

基于任意多边形拉氏网格的有限体积方法 研究及应用^{*1)}

王瑞利 林 忠 倪国喜

(北京应用物理与计算数学研究所 计算物理实验室 北京 100088)

摘 要

本文提出了结构与非结构拉氏网格联合使用的网格策略,采用了邻域关系、线性表和指针的数据结构,研制并实现了基于任意多边形拉氏网格的有限体积方法及程序.数值实验显示了其很强的模拟实力.

关键词: 任意多边形, 拉氏网格, 有限体积法

BASE ON ARBITRARY N-POLYGON LAGRANGE GRIDS FINITE VOLUME METHOD AND APPLICATIONS

Wang Ruili Lin Zhong Ni Guoxi

(Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational
Mathematics, Box 8009, Beijing, 100088)

Abstract

In this paper, we present a grid strategy of combing structure and unstructure grids, and use different kinds of data structure such as neighbour relation, linear list and pointer to study the finite volume method base on arbitrary n-polygon Lagrange grids, numerical tests show its strong effectiveness.

Key words: Arbitrary n-polygon, Lagrangian method, Finite volume method

§1. 引 言

高温高压多介质流体力学的数值模拟主要是应用拉氏方法,拉氏方法的特点是计算网格随流体而运动,其优点是流体力学方程组的形式比较简单,尤其是能清楚地描述多介质系统的物质界面,这是欧氏方法难以做到的.由于在高温高压的条件下,流场中的流体会发生剧烈的变化.当流场变化较大时,描述流体流动的拉氏网格相应地发生扭曲变形、甚至相交,这就直接导致基于计算网格之上的离散格式的计算精度下降,使得计算的结果无法准确地反映流

* 2004年9月20日收到.

1) 国家自然科学基金(10271019),中物院基金(2003Z0603, 20040657, 20050651)和42105基金资助项目.

场的真实性态,甚至使计算无法进行下去.因此,解决二维流体力学计算中的大变形问题是二维流体动力学拉氏方法的主要难点之一,是人们关注的焦点,也是当前国内外多维流体力学领域的前沿研究课题.拉氏方法下网格扭曲、变形,主要有两种原因,一种是计算格式不健壮造成的,另一种是由于流场复杂,网格跟随流场变化而造成的.要使拉氏方法具有很强的适应能力,必须研究高质量的网格和强壮的格式.另一个方面,有限体积方法和有限差分方法比较,有限差分方法对网格的质量要求比较苛刻,需要网格均匀或光滑,它的优点是程序简单.有限体积方法对网格的质量要求不是很苛刻,可以适应于任意几何形状的网格,它的缺点是编程复杂,代价高.本文主要是利用拉氏方法和有限体积方法的优点,提出了结构与非结构拉氏网格联合使用的网格策略,采用了邻域关系、线性表和指针的数据结构,研制并实现了基于任意多边形拉氏网格的有限体积方法及程序,数值实验显示了其很强的模拟实力.

§2. 基本方程

二维拉氏形式的弹塑性流体动力学微分方程组是

$$\frac{\dot{V}}{V} = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta, \quad (1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial \Sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xr}}{\partial r} + \nu \frac{T_{xr}}{r}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial T_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_r}{\partial r} + \nu \frac{\Sigma_r - \Sigma_\theta}{r}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \Sigma_x \dot{\epsilon}_x + \Sigma_r \dot{\epsilon}_r + \Sigma_\theta \dot{\epsilon}_\theta + T_{xr} \dot{\gamma}_{xr}, \quad (4)$$

其中 x 和 r 是空间坐标.对平面二维, x 为水平方向坐标, r 为垂直方向坐标,对柱对称二维, x 为对称轴方向坐标, r 为对称轴的垂直方向坐标. u, v, ρ, e 和 p 分别是 x 方向和 r 方向的流体速度分量、流体密度、单位质量的内能和流体静压力.上标“ \cdot ”表示时间导数, $V = 1/\rho$ 是比容, $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta$ 是正应变率, $\dot{\gamma}_{rz}$ 是剪切应变率, ν 是几何系数, $\nu = 0$ 表示平面二维, $\nu = 1$ 表示柱对称二维.

为了捕捉激波之间的间断,引入人工粘性项,它仅当体积应变率为负时才被应用.我们取线性(Landshoff人为粘性)和二次(von Neumann-Richtmyer人为粘性)粘性的组合形式.
von Neumann-Richtmyer人为粘性

$$q_{NR} = \begin{cases} l_{NR}^2 \rho \left(\frac{\dot{V}}{V} \right)^2, & \dot{V} < 0, \\ 0, & \dot{V} \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 l_{NR} —具长度量纲的量, $l_{NR}^2 = a_{NR}^2 A$, a_{NR} — N - R 人为粘性系数, A —计算网格面积.

