基 3 离散余弦变换快速算法*1)

曾泳泓

（长沙国防科技大学七系）

RADIX 3 FAST ALGORITHMS FOR DCT

Zeng Yong-hong

(7 th Department, National University of Defense Technology)

Abstract

This paper proposes an algorithm for DCT-II of length 3^l. It needs $\frac{4}{3}l3^l - 3^l$ multiplications and $\frac{8}{3}l3^l - \frac{5}{3}\cdot 3^l + 1$ additions. Also, an algorithm for DCT-I of length 3^l is proposed with the cost of $\frac{4}{3}l3^l - 2\cdot 3^l + 2$ multiplications and $\frac{11}{3}l3^l - 3\cdot 3^l + 3$ additions. By turning IDCT-II into DCT-I, an algorithm for IDCT-II of length 3^l is obtained and its operations are $\frac{4}{3}l3^l - 3^l + 1$ multiplications and $\frac{11}{3}l3^l - 2\cdot 3^l + 2$ additions.

一、引　言

在信号和图像处理中，离散余弦变换（DCT）是除离散傅里叶变换（DFT）之外应用得最广泛的一种变换．促使离散余弦变换的广泛应用主要有两个原因：其一，离散余弦变换有趋于统计最佳变换 Karhunen-Loeve 变换（KLT）的渐近性质，而且比 DFT 逼近程度更好．在许多实际应用中，如在变换域内作最小均方（LMS）自适应滤波，DCT 比 DFT 更好．所以，在有些领域 DCT 已取代 DFT．其二，离散余弦变换的快速算法研究取得了较大进展．对长度为 2 的幂的变换，其快速算法运算量比 DFT 少，处理速度比 DFT 更快，这使适时处理成为可能．离散余弦变换的核没有 DFT 的核那种分离性质，构造快速算法难度更大．到目前为止，对长度不是 2 的幂的 DCT 快速算法研究很少，作者在[1]中首先提出了长度为 p^l（p 为任何自然数）的 DCT-II 的快速算法的一

* 1991 年 10 月 26 日收到．

1）国防八五预研基金资助课题．

般构造方法。本文具体研究了长度为 3^l 的 DCT-II 的快速算法。还提出了 DCT-I 及 IDCT-II 的快速算法。

二、DCT-II 的快速算法

设 $x(k)$ $(k=0,1,\cdots,3^l-1)$ 为实序列，其 II 型离散余弦变换 DCT-II 定义为

$$X(n)=\sum_{k=0}^{3^l-1}x(k)\cos\frac{\pi(2k+1)n}{2\cdot 3^l},\quad n=0,1,\cdots,3^l-1.$$

令 $C_u(i)=X(3i+u)$. $u=0,1,2$; $i=0,1,\cdots,3^{l-1}-1$. 显然，只要计算出 $C_u(i)$ 便可得到 $X(n)$.

$$\begin{aligned}C_0(i)=X(3i)&=\sum_{k=0}^{3^l-1}x(k)\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}}\\
&=\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}x(k)\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}}+\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}x(2\cdot 3^{l-1}-1-k)\\
&\quad\cdot\cos\frac{\pi(2(2\cdot 3^{l-1}-1-k)+1)i}{2\cdot 3^{l-1}}+\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}x(2\cdot 3^{l-1}+k)\\
&\quad\cdot\cos\frac{\pi(2(2\cdot 3^{l-1}+k)+1)i}{2\cdot 3^{l-1}}\\
&=\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}(x(k)+x(2\cdot 3^{l-1}-1-k)\\
&\quad+x(2\cdot 3^{l-1}+k))\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}}.\end{aligned}$$

令 $d_0(k)=x(k)+x(2\cdot 3^{l-1}-1-k)+x(2\cdot 3^{l-1}+k)$，则

$$C_0(i)=\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}d_0(k)\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}},\quad i=0,1,\cdots,3^{l-1}-1.$$

这是长度为 3^{l-1} 的 DCT-II.

