

激光打靶问题的磁流体数值计算*

沈隆钧 杜应炎 苏秀敏 张永慧 赖东显 于仁 罗平庆 解汉明

(应用物理和计算数学研究所)

A MAGNETOHYDRODYNAMIC NUMERICAL METHOD FOR A LASER-IRRADIATED TARGET

Shen Long-jun Du Ying-yan Su Xiu-min Zhang Yong-hui

Lai Dong-xian Yu Ren Luo Ping-qing Xie Han-ming

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics)

Abstract

In this paper, the ALE method is used to treat some magnetohydrodynamic problems for a one-dimensional cylindrical laser-irradiated target, and some numerical results for a hot-spot model are given.

§ 1. 引言

在等离子体和激光研究工作中,需要作磁流体动力学问题的数值计算,这方面的工作在[1]、[2]中已有初步介绍。但是,由于这方面的工作比较复杂,因此,无论一维或二维方面的工作都有许多问题需要研究^[3]。

本文概述了我们编制的一维磁流体动力学问题程序的数值计算方法。它的基本物理假定如下:

1. 讨论的系统是全电离的一维柱对称系统,且满足准电中性条件;
2. 所有的物理过程都是慢过程;
3. 电子和离子温度分离,不考虑光子。

在这样的假定下,推导出了§2中的基本方程组。

为了考察ALE^[5]方法在二维磁流体数值计算中的效果,我们在这个程序中使用了ALE方法。§3对数值方法作了扼要的阐述。§4给出了能流的计算公式。§5简要地介绍了一个模型的计算结果。该程序已在电子计算机上进行了计算。

为解决磁流体力学数值计算中出现的Alfvén问题, Boris^[4]提出了一个物理诱导解的方法,在动量方程中引进了可调参数 C_* 。我们在该程序中使用了这一方法。对激光打靶这类模型,在某些瞬间,可见该方法的效果。

* 1983年4月7日收到。

由于 Poynting 矢量的连续性,导出了不同介质界面上 $\alpha \frac{\partial T_\epsilon}{\partial r} + \beta \frac{\partial B}{\partial r}$ 为连续的连接条件. 该程序给出了相应的数值处理方法,计算结果令人满意.

该工作是在李德元同志指导下进行的,在此,作者表示深切的谢意.

§ 2. 基本方程组与定解条件

我们导出的磁流体力学方程组为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v^2 = - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{B}{4\pi r} \frac{\partial r B}{\partial r}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \epsilon_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho \epsilon_e v + \frac{P_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[\beta_\lambda^{T_e} u - f_e K_\perp^e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right] \\ + u \left(\alpha_\perp u - \beta_\lambda^{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) - \omega_{ei} (T_e - T_i) - K_{rB} T_e + \rho \dot{\epsilon}_k, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \epsilon_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho \epsilon_i v + \frac{(P_i + q)}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r f_i K_\perp^i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \omega_{ei} (T_e - T_i), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{4\pi} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{C}{4\pi \epsilon \bar{n}_e \rho} \left[\frac{B}{\epsilon \bar{n}_e \rho} \left(\alpha_\perp u - \beta_\lambda^{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{B^2 v}{C} \right] \\ - \epsilon \bar{n}_e \rho u \left[\frac{1}{\epsilon \bar{n}_e \rho} \left(\alpha_\perp u - \beta_\lambda^{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{B v}{C} \right] + \dot{u}_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中

$$P = P_e + P_i + q,$$

P_e ——电子压强, P_i ——离子压强,

q ——人为粘性压强, B ——磁感应强度,

ϵ_e ——单位质量内的电子内能,

ϵ_i ——单位质量内的离子内能,

T_e ——电子温度, T_i ——离子温度,

u ——电子和离子宏观速度差,

$$u = - \frac{C}{4\pi \epsilon \bar{n}_e \rho r} \frac{\partial r B}{\partial r}. \quad (2.6)$$

f_e 、 f_i 分别为电子和离子限流因子. $\beta_\lambda^{T_e}$ 、 $\beta_\lambda^{T_i}$ 、 K_\perp^e 、 α_\perp 、 ω_{ei} 和 K_{rB} 均为与未知函数有关的已知函数. (2.3)与(2.5)的最后一项为源项.