Landshoff人为粘性

$$q_L = \begin{cases} l_L \rho c \left(\frac{\dot{V}}{V} \right), & \dot{V} < 0, \\ 0, & \dot{V} \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中 l_L — 具长度量纲的量, $l_L = a_L\sqrt{A}$; a_L —Landshoff 人为粘性系数.

§3. 网格体系

将整个计算模型区域划分成若干个子区, 每个子区中只包含一种介质. 子区的边界包括模型自然边界和介质界面. 再将子区划分成若干个子块, 子块应尽量划分成一些几何上比较规则的区域, 如曲线四边形、凸多边形等. 子块的边界可能是人为内界面 (非介质界面和非自然边界, 即非子区边界)、介质界面或自然边界. 最后将子块剖分成若干网格, 网格顶点称为节点. 本文在研究结构网格 (四边形) 和非结构网格 (点点的连接方式不同的三角形) 生成的基础上, 研究了非结构六边形的网格生成方法. 此方法主要是根据用户给定的子块边界, 先生成边界点 (图 1a), 然后借鉴前沿推进法的思想, 在区域内部生成边内部点 (图 1b), 再把边内部点作为 Delaunay 三角形网格生成方法的边界点, 生成内部三角形网格 (图 1c). 然后利用三角形的对偶网格和边界点, 给出子块内六边形网格 (图 1d), 这样生成的六边形网格边界网格与内部网格搭配比较合理. 在每一子块生成网格后, 给出点号、网格号和邻域表 (点格表、格点表), 然后不同块网格拼接起来. 在拼接时, 首先要根据块的信息, 找出哪两个块的哪条边是同一条边, 然后以某一条边作为基本边, 通过点坐标, 边的曲线方程和邻域关系, 找出边上点的相应位置, 修改邻域关系表, 拼接是非常复杂的.

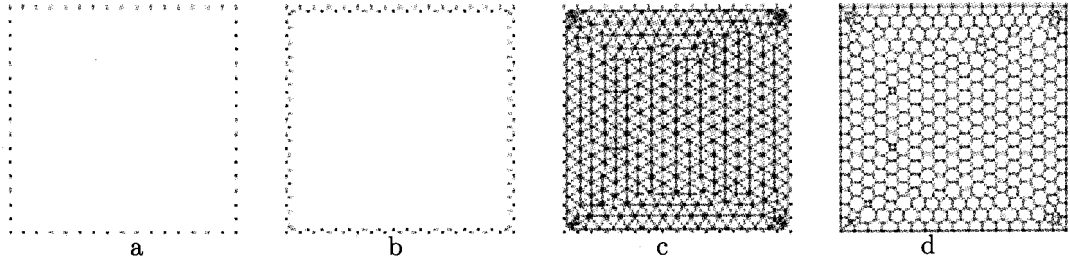


图 1 六边形网格生成过程

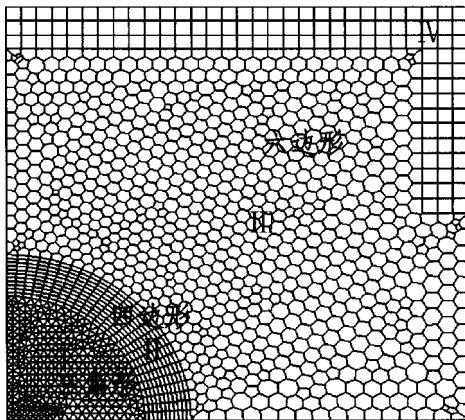


图 2 任意多边形网格的构造

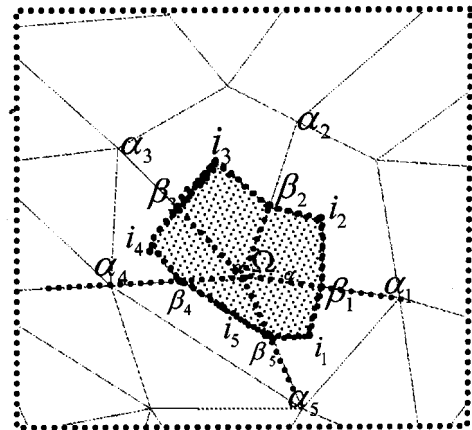


图 3 动量方程控制体积 Ω_α

图 2 显示了此技术对复杂区域的适应能力, 其中第 I 块生成了三角形网格, 第 II、IV 块生成了四边形网格, 第 III 块生成了六边形网格.

