

基于组合杂交变分原理的 4 节点轴对称元*

尹云辉

(西安理工大学理学院计算数学系 西安 710048)

聂玉峰

(西北工业大学理学院应用数学系 西安 710072)

摘 要

本文基于组合杂交变分原理推导四节点的轴对称元, 并依据能量协调条件, 导出含有 8 个参数的轴对称应力模式. 其优越性能突出表现在离散模型对于计算背景 (如单元畸变和材料的不可压缩性等) 的广泛适应性. 数值算例结果表明, 该轴对称元位移和应力明显优于其它的轴对称元.

关键词: 组合杂交元, 轴对称, 高性能, 能量协调, 优化

FOUR-NODE AXISYMMETRIC ELEMENT BASED UPON COMBINED HYBRID FUNCTIONAL

Yin Yunhui

(*Applied Mathematics Department, Xi'an University of Technology, Xi'an . 710048*)

Nie Yufeng

(*Applied Mathematics Department, Northwestern Polytechnical University, Xi'an. 710072*)

Abstract

A new four-node axisymmetric element is derived based on the combined hybrid variational principle. After the energy compatibility condition is applied to the linear stress with Wilson's bubble, a hybrid scheme of high performance using eight parameter stress fields is achieved. The resulting elements exhibit excellent performance at nearly incompressible limit and distortions of the element geometry. Example problems all indicate that the new elements lead to better results in displacements and stresses than the other schemes.

Key words: combined hybrid method, axisymmetric, high performance, energy compatibility, optimization

§0. 引 言

如何确定单元的应力模式是建立高性能杂交元格式的关键之一. 建立一套简单、有效、系统的方法, 对于进一步发展、推广杂交元的理论和方法是非常必要的.

* 2003 年 9 月 5 日收到.

关于轴对称问题, Spilker^[1,2] 通过一系列应力假设的数值实验, 经验地提出了一些可行的单元应力模式, 但是数值经验性太强, 而且应力形函数必须满足力平衡方程, 条件太强. 田宗濂和卞学镛将力平衡方程通过 Lagrange 乘子法引入变分原理^[3], 这样力平衡方程只需要在积分的意义下满足, 并且将文献 [4] 中建议的方法扩展应用于轴对称问题, 给出了一组新的轴对称杂交应力元. 这组元的不足之处在于对不同网格互不通用. 吴长春、狄生林和卞学镛将杂交元的优化列式应用于轴对称问题^[5], 给出了优化的应力模式. 这组轴对称杂交应力元不需要借助于摄动处理, 计算精度也高于其它的杂交应力元, 但是这些杂交应力元都必须验证 inf-sup 条件.

周天孝提出了组合杂交变分原理^[6], 它由基于区域分解的 Hellinger-Reissner 变分原理及其对偶变分原理的优化条件加权组合得到的. 该变分原理的特点是对变分原理本身及其有限元离散皆不需要满足任何形式 inf-sup 条件^[7]. 文献 [7] 还给出了能量协调条件. 这个方法已经被应用于平面应力元和六面体元^[8,9]. 大量数值实验和分析证明: 能量协调成为杂交元格式应力选择的优化条件. 本文就是基于组合杂交变分原理, 依据能量协调条件, 选择应力模式, 进而得到优化的轴对称有限元格式.

§1. 轴对称问题的能量协调条件

对于轴对称线弹性力学问题, 有如下组合杂交变分原理:

求 $(u, \sigma) = (u_c + u_T, \sigma) \in U \times V$, 使得

$$\alpha a(\sigma, \tau) - \alpha b_2(\tau, u) + b_1(\tau, u_1) = 0, \quad \forall \tau \in V, \quad (1)$$

$$\alpha b_2(\sigma, v) - b_1(\sigma, v_1) + (1 - \alpha)d(u, v) = (f, v), \quad \forall v = v_c + v_1 \in U. \quad (2)$$

