partial t}} U_{jn}. \tag{2}$$

再由(1)可得

$$U_{j,n+1} = e^{-a\tau\frac{\partial}{\partial x}} U_{jn}. \tag{3}$$

为了导出对方程(1)不同的数值计算格式,可对(3)中的算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 采用不同的逼近.若对算子 $e^{-a\tau\frac{\partial}{\partial x}}$ 采用 $(m,\ k)$ 阶算子 Padé 逼近(为了与[3]中记法一致,把分母是 m 次多项式,分子是 k 次多项式的 Padé 逼近称为 (m,k) 阶的),则可得各种不同的差分格式. 然后为了提高格式的精度,作关于变量 t 的外推,得

$$u_{j,n+2} = \begin{cases} (2^{m+k}u_{j,n+2}^{(1)} - u_{j,n+2}^{(2)})/(2^{m+k} - 1), & m \neq k, \\ (2^{2m}u_{j,n+2}^{(1)} - u_{j,n+2}^{(2)})/(2^{2m} - 1), & m = k, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $u_{j,n+2}^{(1)}$ 表示以步长 τ 两次使用 (m,k) 阶 Padé 逼近的差分格式所得的解, $u_{j,n+2}^{(2)}$ 表示以步长 2τ 使用 (m,k) 阶 Padé 逼近的差分格式所得的解.

在讨论算法(4)的稳定性之前,先给出二个引理.

设差分方程

$$u^{(n+1)} = Hu^{(n)}, \tag{5}$$

其中 H 为 N 级阵, $u^{(n+1)}$ 及 $u^{(n)}$ 为 N 维向量.

引理 1. 若 H 的谱半径 $\rho(H) < 1$ 或 H 为非亏损阵,且 $\rho(H) \leqslant 1$, 则差分方程(5)稳定.

引理 2. 差分方程(5)稳定的必要条件是存在与 τ 无关的常数 c 及 τ_0, 使当 $0 < \tau < \tau_0$ 时(而 $h = g(\tau)$ 为一连续函数,且 $g(0) = 0$), 有 $\rho(H) < 1 + c\tau$.

为了避免篇幅过长,对文中所涉及的一些算子均仅作形式的运算,类似的论述可参见[4].

一、中心差分格式的外推法

[3]中讨论定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ a > 0,\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = g(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = v(x),\ t > 0, \\ u(1,\ t) = w(t),\ t > 0. \end{cases}$$

并指出该问题是超定的,其中边界 $x = 1$ 也可给出它的数值条件.

将区间 $0 \leqslant x \leqslant 1(N+1)$ 等分, 分点 $x_j = jh(j = 0 \sim N+1)$, $t_n = n\tau(n = 0, 1, \cdots)$, $h = 1/(N+1)$.

熟知

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2h}\delta_h f+O(h^2),$$

其中 δ_h 表示中心差分算子：$\delta_h f(x)=f(x+h)-f(x-h)$.

用近似式 $\dfrac{\partial}{\partial x}\approx\dfrac{1}{2h}\delta_h$ 代入算子 $e^{-a\tau\frac{\partial}{\partial x}}$ 后，并采用(1,1) Padé 逼近，相应于(4)的差分格式为

$$\begin{cases} u_{j,n+2}=\dfrac{4}{3}u_{j,n+2}^{(1)}-\dfrac{1}{3}u_{j,n+2}^{(2)}, \\ u_{j,n+2}^{(1)}=\left(I+\dfrac{r}{4}\delta_h\right)^{-1}\left(I-\dfrac{r}{4}\delta_h\right)\left(I+\dfrac{r}{4}\delta_h\right)^{-1} \\ \qquad\qquad\times\left(I-\dfrac{r}{4}\delta_h\right)u_{jn}, \\ u_{j,n+2}^{(2)}=\left(I+\dfrac{r}{2}\delta_h\right)^{-1}\left(I-\dfrac{r}{2}\delta_h\right)u_{jn}. \end{cases}\tag{6}$$

我们用矩阵方法来分析算法(6)的稳定性．算法(6)的计算误差传播应满足

$$Z^{(n+2)}=AZ^{(n)}.$$

其中 $Z^{(n)}=(z_{1n},z_{2n},\cdots,z_{Nn})^T$，$Z^{(0)}$ 为初始误差向量，

$$A=\frac{4}{3}\left(I+\frac{r}{4}B\right)^{-2}\left(I-\frac{r}{4}B\right)^2-\frac{1}{3}\left(I+\frac{r}{2}B\right)^{-1}\left(I-\frac{r}{2}B\right),\tag{7}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1\cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