§4. 任意多边形拉氏网格的有限体积方法

对于拉格朗日网格, 网格生成可使外边界 (自由面) 和材料边界在拉格朗日网格线上, 网格和节点是计算的基本单元. 在本文方法中, 速度和空间位置坐标定义在网格节点上, 而其它物理量 (如密度、压力、应力、应变) 定义在网格中心, 且假设这些量在网格上是均匀的.

动量方程的离散化.

对于每个节点, 例如图 3 中节点 α , 把节点 α 周围网格的中心和过节点 α 的网格边的中点按逆时针方向连线得到控制体积 Ω_α , 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_\alpha}$ 是过节点 α 的网格节点, 点 $i_1, i_2, \dots, i_{m_\alpha}$ 是相应网格的中心, 而点 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_\alpha}$ 是相应边的中点.

如图节点 α 的速度沿虚回路积分求解公式为

$$\begin{aligned} u_\alpha^{n+\frac{1}{2}} &= u_\alpha^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{B_\alpha^n} \sum_{k=1}^{m_\alpha^n} \left\{ \left[(\Sigma_x)_{\beta_k, i_{k+1}}^n (r_{i_{k+1}}^n - r_{\beta_k}^n) + (\Sigma_x)_{i_{k+1}, \beta_{k+1}}^n (r_{\beta_{k+1}}^n - r_{i_{k+1}}^n) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[(T_{xr})_{\beta_k, i_{k+1}}^n (x_{i_{k+1}}^n - x_{\beta_k}^n) + (T_{xr})_{i_{k+1}, \beta_{k+1}}^n (x_{\beta_{k+1}}^n - x_{i_{k+1}}^n) \right] \right\} + \nu \Delta t^n F_\alpha^n, \\ v_\alpha^{n+\frac{1}{2}} &= v_\alpha^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{B_\alpha^n} \sum_{k=1}^{m_\alpha^n} \left\{ \left[(T_{xr})_{\beta_k, i_{k+1}}^n (r_{i_{k+1}}^n - r_{\beta_k}^n) + (T_{xr})_{i_{k+1}, \beta_{k+1}}^n (r_{\beta_{k+1}}^n - r_{i_{k+1}}^n) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[(\Sigma_r)_{\beta_k, i_{k+1}}^n (x_{i_{k+1}}^n - x_{\beta_k}^n) + (\Sigma_r)_{i_{k+1}, \beta_{k+1}}^n (x_{\beta_{k+1}}^n - x_{i_{k+1}}^n) \right] \right\} + \nu \Delta t^n G_\alpha^n, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$B_\alpha^n = \sum_{k=1}^{m_\alpha^n} \frac{\rho_{i_k}^n A_{i_k}^n}{l_{i_k}^n}, \quad F_\alpha^n = \frac{2\pi}{m_\alpha^n} \sum_{k=1}^{m_\alpha^n} \frac{(T_{xr})_{i_k}^n A_{i_k}^n}{M_{i_k}}, \quad G_\alpha^n = \frac{2\pi}{m_\alpha^n} \sum_{k=1}^{m_\alpha^n} \frac{(\Sigma_r - \Sigma_\theta)_{i_k}^n A_{i_k}^n}{M_{i_k}}. \quad (8)$$

这样就得到动量方程的离散化格式. 根据节点 α 的新速度, 我们得新时刻节点 α 的位置坐标: $x_\alpha^{n+1} = x_\alpha^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \cdot u_\alpha^{n+\frac{1}{2}}$, $r_\alpha^{n+1} = r_\alpha^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_\alpha^{n+\frac{1}{2}}$. 其余方程的离散化.

例如内能平衡方程 (4) 亦可表为如下形式:

$$\dot{e} = -(p+q)\dot{V} + V(s_x \dot{\epsilon}_x + s_r \dot{\epsilon}_r + s_\theta \dot{\epsilon}_\theta + \tau_{xr} \dot{\gamma}_{xr}). \quad (9)$$

将式 (9) 在网格 i 上离散化, 按下列顺序计算

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (\rho_i^{n+1} + \rho_i^n), \quad s_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (s_i^{n+1} + s_i^n), \\ (\Delta Z)_i^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_i^{n+\frac{1}{2}}} (s_x \dot{\epsilon}_x + s_r \dot{\epsilon}_r + s_\theta \dot{\epsilon}_\theta + \tau_{xr} \dot{\gamma}_{xr})_i^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tilde{e}_i = e_i^n + \left(p_i^n + q_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\rho_i^{n+1} \rho_i^n} + (\Delta Z)_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$\tilde{p}_i = p(\tilde{e}_i, \rho_i^{n+1}) \quad (\text{状态方程}).$$