其中能量泛函表述如下:

$$a(\sigma, \tau) = 2\pi \int_{\Omega} \sigma \cdot D^{-1}[\tau] r dr dz, \quad d(u, v) = 2\pi \sum_{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \varepsilon(u) \cdot D[\varepsilon(v)] r dr dz.$$

$$b_1(\tau, v) = 2\pi \sum_{\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_i} (\tau \cdot n) \cdot v r ds, \quad b_2(\tau, v) = 2\pi \sum_{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \tau \cdot \varepsilon(v) r dr dz.$$

$\partial\Omega_i$ 是单元 Ω_i 的边界, n 是边界 $\partial\Omega_i$ 的单位外法向向量. 应力 σ , 应变 ε 和材料弹性模量矩阵 D 分别为

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix},$$

$$D = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 & v \\ v & 1-v & 0 & v \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2v) & 0 \\ v & v & 0 & 1-v \end{bmatrix}.$$

位移 u 为协调部分 u_c 和非协调部分 u_I 之和

$$u = u_c + u_I. \quad (3)$$

能量协调条件的数学表达形式是

$$2\pi \oint_{\partial\Omega_i} (\tau \cdot n) \cdot v_I r ds = 0. \quad (4)$$

利用 Green 公式得

$$2\pi \oint_{\partial\Omega_i} (\tau \cdot n) \cdot v_I r ds = 2\pi \left(\int_{\Omega_i} \tau \cdot \varepsilon(\mathbf{v}_I) r dr dz + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \tau \cdot v_I r dr dz \right).$$

于是, 轴对称问题的能量协调条件为

$$\int_{\Omega_i} (t \cdot \varepsilon(v_I) + \operatorname{div} \tau \cdot v_I) r dr dz = 0. \quad (5)$$

§2.4 节点轴对称问题的应力模式

对于截面是四边形的旋转体元, 单元协调位移采用双线性插值函数

$$u_c = \begin{Bmatrix} u_{cr} \\ u_{cz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \begin{Bmatrix} u_{ri} \\ u_{zi} \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

为改善双线性函数的逼近性能, 对 (6) 式叠加 Wilson 非协调函数

$$u_I = \begin{Bmatrix} u_{Ir} \\ u_{Iz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 - \xi^2)q_1 + (1 - \eta^2)q_2 \\ (1 - \xi^2)q_3 + (1 - \eta^2)q_4 \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

这样, 单元位移试解 (3) 式成为 ξ 和 η 的完备二次多项式, 相应的单元应力试解为 ξ 和 η 的完备一次多项式, 记为

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

ξ 和 η 是参考单元的坐标, (ξ_i, η_i) 是参考单元第 i 个顶点的坐标 (图 1), u_{ri} 和 u_{zi} 分别是物理单元第 i 个顶点的径向、轴向位移。

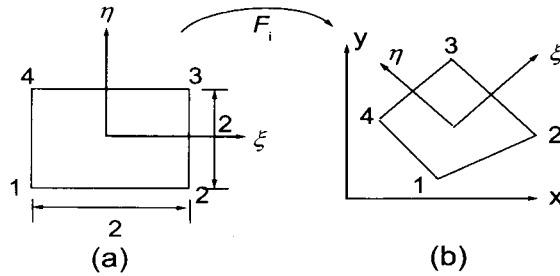


图 1

双线性等参变换 F_i 可表示为

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta \\ b_1 + b_2 \xi + b_3 \eta + b_4 \xi \eta \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

其中 r_i 和 z_i 分别是物理单元第 i 个节点的坐标.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ r_3 & z_3 \\ r_4 & z_4 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

双线性等参变换的 Jacobian 矩阵是

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_4 \eta & b_2 + b_4 \eta \\ a_3 + a_4 \xi & b_3 + b_4 \xi \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Jacobian 行列式值是

$$|J| = j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta = (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_2 b_4 - a_4 b_2) \xi + (a_4 b_3 - a_3 b_4) \eta. \quad (12)$$