B 为 N 级阵．易知 B 的特征值为 $\lambda_q=2i\cos(q\pi/(N+1))(q=1,2,\cdots,N)$，且有 N 个线性无关的特征向量．因此由(7)知 A 的特征值为

$$\Lambda_q=\alpha\left(\frac{1-\dfrac{r}{4}\lambda_q}{1+\dfrac{r}{4}\lambda_q}\right)^2+(1-\alpha)\left(\frac{1-\dfrac{r}{2}\lambda_q}{1+\dfrac{r}{2}\lambda_q}\right)$$

$$=\frac{1+\dfrac{3}{4}s^2+\dfrac{1}{2}s^3\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right)i}{1-\dfrac{5}{4}s^2+2s\left(1-\dfrac{1}{8}s^2\right)i},$$

故

$$|\Lambda_q|^2=\frac{\left(1+\dfrac{3}{4}s^2\right)^2+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right)^2s^6}{\left(1-\dfrac{5}{4}s^2\right)^2+4s^2\left(1-\dfrac{s^2}{8}\right)^2}=\frac{H}{G},$$

其中 $s=r\cos(q\pi/(N+1))(q=1,2,\cdots,N)$，$\alpha=4/3$．经计算得

$$H-G=\frac{1}{9}s^6\geqslant 0\ (\text{对 }\forall s).$$

于是 $|\Lambda_q|^2 = 1 + \frac{1}{9} f(s)$，其中 $f(s) = \dfrac{s^6}{1 + \frac{3}{2} s^2 + \frac{9}{16} s^4 + \frac{1}{16} s^6} \geqslant 0$，则有

$$f'(s) \begin{cases} < 0 & s < 0 \\ \geqslant 0 & s \geqslant 0 \end{cases},$$

且因 $f(s)$ 为偶函数，故

$$\rho^2(A) = 1 + \frac{1}{9} f(\tilde{s}), \quad \tilde{s} = r\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right).$$

可见当 $N \geqslant 2$ 时就有 $\tilde{s} \geqslant \frac{r}{2} > 0$，又因当 $s > 0$ 时 $f(s)$ 为单调增加函数，故 $f(\tilde{s}) \geqslant f\left(\frac{r}{2}\right)$，于是

$$\rho^2(A) \geqslant 1 + \frac{1}{9} f\left(\frac{r}{2}\right).$$

对任一固定的 $r > 0$，有 $\rho(A) \geqslant \sigma_0 > 1$，此时 $h = \frac{a}{r}\tau = g(\tau)$，且 $g(0) = 0$。据引理 2 知格式(6)不稳定.

用同样的方法可以讨论基于 (1,0)、(2,0)、(2,1)、(2,2) Padé 逼近的各外推算法，其结论是基于 (1,0)、(2,1) Padé 逼近的外推算法为绝对稳定，而基于 (2,0)、(2,2) Padé 逼近的外推算法为不稳定.

以上讨论，通过关于变量 t 的外推，从而提高了 t 方向的截断误差关于 τ 的阶，而对 x 方向的截断误差关于 h 的阶始终没有改变. 因此要提高关于 h 的阶，必须提高对算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 的逼近精度. 记

$$\delta_{\frac{h}{2}} f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$

容易验证

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2h}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^{-1} \delta_h f + O(h^4). \tag{8}$$

将近似式 $\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2h}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^{-1}\delta_h$ 代入 $e^{-a\tau\frac{\partial}{\partial x}}$ 后采用(2,2) Padé 逼近，由(3)可得到差分格式

$$\begin{aligned} u_{j,n+1} = &\left[I + \frac{r}{4}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^{-1}\delta_h + \frac{r^2}{48}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^{-2}\delta_h^2\right] \\ &\cdot \left[I - \frac{r}{4}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^{-1}\delta_h + \frac{r^2}{48}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^{-2}\delta_h^2\right] u_{j,n}. \end{aligned} \tag{9}$$

经整理后有

$$\left[\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^2 + \frac{r}{4}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)\delta_h + \frac{r^2}{48}\delta_h^2\right] u_{j,n+1}$$

$$= \left[\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)^2 - \frac{r}{4}\left(I + \frac{1}{6}\delta_{\frac{h}{2}}^2\right)\delta_h + \frac{r^2}{48}\delta_h^2\right] u_{jn}. \tag{10}$$

其截断误差为 $O(\tau^4 + h^4)$.