最后得内能

$$e_i^{n+1} = \tilde{e}_i + \frac{1}{2} (\tilde{p}_i - p_i^n) \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\rho_i^{n+1} \rho_i^n}, \quad (12)$$

压力

$$p_i^{n+1} = p(e_i^{n+1}, \rho_i^{n+1}). \quad (13)$$

§5. 数值例子

基于上述方法, 研制了数值模拟软件, 下面给出几个数值算例说明方法是成功的.

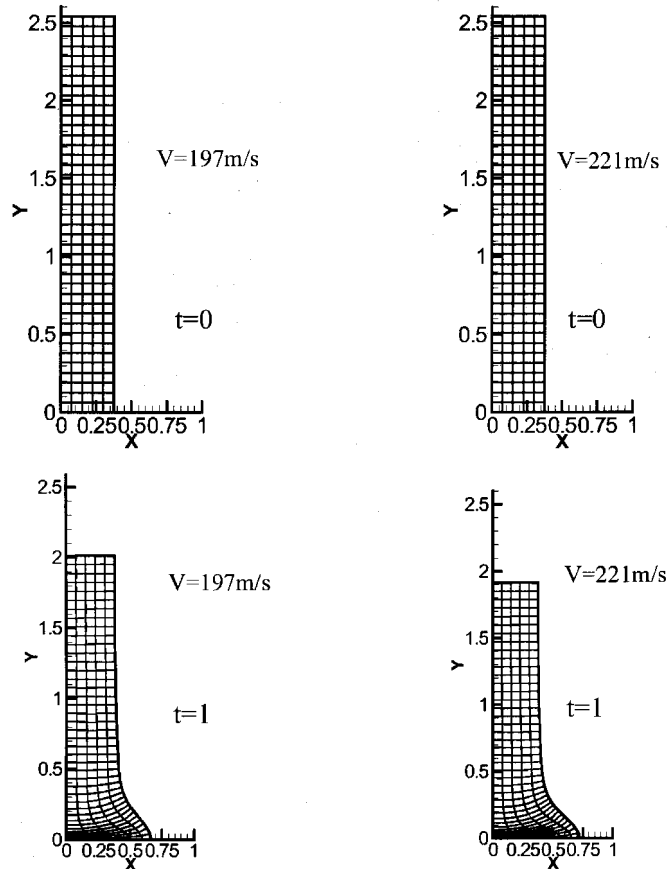


图 4 不同速度下圆柱碰撞实验的计算形状

算例 1. 直径为 0.752cm, 长为 2.54cm 的钢柱 ($\rho = 7.89\text{g/cm}^3$), 分别以不同的速度撞击实验的数值模拟, 图 4 为计算结果. 表 1 给出了本文计算 (LAD2D) 与实验, EPIC-2^[3] 的比较对比. 可以看出同实验结果基本吻合.

表 1 LAD2D 计算结果与实验, EPIC-2 的比较

方法	$V = 197m/s$			$V = 221m/s$		
	L_0	L	L/L_0	L_0	L	L/L_0
实验	2.54	2.014	0.793	2.54	1.920	0.756
EPIC-2	2.54	2.014	0.793	2.54	1.915	0.662
LAD2D	2.54	2.014	0.793	2.54	1.917	0.755