将 (6)~(12) 式代入 (5) 式, 计算得

$$\int_{\Omega_i} (\tau \cdot \varepsilon(v_I) + \text{div} \tau \cdot v_I) r dr dz = \beta^T M q = 0, \quad (13)$$

$$M^T = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 & C_7 & C_8 & C_9 & 0 & 0 & 0 \\ C_4 & C_5 & C_6 & 0 & 0 & 0 & C_{10} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_7 & C_8 & C_9 & C_1 & C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_4 & C_5 & C_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中

$$C_1 = -\frac{8}{3}(a_3 b_2 + a_1 b_4), \quad C_2 = -\frac{8}{15}(a_2 b_4 + a_4 b_2), \quad C_3 = -\frac{8}{3}(a_1 b_2 + a_3 b_4), \\ C_4 = \frac{8}{3}(a_2 b_3 + a_1 b_4), \quad C_5 = \frac{8}{3}(a_1 b_3 + a_2 b_4), \quad C_6 = \frac{8}{15}(a_3 b_4 + a_4 b_3),$$

$$C_7 = \frac{8}{3}(a_3a_2 + a_1a_4), \quad C_8 = \frac{16}{15}a_2a_4, \quad C_9 = \frac{8}{3}(a_1a_2 + a_3a_4),$$

$$C_{10} = -\frac{8}{3}(a_2a_3 + a_1a_4), \quad C_{11} = -\frac{8}{3}(a_1a_3 + a_2a_4), \quad C_{12} = -\frac{16}{15}a_3a_4.$$

由 (13) 式中 q 的任意性有 $M^T\beta = 0$, 解之得

$$\begin{Bmatrix} \beta_2 \\ \beta_6 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = M_1^{-1}M_2 \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \\ \beta_5 \\ \beta_7 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

其中

$$M_1 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & C_8 & C_9 \\ C_5 & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_9 & C_2 & C_3 \\ 0 & C_{12} & C_5 & C_6 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -C_1 & -C_3 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_4 & -C_6 & 0 & 0 & -C_{10} \\ 0 & 0 & -C_7 & -C_8 & -C_1 \\ 0 & 0 & -C_{10} & -C_{11} & -C_4 \end{bmatrix}.$$

将 (15) 式代入 (8) 式, 即得到如下满足能量协调条件的含有 8 个参数的应力模式, 称之为 $ACH8\beta$.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_5 & 0 \\ 0 & I_3 \\ M_1^{-1}M_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_8 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

当截面为矩形的旋转体元, 作为上面优化结果的特例, 有

$$\begin{cases} \sigma_r = \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\xi\right)\beta_1 + \beta_2\eta, \\ \sigma_z = \beta_3 + \beta_4\xi, \\ \sigma_{rz} = \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\xi\right)\beta_5, \\ \sigma_\theta = \beta_6 + \beta_7\xi + \beta_8\eta. \end{cases} \quad (17)$$

§3. 数值算例

3.1 内压 p 作用下的厚壁圆筒

图 2 为内压 p 作用下的厚壁圆筒算例. 表 1 中给出了位移法 (即轴对称双线性等参元) 和各种轴对称杂交元解的误差百分比 (包括完全线性插值的 $LH12\beta$, 优化的杂交元应力模式 $OH8\beta$ ^[5]). 数据表明, 本文应力模式优于其它方法. 表 2 反映了单元对于材料不可压缩性的适应情况, 表中数据为圆筒内表面处的位移和单元形心点 A 处应力解. 由此可见, 当材料泊

松比 $\nu \rightarrow 0.5$ 时, 双线性等参元出现自锁现象, 杂交元方法均不发生自锁现象, 位移和应力解都十分稳定.

图 3 中的算例是为了考察单元畸变对位移和应力数值解的影响而设置的 [5]. 图 4. 图 5 分别为圆筒内表面处的径向位移和单元形心点 A 径向应力随单元的形状畸变系数 e 变化的情况. 由图可以看出, 杂交元对于网格畸变影响的敏感度比位移法等参元低得多, 并且本文的轴对称元敏感度是最低的, 位移误差不超过 1%, 应力误差不超过 2%.