我们用 Fourier 方法分析格式(10)的稳定性．令

$$u_{jn} = \lambda^n e^{ji\theta}, \tag{11}$$

将(11)代入(10)式后，其增长因子

$$\lambda = \frac{d - bi}{d + bi},$$

其中

$$d = \frac{1}{2} + \frac{4}{9}\cos\theta + \frac{1}{18}\cos 2\theta + \frac{r^2}{24}(\cos 2\theta - 1),$$

$$b = \frac{r}{12}(4\sin\theta + \sin 2\theta).$$

可见 $|\lambda| = 1$，因此格式(10)，绝对稳定．

从计算角度来看，使用格式(10)，每计算一个时间层需解一个五对角线代数方程组，这与 Twizell 等基于(2,0)、(2,1)、(2,2) Padé 逼近的中心差分格式的计算量相当，但比它们有较高的精度．

二、向后差分格式的外推法

[3]中讨论定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, a > 0, t > 0, x > 0, \\ u(x,0) = g(x), \ x \geqslant 0, \\ u(0,t) = v(t), \ t > 0. \end{cases}$$

设 X 为任给的正数，将区间 $0 \leqslant x \leqslant X$ N 等分，分点 $x_j = jh (j = 0 \sim N)$，步长 $h = X/N$.

现将 $u(x_{j+1}, t_n)$ 在 $x = x_j$ 进行 Taylor 展开，得

$$u_{j+1,n} = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} u_{jn},$$

于是

$$Eu_{jn} = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} u_{jn},$$

其中 E 为移位算子，$Ef(x) = f(x+h)$，所以

$$E = e^{h\frac{\partial}{\partial x}}. \tag{12}$$

又

$$E = (I - \nabla)^{-1}. \tag{13}$$

其中 ∇ 为向后差分算子：$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$．由(12)知 $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{h}\ln E$，将(13)代入上式右端，并进行 Maclaurin 展开，得

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{h}\left(\nabla+\frac{1}{2}\nabla^{2}+\frac{1}{3}\nabla^{3}+\cdots\right). \tag{14}$$

若用近似式 $\frac{\partial}{\partial x}\approx\frac{1}{h}\nabla$ 代入 $e^{-ar\frac{\partial}{\partial x}}$ 后采用 (l,m) 阶 Padé 逼近，则可得一系列向后差分格式．由于 $\frac{1}{h}\nabla$ 对 $\frac{\partial}{\partial x}$ 逼近的误差阶为 $O(h)$，故没有必要选用高精度的 Padé 逼近．我们仅讨论(1,0)、(1,1)阶 Padé 逼近的外推算法．

(1,0)Padé 逼近的外推格式为

$$\begin{cases}u_{j,n+2}=2u_{j,n+2}^{(1)}-u_{j,n+2}^{(2)},\\ u_{j,n+2}^{(1)}=(I+r\nabla)^{-1}(I+r\nabla)^{-1}u_{jn},\\ u_{j,n+2}^{(2)}=(I+2r\nabla)^{-1}u_{jn}.\end{cases} \tag{15}$$

其误差传播应满足

$$Z^{(n+2)}=AZ^{(n)},$$

其中

$$A=2(I+rC)^{-2}-(I+2rC)^{-1},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&&\\ \text{0}&&&-1&1\end{pmatrix},$$

C 为 N 级阵．

易知矩阵 C 的特征值为 $\lambda(C)=1$，因此 A 的特征值为

$$\lambda(A)=\frac{2}{(1+r)^{2}}-\frac{1}{1+2r}=\frac{H}{G},$$

其中 $H=(1+r)^{2}-2r^{2}$, $G=(1+r)^{2}(1+2r)>0$．由于 $G-H=2r(1+r)^{2}+2r^{2}>0$，$G+H=2(1+r)^{3}-2r^{3}>0$，故 $|\lambda(A)|<1$（对 $\forall r>0$）．据引理 1，格式(15)绝对稳定．

下面将提出一类改进格式．我们作新的线性组合

$$u_{j,n+2}=\alpha u_{j,n+2}^{(1)}+(1-\alpha)u_{j,n+2}^{(2)}. \tag{16}$$

欲提高格式(16)的截断误差的阶，必须重新确定权系数 α．将(14)式代入 $e^{-2r\frac{\partial}{\partial x}}$ 后并进行 Maclaurin 展开，得

$$e^{-2r\frac{\partial}{\partial x}}=I-2r\nabla+r(2r-1)\nabla^{2}-\frac{2}{3}r(2r^{2}-3r+1)\nabla^{3}+\cdots. \tag{17}$$