为了应用人为光速法,动量方程改写为^[4]

$$\left(1 + \frac{V_A^2}{C_*^2}\right) \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho v + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v^2 \right] + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \varepsilon_b}{\partial r} - \frac{V_A^2}{2C_*^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \rho v^2 = 0, \quad (2.7)$$

其中

C_* ——人为光速,

$\varepsilon_b = \frac{B^2}{8\pi}$ ——单位体积内磁能,

$V_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$ ——Alfven 速度.

这组方程除具有通常的初始条件和边界条件外,在不同介质的交界面处,要给连接条件,即 v 、 B 、 P 、 T_e 、 T_i 、 $\alpha_{\perp} u - \beta_{\lambda}^n T$ 、 $\beta_{\lambda}^n u - f_e K_{\perp}^e \frac{\partial T_e}{\partial r}$ 及 $f_i K_{\perp}^i$ 连续.

§ 3. 数值方法

为了研究磁流体力学方程组的二维数值方法,我们采用 ALE 方法,即任意拉格朗日-欧拉方法解这组方程.方法分为两步,第一步是典型的拉格朗日计算,第二步进行网格的重新划分,并计算网格间物理量的输运.

给定了适当的网格后,第一步的计算格式如下:

$$1) \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n,$$

这里 $\Delta M_{i-\frac{1}{2}}$ 为第 i 个网格内介质质量.

$$2) \alpha_{A_i}^n \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} v_i^{n+1} - \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n v_i^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + R_i^n (P_{i+\frac{1}{2}}^n + \varepsilon_{b_{i+\frac{1}{2}}}^n - P_{i-\frac{1}{2}}^n - \varepsilon_{b_{i-\frac{1}{2}}}^n) + \varepsilon_{b_{i+\frac{1}{2}}}^n \Delta R_{i+\frac{1}{2}}^n + \varepsilon_{b_{i-\frac{1}{2}}}^n \Delta R_{i-\frac{1}{2}}^n - \frac{V_{A_i}^n}{2C_*^2} (\rho_{i+\frac{1}{2}}^n R_{i+\frac{1}{2}}^n \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n2} - \rho_{i-\frac{1}{2}}^n R_{i-\frac{1}{2}}^n \bar{v}_{i-\frac{1}{2}}^{n2}) = 0,$$

其中

$$\alpha_A = 1 + \frac{V_A^2}{C_*^2}, \quad \bar{v}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v_i + v_{i+1}).$$

$$3) \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \varepsilon_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \varepsilon_{ei-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + P_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1} (R_i^{n+1} v_i^{n+1} - R_{i-1}^{n+1} v_{i-1}^{n+1}) - R_i^{n+1} [\bar{K}_{11i}^{n+1} (T_{ei+\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1}) + \bar{K}_{12i}^{n+1} (H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})] + R_{i-1}^{n+1} [\bar{K}_{11i-1}^{n+1} (T_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ei-1}^{n+1}) + \bar{K}_{12i-1}^{n+1} (H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1})] - \frac{C}{8\pi} (H_i^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) \{ \bar{K}_{21i-1}^{n+1} (T_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ei-1}^{n+1}) + \bar{K}_{21i}^{n+1} (T_{ei}^{n+1} - T_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1}) \} + \bar{K}_{22i-1}^{n+1} (H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) + \bar{K}_{22i}^{n+1} (H_i^{n+1} - H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \}$$

$$- A_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + A_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} K_{rbj-\frac{1}{2}}^{n+1} T_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta M_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{kj-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0,$$

其中 $H = RB$, $A_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (R_j^2 - R_{j-1}^2)$, $K_{j-\frac{1}{2}} = \omega_{eij-\frac{1}{2}} (T_i - T_e)_{j-\frac{1}{2}}$, 符号 $\bar{K}_{\alpha\beta}$ 、 $\bar{K}_{\alpha\beta}^+$ 、 $\bar{K}_{\alpha\beta}^-$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) 的意义见下节.