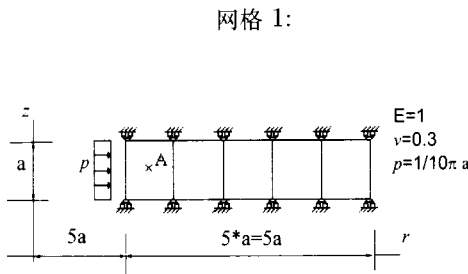


图 2

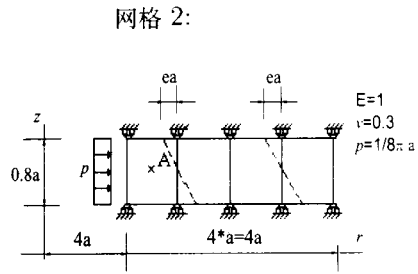


图 3

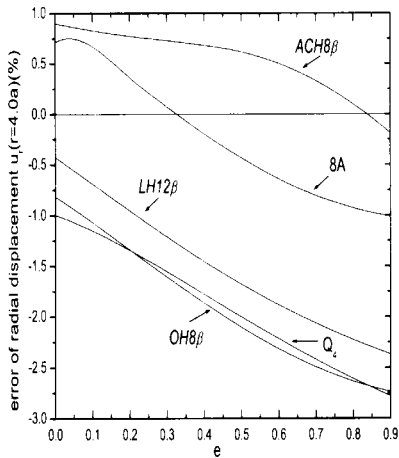


图 4

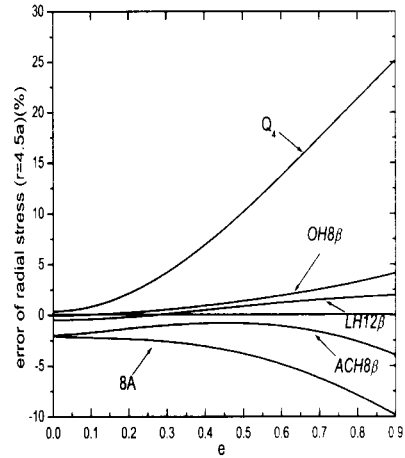


图 5

3.2 内压 p 作用下的厚壁圆球

图 6 为内压 p 作用下的厚壁圆球算例 [3]. 表 3 中给出了 26.25° 时位移法和各种轴对称杂交元解的误差百分比 (8A 是文献 [3] 中的轴对称杂交元). 表中的数据看出, 由本文的轴对称元 $ACH8\beta$ 得到的径向应力 σ_r 和切向应力 σ_T 的解精度最高, 误差不超过 2%*.

* 注. 本文 $ACH8\beta$ 元所有数据均是 α 取 0.5 计算得到的.

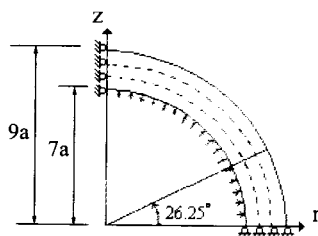


图 6

§4. 结 论

本文把能量协调的思想成功地应用于弹性力学轴对称问题。文中推导的 $ACH8\beta$ 元具有较好的数值精度和性能，它适用于规则和不规则网格，不发生 Poisson 闭锁，对单元畸变影响的敏感度小。

表 1

	位移法	$LH12\beta$	$OH8\beta$	$ACH8\beta$
$\sigma_r : r =$				
$\left\{ \begin{array}{l} 5.5a \\ 6.5a \\ 7.5a \\ 8.5a \\ 9.5a \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0.41 \\ 0.00 \\ -1.20 \\ -2.44 \\ -9.09 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1.63 \\ -2.76 \\ -4.82 \\ -7.32 \\ -18.18 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0.82 \\ -4.12 \\ -4.82 \\ -4.88 \\ -9.09 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1.22 \\ -1.38 \\ 1.20 \\ 0.00 \\ 9.09 \end{array} \right.$
$\sigma_z : r =$				
$\left\{ \begin{array}{l} 5.5a \\ 6.5a \\ 7.5a \\ 8.5a \\ 9.5a \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1.56 \\ -1.56 \\ -1.56 \\ -1.56 \\ -1.56 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 9.38 \\ 6.25 \\ 6.25 \\ 4.69 \\ 4.69 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 7.81 \\ 4.69 \\ 1.56 \\ 1.56 \\ 1.56 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1.56 \\ -1.56 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{array} \right.$
$\sigma_\theta : r =$				
$\left\{ \begin{array}{l} 5.5a \\ 6.5a \\ 7.5a \\ 8.5a \\ 9.5a \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0.20 \\ 0.00 \\ -0.34 \\ -0.40 \\ -0.89 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 3.50 \\ 3.64 \\ 3.39 \\ 3.56 \\ 3.12 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1.31 \\ 1.4 \\ 1.02 \\ 1.19 \\ 0.89 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.00 \\ 0.28 \\ 0.34 \\ 0.40 \\ 0.45 \end{array} \right.$
$u_r : r =$				
$\left\{ \begin{array}{l} 5.0a \\ 6.0a \\ 7.0a \\ 8.0a \\ 9.0a \\ 10.0a \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1.66 \\ -1.60 \\ -1.57 \\ -1.56 \\ -1.51 \\ -1.50 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1.68 \\ 1.98 \\ 2.21 \\ 2.40 \\ 2.61 \\ 2.69 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1.65 \\ 1.52 \\ 1.40 \\ 1.39 \\ 1.38 \\ 1.29 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.82 \\ 0.99 \\ 1.10 \\ 1.15 \\ 1.23 \\ 1.24 \end{array} \right.$