同样地有

$$(I+r\nabla)^{-2}=I-2r\nabla+3r^{2}\nabla^{2}-\cdots, \tag{18}$$

$$(I+2r\nabla)^{-1}=I-2r\nabla+4r^{2}\nabla^{2}-\cdots. \tag{19}$$

因

$$U_{j,n+2}=e^{-2ra\frac{\partial}{\partial x}}U_{jn}, \tag{20}$$

故将(15)后两式及(17)—(20)式代入(16)式后比较等式两边关于 ∇ 同次幂的系数，其中 I 与 ∇ 的系数恒等，而 ∇^{2} 的系数可选择 α 使它相等，即有

$$3\alpha r^2 + 4(1-\alpha)r^2 = r(2r-1),$$

解得

$$\alpha = 2 + \frac{1}{r}.$$

此时格式(16)相应为

$$u_{j,n+2} = \left(2 + \frac{1}{r}\right) u_{j,n+2}^{(1)} - \left(1 + \frac{1}{r}\right) u_{j,n+2}^{(2)}, \tag{21}$$

其截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$、而格式(15)的截断误差为 $O(\tau^2 + h)$. 可见，格式(21)比格式(15)有较高的精度. 可以证明格式(21)是绝对稳定的.

数值例子:

$$\begin{cases} u_t' + u_x' = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = e^x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = e^t, & t > 0. \end{cases}$$

该方程的精确解为

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{x-t}, & x \geqslant t, \\ e^{t-x}, & x < t. \end{cases}$$

用格式(15)及(21)可得计算结果列表如下 ($h = 0.1, \tau = 0.2, r = 2$):

网格点	格式(15)	误差	格式(21)	误差	精确解
(0.1,0.4)	1.3630449	1.3×10^{-2}	1.3501826	3.2×10^{-4}	1.3498588
(0.1,0.8)	2.0270757	1.3×10^{-2}	2.0208700	7.1×10^{-3}	2.0137527
(0.1,1.2)	3.0239003	2.0×10^{-2}	3.0146362	1.0×10^{-2}	3.0041660
(0.1,1.6)	4.5111262	2.9×10^{-2}	4.4973120	1.6×10^{-2}	4.4816891
(0.2,0.4)	1.3173103	9.6×10^{-2}	1.3026690	8.6×10^{-2}	1.2214027
(0.2,0.8)	1.8522002	3.0×10^{-2}	1.8390170	1.7×10^{-2}	1.8221188
(0.2,1.2)	2.7596311	4.1×10^{-2}	2.7469694	2.9×10^{-2}	2.7182818
(0.2,1.6)	4.1167850	6.2×10^{-2}	4.0978938	4.3×10^{-2}	4.0552000

基于(1,1) Padé 逼近的后差格式为

$$\begin{cases} u_{j,n+2} = \frac{4}{3} u_{j,n+2}^{(1)} - \frac{1}{3} u_{j,n+2}^{(2)}, \\ u_{j,n+2}^{(1)} = \left(I + \frac{r}{2}\nabla\right)^{-1}\left(I - \frac{r}{2}\nabla\right)\left(I + \frac{r}{2}\nabla\right)^{-1}\left(I - \frac{r}{2}\nabla\right) u_{jn}, \\ u_{j,n+2}^{(2)} = (I + r\nabla)^{-1}(I - r\nabla) u_{jn}. \end{cases} \tag{22}$$

经计算，可得相应于(22)的增长矩阵 A 的特征值为

$$\lambda(A) = \frac{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 (1 - r) + \frac{\alpha}{2} r^3}{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 (1 + r)},$$

其中 $\alpha = \frac{4}{3}$. 当 $r < 6 + 4\sqrt{3}$ 时 $|\lambda(A)| < 1$, 据引理 1 可知格式(22)条件稳定.

三、高阶向后差分格式的外推法

若对算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 采用逼近式

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2h}(2\nabla + \nabla^2),$$

其截断误差为 $O(h^2)$，则基于(1,1) Padé 逼近的高阶向后差分格式的外推法为

$$\left\{\begin{aligned} u_{j,n+2} &= \frac{4}{3}u_{j,n+2}^{(2)} - \frac{1}{3}u_{j,n+2}^{(2)}, \\ u_{j,n+2}^{(1)} &= \left[I + \frac{r}{4}(2\nabla + \nabla^2)\right]^{-1}\left[I - \frac{r}{4}(2\nabla + \nabla^2)\right] \\ &\quad \cdot \left[I + \frac{r}{4}(2\nabla + \nabla^2)\right]^{-1}\left[I - \frac{r}{4}(2\nabla + \nabla^2)\right]u_{jn}, \\ u_{j,n+2}^{(2)} &= \left[I + \frac{r}{2}(2\nabla + \nabla^2)\right]^{-1}\left[I - \frac{r}{2}(2\nabla + \nabla^2)\right]u_{jn}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

按[3]在点 $(x_i, t_n)(n = 1,2,\cdots)$ 用逼近式 $\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\nabla$，则格式(23)的误差传播应满足 $Z^{(n+2)} = AZ^{(n)}$，其中

$$A = \frac{4}{3}\left(I + \frac{r}{4}D\right)^{-2}\left(I - \frac{r}{4}D\right)^2 - \frac{1}{3}\left(I + \frac{r}{2}D\right)^{-1}\left(I - \frac{r}{2}D\right),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ -4 & 3 & & & \\ 1 & -4 & 3 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

D 为 N 级矩阵(参见[3]).