$$\begin{aligned} 4) \quad & \frac{\Delta M_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \varepsilon_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta M_{j-\frac{1}{2}}^n \varepsilon_{ij-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + (P_i + q)_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} (r_j v_j - r_{j-1} v_{j-1})^{n+1} \\ & - R_j^{n+1} f_{ij}^{n+1} \bar{K}_{1j}^{in+1} (T_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1}) + R_{j-1}^{n+1} f_{ij}^{n+1} \bar{K}_{1j}^{in+1} (T_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ & + K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} A_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = 0, \\ 5) \quad & \frac{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \varepsilon_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} - A_{j-\frac{1}{2}}^n \varepsilon_{ij-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + \varepsilon_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} (R_j^{n+1} v_j^{n+1} - R_{j-1}^{n+1} v_{j-1}^{n+1}) \\ & - \varepsilon_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} (v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) \Delta R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\ & - \frac{C}{4\pi} \{ H_j^{n+1} [\bar{K}_{21j}^{n+1} (T_{ej+\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ej-\frac{1}{2}}^{n+1}) + \bar{K}_{22j}^{n+1} (H_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})] \\ & - H_{j-1}^{n+1} [\bar{K}_{21j-1}^{n+1} (T_{ej-\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ej+\frac{1}{2}}^{n+1}) + \bar{K}_{22j-1}^{n+1} (H_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})] \} \\ & + \frac{C}{4\pi} (H_j^{n+1} - H_{j-1}^{n+1}) \{ \bar{K}_{21j}^{+n+1} (T_{ej-\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{ej-1}^{n+1}) + \bar{K}_{21j}^{-n+1} (T_{ej}^{n+1} - T_{ej+\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ & + \bar{K}_{22j-1}^{+n+1} (H_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{j-1}^{n+1}) + \bar{K}_{22j}^{-n+1} (H_j^{n+1} - H_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \} \\ & - A_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \omega_{kj-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

动量方程为显式格式, 因而易于求解. 离子方程、电子方程和磁场方程取为隐式格式, 需迭代求解. 可将三个方程同时进行迭代, 也可依次逐个进行迭代, 前者用矩阵追赶法, 后者用一般追赶法. 实际计算表明, 前者效果较好.

第二步的算法是根据某种特定的要求, 将网格重新划分, 由 n 时刻与 $n+1$ 时刻网格点 j 的位置可确定网格运动速度, 设它为 D_j . 于是需要计算网格间物理量的输运. 我们采用了贡献网格法 (donor cell). 记第二步结束时任一物理量 F 为 $(F)^{n+1}$, 并记

$$\begin{aligned} r_j &= \alpha \operatorname{sign}(v_j^{n+1} - D_j^{n+1}) + \beta \frac{2\Delta t^{n+\frac{1}{2}}(v_j^{n+1} - D_j^{n+1})}{\Delta r_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \Delta r_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}}, \\ r_{j+\frac{1}{2}} &= \alpha \operatorname{sign}(v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1} - D_j^{n+1} - D_{j+1}^{n+1}) \\ &+ \beta \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}(v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1} - D_j^{n+1} - D_{j+1}^{n+1})}{2\Delta r_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}}, \end{aligned}$$

这里 α, β 为常数, 且 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

第二步的计算格式为

$$\begin{aligned} 1) \quad & (\Delta M)_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \Delta M_{j-\frac{1}{2}}^n - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \{ r_j^{n+1} \rho_j^{n+1} (v_j^{n+1} - D_j^{n+1}) \\ & - r_{j-1}^{n+1} \rho_{j-1}^{n+1} (v_{j-1}^{n+1} - D_{j-1}^{n+1}) \}, \end{aligned}$$

$$\rho_j^{n+1} = \frac{1 + \gamma_j}{2} \rho_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1 - \gamma_j}{2} \rho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}.$$

2) $(\Delta M \cdot v)_i^{n+1} = \Delta M_i^n v_i^{n+1} - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \rho_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} (v_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - D_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})$
 $+ \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \rho_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \bar{v}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} (v_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - D_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}),$
 $\bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}}{2} v_i^{n+1} + \frac{1 - \gamma_{i+\frac{1}{2}}}{2} v_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}.$