令 $D_u(i)=C_u(i)+C_{3-u}(i-1)$，$u=1,2$. 则

$$\begin{aligned}D_u(i)&=\sum_{k=0}^{3^l-1}x(k)\left[\cos\frac{\pi(2k+1)(3i+u)}{2\cdot 3^l}+\cos\frac{\pi(2k+1)(3i-u)}{2\cdot 3^l}\right]\\
&=\sum_{k=0}^{3^l-1}2x(k)\cos\frac{\pi(2k+1)u}{2\cdot 3^l}\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}}\\
&=\sum_{k=0}^{3^l-1}x_u(k)\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}},\end{aligned}$$

其中 $x_u(k)=2x(k)\cos\dfrac{\pi(2k+1)u}{2\cdot 3^l}$. 类似于上面的推导，可知

$$D_u(i)=\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}d_u(k)\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}},\quad i=0,1,\cdots,3^{l-1}-1;u=1,2.$$

这是长度为 3^{l-1} 的 DCT-II，其中

$$\begin{aligned}
d_u(k) &= x_u(k) + x_u(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) + x_u(2\cdot 3^{l-1} + k) \\
&= 2x(k)\cos\frac{\pi(2k+1)u}{2\cdot 3^l} + 2x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) \\
&\quad \cdot \cos\left(\frac{2\pi u}{3} - \frac{\pi(2k+1)u}{2\cdot 3^l}\right) + 2x(2\cdot 3^{l-1} + k) \\
&\quad \cdot \cos\left(\frac{2\pi u}{3} + \frac{\pi(2k+1)u}{2\cdot 3^l}\right).
\end{aligned}$$

根据三角公式展开并化简可得

$$\begin{aligned}
d_u(k) = &\left[x(k) + (x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) + x(2\cdot 3^{l-1} + k))\cos\frac{2\pi u}{3}\right] \\
&\cdot 2\cos\frac{\pi(2k+1)u}{2\cdot 3^l} + (x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) - x(2\cdot 3^{l-1} + k)) \\
&\cdot 2\sin\frac{2\pi u}{3}\sin\frac{\pi(2k+1)u}{2\cdot 3^l}.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
d_1(k) = &[2x(k) - (x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) + x(2\cdot 3^{l-1} + k))]\cos\frac{\pi(2k+1)}{2\cdot 3^l} \\
&+ (x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) - x(2\cdot 3^{l-1} + k))\sqrt{3}\sin\frac{\pi(2k+1)}{2\cdot 3^l}, \\
d_2(k) = &[2x(k) - (x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) + x(2\cdot 3^{l-1} + k))]\cos\frac{\pi(2k+1)}{3^l} \\
&- (x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) - x(2\cdot 3^{l-1} + k))\sqrt{3}\sin\frac{\pi(2k+1)}{3^l}, \\
&\qquad k = 0, 1, \cdots, 3^{l-1} - 1.
\end{aligned}$$

计算 $d_u(k)(k = 0, 1, \cdots, 3^{l-1} - 1; u = 0, 1, 2)$ 的过程为

$$\begin{aligned}
&t_1(k) = x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) + x(2\cdot 3^{l-1} + k), \\
&t_2(k) = x(2\cdot 3^{l-1} - 1 - k) - x(2\cdot 3^{l-1} + k), \\
&t_3(k) = 2x(k) - t_1(k), \\
&d_0(k) = x_0(k) + t_1(k), \\
&d_1(k) = t_3(k)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2\cdot 3^l} + t_2(k)\sqrt{3}\sin\frac{\pi(2k+1)}{2\cdot 3^l}, \\
&d_2(k) = t_3(k)\cos\frac{\pi(2k+1)}{3^l} - t_2(k)\sqrt{3}\sin\frac{\pi(2k+1)}{3^l}, \\
&k = 0, 1, \cdots, 3^{l-1} - 1.
\end{aligned}$$