易知 D 的特征值 $\lambda(D) = 2, 3$，通过计算可知，当 $r < 4 + \frac{4}{3}\sqrt{12}$ 时 $|\lambda(A)| < 1$，据引理 1 知格式(23)条件稳定．格式(23)的截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$.

下面提出一个改进算法．因为

$$\begin{aligned} &\left[I + \frac{r}{4}(2\nabla + \nabla^2)\right]^{-2}\left[I - \frac{r}{4}(2\nabla + \nabla^2)\right]^2 \\ &\quad = I - 2r\nabla + r(2r-1)\nabla^2 - \frac{r^2}{2}(3r-4)\nabla^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\left[I + \frac{r}{2}(2\nabla + \nabla^2)\right]^{-1}\left[I - \frac{r}{2}(2\nabla + \nabla^2)\right] \\ &\quad = I - 2r\nabla + r(2r-1)\nabla^2 - 2r^2(r-1)\nabla^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{25}$$

将(17)、(20)、(23)的后两式、(24)、(25)代入(16)后，比较等式两边 ∇^2 的系数使其相等，得

$$\frac{1}{2}\alpha r^2(3r-4)+2(\alpha-1)r^2(1-r)=\frac{2}{3}r(2r^2-3r+1).$$

解得

$$\alpha=\frac{4}{3}-\frac{4}{3r^2}.$$

于是得到改进格式

$$u_{j,n+2}=\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3r^2}\right)u_{j,n+2}^{(1)}-\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3r^2}\right)u_{j,n+2}^{(2)}. \tag{26}$$

其截断误差为 $O(\tau^3+h^3)$，与格式(23)基本相当．经计算后可证得当 $r<4+\frac{4}{3}\sqrt{13}$ 时，格式(26)稳定．它比格式(22)稳定范围稍有改进．

基于(2,0) Padé 逼近，其外推算法为

$$\begin{cases} u_{j,n+2}=\frac{4}{3}u_{j,n+2}^{(1)}-\frac{1}{3}u_{j,n+2}^{(2)}, \\ u_{j,n+2}^{(1)}=\left[I+\frac{r}{2}(2\nabla+\nabla^2)+\frac{r^2}{8}(2\nabla+\nabla^2)^2\right]^{-1} \\ \qquad\cdot\left[I+\frac{r}{2}(2\nabla+\nabla^2)+\frac{r^2}{8}(2\nabla+\nabla^2)^2\right]^{-1}u_{jn}, \\ u_{j,n+2}^{(2)}=\left[I+r(2\nabla+\nabla^2)+\frac{r^2}{2}(2\nabla+\nabla^2)^2\right]^{-1}u_{jn}. \end{cases} \tag{27}$$

可以证明格式(27)绝对稳定．它的截断误差为 $O(\tau^3+h^2)$．

同样地也可得到一个改进的算法

$$u_{j,n+2}=\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3r^2}\right)u_{j,n+2}^{(1)}-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3r^2}\right)u_{j,n+2}^{(2)}. \tag{28}$$

它为绝对稳定，其截断误差为 $O(\tau^3+h^3)$，与格式(27)相比有较好的精度．

最后，我们指出：基于(1,0)、(2,1)、(2,2) Padé 逼近的高阶向后差分格式的外推算法都为绝对稳定．

参　考　文　献

[1] A. Q. M. Khaliq, E. H. Twizell, The extrapolation of stable finite difference schemes for first order hyperbolic equations, Inter. J. Computer, Math. 11(1982), 155—167.

[2] A. Q. M. Khaliq, E. H. Twizell, Barkward difference replacements of the space derivative in first order hyperbolic equations, Comput. Maths. Appl. Mech. Engrg. 43(1984), 45—56.

[3] E. H. Twizell, Computational methods for partial differential equations. Ellis Horwood/Wiley, Chichester, 1984.

[4] L. F. Jack. L. L. Shelly, Introduction to numerical analysis (second edition). McGraw-Hill book company, New York, 1974.