3) $(\Delta M \cdot \varepsilon_e)_i^{n+1} = \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \varepsilon_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_i^{n+1} \rho_i^{n+1} \varepsilon_{ei}^{n+1} (v_i^{n+1} - D_i^{n+1})$
 $+ \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_{j-1}^{n+1} \rho_{j-1}^{n+1} \varepsilon_{ej-1}^{n+1} (v_{j-1}^{n+1} - D_{j-1}^{n+1}),$
 $\rho_i^{n+1} \varepsilon_{ei}^{n+1} = \frac{1 + \gamma_i}{2} \rho_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \varepsilon_{ei-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1 - \gamma_i}{2} \rho_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \varepsilon_{ei+\frac{1}{2}}^{n+1}.$

4) $(\Delta M \cdot \varepsilon_i)_i^{n+1} = \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \varepsilon_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_i^{n+1} \rho_i^{n+1} \varepsilon_{ij}^{n+1} (v_i^{n+1} - D_i^{n+1})$
 $+ \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_{j-1}^{n+1} \rho_{j-1}^{n+1} \varepsilon_{ij-1}^{n+1} (v_{j-1}^{n+1} - D_{j-1}^{n+1}),$
 $\rho_i^{n+1} \varepsilon_{ij}^{n+1} = \frac{1 + \gamma_i}{2} \rho_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \varepsilon_{ii-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1 - \gamma_i}{2} \rho_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \varepsilon_{ii+\frac{1}{2}}^{n+1}.$

5) $(A \cdot \varepsilon_b)_i^{n+1} = A_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \varepsilon_{bj-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_i^{n+1} \varepsilon_{bj}^{n+1} (v_i^{n+1} - D_i^{n+1})$
 $+ \Delta t^{n+\frac{1}{2}} r_{j-1}^{n+1} \varepsilon_{bj-1}^{n+1} (v_{j-1}^{n+1} - D_{j-1}^{n+1}),$
 $\varepsilon_{bj}^{n+1} = \frac{1 + \gamma_j}{2} \varepsilon_{bj-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1 - \gamma_j}{2} \varepsilon_{bj+\frac{1}{2}}^{n+1}.$

在第二步的计算中,为了求出 T_e 、 T_i 、 B ,也还需要进行迭代.

§ 4. 能流的数值计算公式

在这组方程的连接条件中,我们知道

$$F_1 \equiv K_{11} \frac{\partial T_e}{\partial r} + K_{12} \frac{\partial H}{\partial r},$$

$$F_2 \equiv K_{21} \frac{\partial T_e}{\partial r} + K_{22} \frac{\partial H}{\partial r}$$

为连续,这里

$$K_{11} = f_e K_{\perp}^e, \quad K_{12} = \frac{C \beta_{\lambda}^{nT} T_e}{4\pi e \bar{n}_e \rho},$$

$$K_{21} = \frac{\beta_{\lambda}^{nT}}{e \bar{n}_e \rho}, \quad K_{22} = \frac{C a_{\perp}}{4\pi (e \bar{n}_e \rho)^2 r}.$$

在界面 i 处,它们为连续的,差分近似为

$$K_{1ij}^+ \frac{T_{ei+\frac{1}{2}} - T_{ei}}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} + K_{12j}^+ \frac{H_{i+\frac{1}{2}} - H_i}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} = K_{1ij}^- \frac{T_{ei} - T_{ei-\frac{1}{2}}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} + K_{12j}^- \frac{H_i - H_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}},$$

$$K_{21j}^+ \frac{T_{ej+\frac{1}{2}} - T_{ej}}{\Delta r_{j+\frac{1}{2}}} + K_{22j}^+ \frac{H_{j+\frac{1}{2}} - H_j}{\Delta r_{j+\frac{1}{2}}} = K_{21j}^- \frac{T_{ej} - T_{ej-\frac{1}{2}}}{\Delta r_{j-\frac{1}{2}}} + K_{22j}^- \frac{H_j - H_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta r_{j-\frac{1}{2}}}.$$