共需 $6\cdot 3^{l-1}$ 个加法和 $4\cdot 3^{l-1}$ 个乘法。

这样，长度为 3^l 的 DCT-II 转化成 3 个长为 3^{l-1} 的 DCT-II 的计算。若 $l > 2$，对长为 3^{l-1} 的 DCT-II 可继续利用上述方法计算，从而得到一个递归算法。若三个 3^{l-1} 点的 DCT-II 已求出，可用下述方法求出 $C_u(i)$：

由于 $C_1(0)=C_2(-1),C_2(0)=C_1(-1)$，而 $D_u(i)=C_u(i)+C_{3-u}(i-1)$，$u=1,2$,所以

$$C_1(0)=D_1(0)/2,\ C_2(0)=D_2(0)/2.$$

把上两式作为初始条件，利用迭代

$$\begin{cases}C_1(i)=D_1(i)-C_2(i-1),\\ C_2(i)=D_2(i)-C_1(i-1),\ i=1,2,\cdots,3^{l-1}-1,\end{cases}$$

可求出全部 $C_1(i)$ 和 $C_2(i)$。这个过程的计算量为 $2\cdot 3^{l-1}-2$ 个加法。

若用 $M_1(N)$ 和 $A_1(N)$ 分别表示N点 DCT-II 所需的乘法和加法，根据上述算法有

$$M_1(3^l)=3M_1(3^{l-1})+4\cdot 3^{l-1},$$
$$A_1(3^l)=3A_1(3^{l-1})+8\cdot 3^{l-1}-2.$$

把上述过程递归使用到长度为 3 时为止，有

$$M_1(3^l)=3^{l-1}M_1(3)+4(l-1)3^{l-1},$$
$$A_1(3^l)=8(l-1)3^{l-1}+3^{l-1}A_1(3)-3^{l-1}+1.$$

对 3 点余弦变换，有

$$X(0)=x(0)+x(1)+x(2),$$
$$X(1)=(x(0)-x(2))\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$X(2)=(x(0)+x(2))/2-x(1).$$

若不计移位，直接计算上式只需 4 个加法和 1 个乘法，即 $M_1(3)=1$，$A_1(3)=4$。因此，

$$M_1(3^l)=\frac{4}{3}l3^l-3^l,$$

$$A_1(3^l)=\frac{8}{3}l3^l-\frac{5}{3}\cdot 3^l+1.$$

上述算法可简述为三步：

步 1. 计算 $d_0(k)$，$d_1(k)$ 和 $d_2(k)$，$k=0,1,\ \cdots,\ 3^{l-1}-1$，其计算过程前面已给出。

步 2. 分别计算序列 $d_u(k)(u=0,1,2)$ 的长度为 3^{l-1} 的 DCT-II

$$C_0(i)=\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}d_0(k)\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}},$$

$$D_u(i)=\sum_{k=0}^{3^{l-1}-1}d_u(k)\cos\frac{\pi(2k+1)i}{2\cdot 3^{l-1}},\ u=1,2,i=0,1,\cdots,3^{l-1}-1.$$

步 3. 由递推式

$$\begin{cases}C_1(0)=D_1(0)/2,\ C_2(0)=D_2(0)/2,\\ C_1(i)=D_1(i)-C_2(i-1),\ C_2(i)=D_2(i)-C_1(i-1),\\ i=1,2,\cdots,3^{l-1}-1.\end{cases}$$

求出 $C_1(i)$ 和 $C_2(i)$。

若 $l>2$，对步 2 的计算可重复上述过程。

三、DCT-I 的计算

序列 $x(n)(n=0,1,\cdots,3^l-1)$ 的 DCT-I 定义为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3^l-1}x(n)\cos\frac{\pi nk}{3^l},\ k=0,1,\cdots,3^l-1.$$

令 $C_u(k)=X(3k+u)$，$u=0,1,2$，则只要计算出 $C_u(k)$ 便可得到 $X(k)$.