表 2

($\times 10^{-2}$)	$\nu = 0.49$				$\nu = 0.499$				$\nu = 0.4999$			
	$u_r = 5$	σ_r	σ_z	σ_θ	$u_r = 5$	σ_r	σ_z	σ_θ	$u_r = 5$	σ_r	σ_z	σ_θ
位移法	28.78	-2.00	1.17	4.40	15.71	0.07	1.81	3.56	2.83	2.10	2.41	2.73
LH12 β	31.71	-2.27	1.23	4.78	31.68	-2.28	1.24	4.77	31.57	-2.43	1.09	4.61
OH8 β	31.57	-2.44	1.08	4.63	31.58	-2.43	1.09	4.62	31.39	-2.44	1.07	4.58
ACH8 β	32.02	-2.48	1.02	4.56	32.09	-2.48	1.04	4.56	32.08	-2.48	1.04	4.56
精确解	31.78	-2.45	1.04	4.57	31.83	-2.45	1.06	4.57	31.83	-2.45	1.06	4.57

表 3

	ACH8 β	8A	位移法
$\sigma_r : r = \begin{cases} 7.334a \\ 8.001a \\ 8.668a \end{cases}$	-0.15	-1.13	-2.58
	0.55	-1.77	-3.75
	1.97	-4.73	-9.58
$\sigma_T : r = \begin{cases} 7.334a \\ 8.001a \\ 8.668a \end{cases}$	-0.05	0.23	-0.10
	-0.14	0.01	-0.20
	0.24	0.00	-0.26

参 考 文 献

- [1] R. L. Spilker. T. H. H. Pian, A study of axisymmetric solid of revolution elements based on assumed stress hybrid model, Computers & Structure, 9(1978) 273-279.
- [2] R. L. Spilker, Improved hybrid-stress axisymmetric elements including behavior for nearly incompressible materials, International Journal for numerical methods in engineering, 17(1981) 483-501.
- [3] ZongShu Tian. T. H. H. Pian, Axisymmetric solid elements by a rational hybrid stress method. Computers & Structures, 20(1985) 141-149.
- [4] T. H. H. Pian. k. Sumihara. Rational approach for assumed stress and displacement. Finite Elements in Analysis and Design, 1(1983) 131-140.
- [5] 吴长春, 狄生林, 卞学锁, 轴对称杂交应力元的优化列式, 航空学报, 8:9(1987) A439-A448.
- [6] Zhou T. X, Finite element method based on combination of "saddle point" variational formulations, Science in China (Ser. E), 40(1997) 285-300
- [7] Zhou T. X, combined hybrid finite element method without requirement for Babuska-Brezzi condition, Math. Comput., 72(2003) 1655-1673
- [8] Zhou T. X. Nie Y. F., A combined hybrid approach to finite element schemes of high performance. Inter.. J. Number. Meth. Engng, 51(2001) 181-202
- [9] 聂玉峰, 周天孝, 高性能八节点六面体组合杂交元, 数值计算与计算机应用, 24:3(2003) 231-240