这里字母右上角的“+”、“-”分别表示界面 j 右侧与左侧的量。经计算,可得公式

$$\begin{aligned} F_{1j} &= \bar{K}_{11j} (T_{ej+\frac{1}{2}} - T_{ej-\frac{1}{2}}) + \bar{K}_{12j} (H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}), \\ F_{2j} &= \bar{K}_{21j} (T_{ej+\frac{1}{2}} - T_{ej-\frac{1}{2}}) + \bar{K}_{22j} (H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{K}_{11j} &= \frac{1}{2\Delta_{0j}} (\bar{K}_{11j}^+ \Delta_j^- + \bar{K}_{11j}^- \Delta_j^+), \\ \bar{K}_{12j} &= \frac{1}{2\Delta_{0j}} (\bar{K}_{12j}^+ \Delta_j^- + \bar{K}_{12j}^- \Delta_j^+), \\ \bar{K}_{21j} &= \frac{1}{2\Delta_{0j}} (\bar{K}_{21j}^+ \Delta_j^- + \bar{K}_{21j}^- \Delta_j^+), \\ \bar{K}_{22j} &= \frac{1}{2\Delta_{0j}} (\bar{K}_{22j}^+ \Delta_j^- + \bar{K}_{22j}^- \Delta_j^+), \\ \Delta_{0j} &= \begin{vmatrix} \tilde{K}_{11j} & \tilde{K}_{12j} \\ \tilde{K}_{21j} & \tilde{K}_{22j} \end{vmatrix}, \quad \Delta_j^+ = \begin{vmatrix} \bar{K}_{11j}^+ & \bar{K}_{12j}^+ \\ \bar{K}_{21j}^+ & \bar{K}_{22j}^+ \end{vmatrix}, \\ \Delta_j^- &= \begin{vmatrix} \bar{K}_{11j}^- & \bar{K}_{12j}^- \\ \bar{K}_{21j}^- & \bar{K}_{22j}^- \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\bar{K}_{\alpha\beta j}^\pm = K_{\alpha\beta j}^\pm / \Delta r_{j\pm\frac{1}{2}}, \quad \tilde{K}_{\alpha\beta j} = \frac{1}{2} (\bar{K}_{\alpha\beta j}^+ + \bar{K}_{\alpha\beta j}^-),$$

$$K_{\alpha\beta j}^\pm = K_{\alpha\beta}(r_j, T_{ej}, B_j, \rho_j^\pm, \bar{n}_{ej\pm\frac{1}{2}}, \bar{n}_{ij\pm\frac{1}{2}}), \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

有时,我们需要界面 j 处的 T_e 和 H 之值,它们有相应的计算公式

$$T_{ej} = \frac{\Delta_{ej}}{2\Delta_{0j}} T_{ej-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\Delta_{ej}}{2\Delta_{0j}}\right) T_{ej+\frac{1}{2}} + \frac{\delta_{2j}}{2\Delta_{0j}} (H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}),$$

$$H_j = \frac{\Delta_{rj}}{2\Delta_{0j}} H_{j-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\Delta_{rj}}{2\Delta_{0j}}\right) H_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta_{1j}}{2\Delta_{0j}} (T_{ej+\frac{1}{2}} - T_{ej-\frac{1}{2}}),$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_{rj} &= \begin{vmatrix} \tilde{K}_{11j} & \bar{K}_{12j}^- \\ \tilde{K}_{21j} & \bar{K}_{22j}^- \end{vmatrix}, \quad \Delta_{ej} = \begin{vmatrix} \bar{K}_{11j}^- & \tilde{K}_{12j} \\ \bar{K}_{21j}^- & \tilde{K}_{22j} \end{vmatrix}, \\ \delta_{1j} &= \begin{vmatrix} \tilde{K}_{11j} & \bar{K}_{11j}^+ \\ \tilde{K}_{21j} & \bar{K}_{21j}^+ \end{vmatrix}, \quad \delta_{2j} = \begin{vmatrix} \bar{K}_{12j}^+ & \tilde{K}_{12j} \\ \bar{K}_{22j}^+ & \tilde{K}_{22j} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