$$\begin{aligned}C_0(k)&=\sum_{n=0}^{3^l-1}x(n)\cos\frac{\pi nk}{3^{l-1}}\\&=\sum_{n=0}^{3^{l-1}-1}x(n)\cos\frac{\pi nk}{3^{l-1}}+\sum_{n=1}^{3^{l-1}}x(2\cdot3^{l-1}-n)\cos\frac{\pi(2\cdot3^{l-1}-n)k}{3^{l-1}}\\&\quad+\sum_{n=0}^{3^{l-1}-1}x(2\cdot3^{l-1}+n)\cos\frac{\pi(2\cdot3^{l-1}+n)k}{3^{l-1}}\\&=\sum_{n=0}^{3^{l-1}-1}d_0(n)\cos\frac{\pi nk}{3^{l-1}}+(-1)^kx(3^{l-1}),\end{aligned}$$

其中

$$d_0(n)=\begin{cases}x(0)+x(2\cdot3^{l-1}), & n=0,\\ x(n)+x(2\cdot3^{l-1}-n)+x(2\cdot3^{l-1}+n), & \text{其它}.\end{cases}$$

令 $D_u(k)=C_u(k)+C_{3-u}(k-1)$，$u=1,2$，则

$$D_u(k)=\sum_{n=0}^{3^l-1}\left(2x(n)\cos\frac{\pi nu}{3^l}\right)\cos\frac{\pi nk}{3^{l-1}},\ k=0,1,\cdots,3^{l-1}-1.$$

类似于上面的推导，若令

$$d_u(0)=2x(0)+2x(2\cdot3^{l-1})\cos\frac{2\pi u}{3},$$

$$\begin{aligned}d_u(n)&=2x(n)\cos\frac{\pi nu}{3^l}+2x(2\cdot3^{l-1}-n)\cos\frac{\pi(2\cdot3^{l-1}-n)u}{3^l}\\&\quad+2x(2\cdot3^{l-1}+n)\cos\frac{\pi(2\cdot3^{l-1}+n)u}{3^l},\end{aligned}$$

$$n=1,2,\cdots,3^{l-1}-1,$$

则有

$$D_u(k)=\sum_{n=0}^{3^{l-1}-1}d_u(n)\cos\frac{\pi nk}{3^{l-1}}+(-1)^k2x(3^{l-1})\cos\frac{\pi u}{3},$$

$$k=0,1,\cdots,3^{l-1}-1.$$

这样，一个长为 3^l 的 DCT-I 可用 3 个长 3^{l-1} 的 DCT-I 计算，另外还需一些附加运算，这些附加运算为求出 $d_u(n)$ ($u=0,1,2$; $n=0,1,\cdots,3^{l-1}-1$)，对 $d_u(n)$ 的 DCT-I 作修改(每个元素加上一项)，在计算出 $D_u(n)$ 之后求 $C_u(n)$ ($u=1,2$)。根据三角公式，把 $d_u(n)$ 化简可得到

$$d_1(0)=2x(0)-x(2\cdot3^{l-1}),$$

$$d_1(n) = [2x(n) - (x(2\cdot 3^{l-1}+n) + x(2\cdot 3^{l-1}-n))]\cos\frac{\pi n}{3^l}$$
$$+ (x(2\cdot 3^{l-1}-n) - x(2\cdot 3^{l-1}+n))\sqrt{3}\sin\frac{\pi n}{3^l},$$
$$d_2(0) = 2x(0) - x(2\cdot 3^{l-1}),$$
$$d_2(n) = [2x(n) - (x(2\cdot 3^{l-1}+n) + x(2\cdot 3^{l-1}-n))]\cos\frac{2\pi n}{3^l}$$
$$- (x(2\cdot 3^{l-1}-n) - x(2\cdot 3^{l-1}+n))\sqrt{3}\sin\frac{2\pi n}{3^l}.$$