如果 F_1 、 F_2 退化为 $F_1 = K_{11} \frac{\partial T_e}{\partial r}$, $F_2 = K_{22} \frac{\partial B}{\partial r}$, 上述公式就退化为通常计算一维热传导时的能流计算公式。实际计算表明,这组公式是可行的,能流在界面的变化符合预先的设想。

§ 5. 计算结果

该程序在电子计算机上进行了不少的计算, 计算结果表明, 其物理图象是合理的。这里以一个简化的热斑模型为例, 说明计算结果。该模型为柱一维的玻璃介质系统, 其初始密度、初始电子温度和初始磁场的分布如图 A-I 所示。图 A-II 和 A-III 是在上述条件下对方程(2.1)–(2.5)进行计算的两个不同时刻的结果。图 B 是没有磁场的结果。比较图 A 和 B, 可以明显地看到, 由于磁场的作用, 电子传热受阻的情况。从图 A 还可看到, 随着流体团向外运动和膨胀, 磁场分布变宽峰值下降, 这就是所谓磁力线冻结效应。在这种情况下, 这是主要的效应。

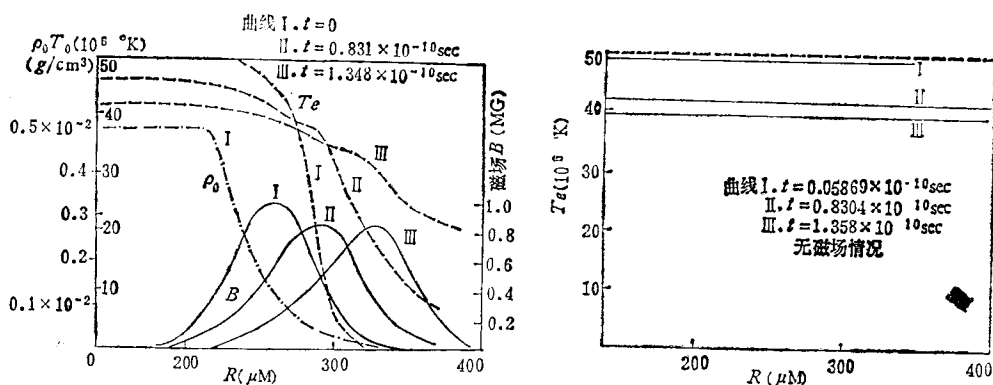


图 A

图 B

本结果是在速度为 70 万次/sec 的计算机上计算的, 有磁场时, 计算到 $t = 1.348 \times 10^{-10}$ sec, 约需 150 分钟, $\overline{\Delta t} \approx 0.5 \times 10^{-13}$ sec; 无磁场时, 计算到 $t = 1.358 \times 10^{-10}$ sec, 约需 90 分钟, $\overline{\Delta t} \approx 0.8 \times 10^{-13}$ sec (从误差看出, 无磁场的情况下, 时间步长还可以放大)。这种差别及计算中的困难主要是温差电动势项造成的, 即磁场方程中 $\beta^{*T} \frac{\partial T_e}{\partial r}$ 项造成的, 若时间步长过大, 此项容易导致磁场计算出负。给出较光滑的电子温度 T_e 分布和密度 ρ 分布, 或将电子温度方程和磁场方程用矩阵追赶迭代求解, 可以改善这种情况。

参 考 文 献

- [1] K. V. Roberts, D. E. Potter, Magnetohydrodynamic Calculations, Methods in Computational Physics, Vol 9 (1970), 339.
- [2] J. V. Brackbill, Numerical Magnetohydrodynamics for High-Beta plasma, Methods in Computational Physics, Vol. 16 (1976), p1.
- [3] G. Zimmerman et al., The LASNEX for inertial Confinement fusion, UCRL 80169 (1977).
- [4] J. P. Boris, A physically Motivated Solution of the Alfvén Problem, Memo. Rep., 1970, No. 2167.
- [5] C. W. Hirt, A. A. Amsden, J. I. Cook, An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all Flow Speeds, J. Comput. Phys., 14 (1974), 227–253.