所以，求出全部 $d_u(n)$ ($u=0,1,2;\ n=0,1,\cdots,3^{l-1}-1$) 只需 $4\cdot 3^{l-1}-4$ 个乘法和 $6\cdot 3^{l-1}-4$ 个加法；对 $d_u(n)$ 的 DCT-I 作修改，共需 $3\cdot 3^{l-1}$ 个加法．在求出 $D_u(k)$ ($k=0,1,\cdots,3^{l-1}-1;u=1,2$) 之后，可由递推公式

$$C_1(0) = D_1(0)/2,\quad C_2(0) = D_2(0)/2,$$
$$C_1(k) = D_1(k) - C_2(k-1),\quad C_2(k) = D_2(k) - C_1(k-1),$$
$$k = 1,2,\cdots,3^{l-1}-1.$$

求出 $C_u(k)$，需要 $2\cdot 3^{l-1}-2$ 个加法．

设 $M_2(3^l)$ 和 $A_2(3^l)$ 分别表示计算 3^l 点 DCT-I 所需乘法和加法数，则有

$$M_2(3^l) = 3M_2(3^{l-1}) + 4\cdot 3^{l-1} - 4,$$
$$A_2(3^l) = 3A_2(3^{l-1}) + 11\cdot 3^{l-1} - 6.$$

递归地进行到长度为 3 时为止，则有

$$M_2(3^l) = 4(l-1)3^{l-1} - 2\cdot 3^{l-1} + 2 + 3^{l-1}M_2(3),$$
$$A_2(3^l) = 11(l-1)3^{l-1} - 3\cdot 3^{l-1} + 3 + 3^{l-1}A_2(3).$$

对 3 点 DCT-I，有

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2),$$
$$X(1) = x(0) + (x(1) - x(2))/2,$$
$$X(2) = x(0) - (x(1) + x(2))/2.$$

若不计移位，需 5 个加法，不需乘法，即 $M_2(3)=0$，$A_2(3)=5$，故

$$M_2(3^l) = \frac{4}{3}l3^l - 2\cdot 3^l + 2,$$
$$A_2(3^l) = \frac{11}{3}l3^l - 3\cdot 3^l + 3.$$

四、IDCT-II 的计算

长N的 DCT-II 的逆变换 (IDCT-II) 形式*为

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\cos\frac{\pi n(2k+1)}{2N},\quad k = 0,1,\cdots,N-1.$$

---

* DCT-II 的逆变换同这里的 IDCT-II 略有区别，但计算难度一样．

它可用 DCT-I 计算，事实上

$$x(k)+x(k-1)=\sum_{n=0}^{N-1}X(n)\left[\cos\frac{\pi n(2k+1)}{2N}+\cos\frac{\pi n(2k-1)}{2N}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left(2X(n)\cos\frac{\pi n}{2N}\right)\cos\frac{\pi nk}{N},\ k=0,1,\cdots,N-1,$$

而且 $x(0)=x(-1)$，所以只需求出序列 $\left\{2X(n)\cos\frac{\pi n}{2N}\right\}$ 的 DCT-I $x'(k)$。由递推式

$$x(0)=x'(0)/2,$$

$$x(k)=x'(k)-x(k-1),\ k=1,2,\cdots,N-1,$$

便可求出 $x(k)$。

特别地，若 $N=3^l$，利用前面计算 DCT-I 的方法，可得到 IDCT-II 的快速算法。运算量为乘法 $M_3(3^l)=\frac{4}{3}l3^l-3^l+1$，加法 $A_3(3^l)=\frac{11}{3}l3^l-2\cdot 3^l+2$。

至此，长度为 3^l 的各型离散余弦变换的快速算法均已得到。

参 考 文 献

[1] 曾泳泓，长度为 P^l 的离散余弦变换算法，电子学报，1991 年第 5 期.

[2] K. Ramamohan Rao. Discrete transforms and their applications, Van Nostrand Reinhold Company, 1984.

[3] 曾泳泓，离散余弦及正弦变换的向量并行算法，并行算法论文集，国防科工委军用共性软件专业组编，1988.

[4] M T. Heideman et al., Computation of an odd-length DCT from a real-valued DFT of the same length, IEEE T-SP, V. 40, No. 1, 1992, pp. 54—61.

[5] 王中德，快速变换的历史与现状，电子学报，1989 年第 5 期.