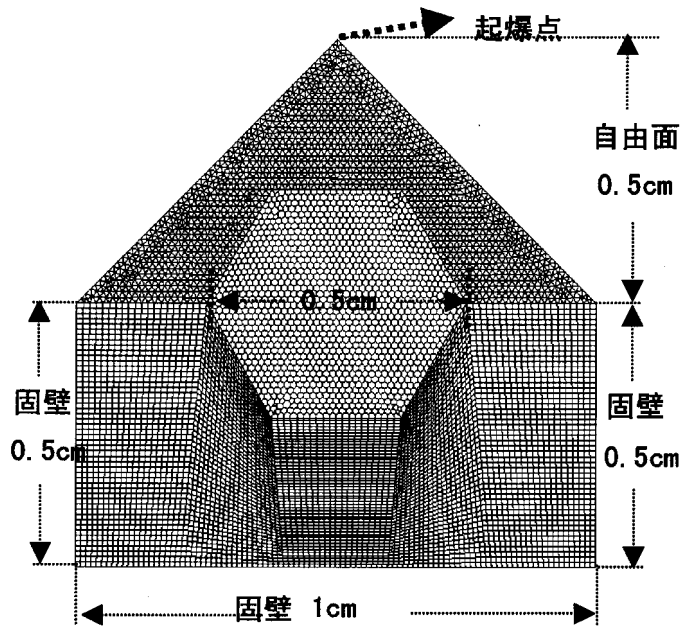
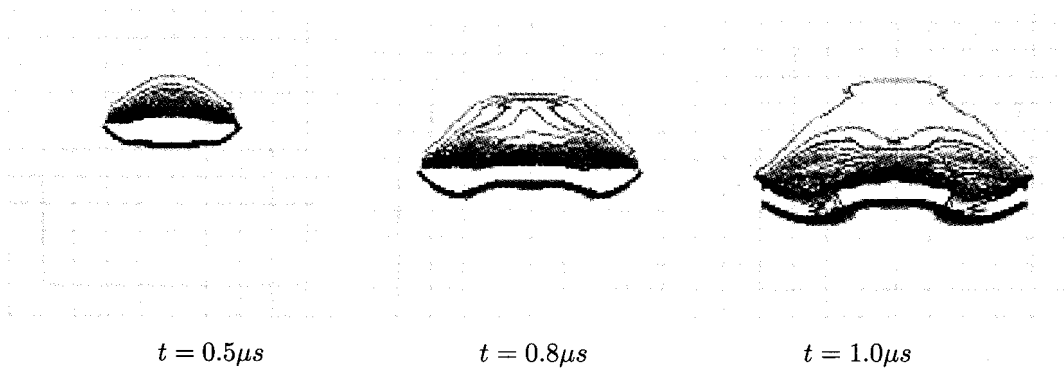


图 5 计算模型图和初始网格



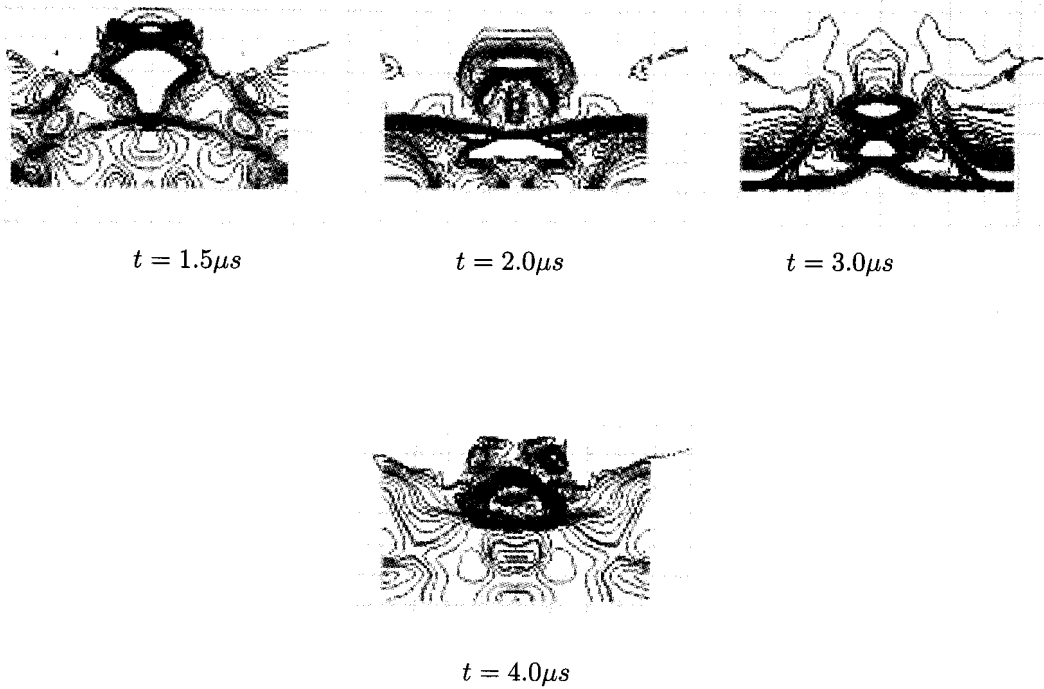


图 6 不同时刻的压力等值线 ($t = 0.5\mu s, 0.8\mu s, 1.0\mu s, 1.5\mu s, 2.0\mu s, 3.0\mu s, 4.0\mu s$)

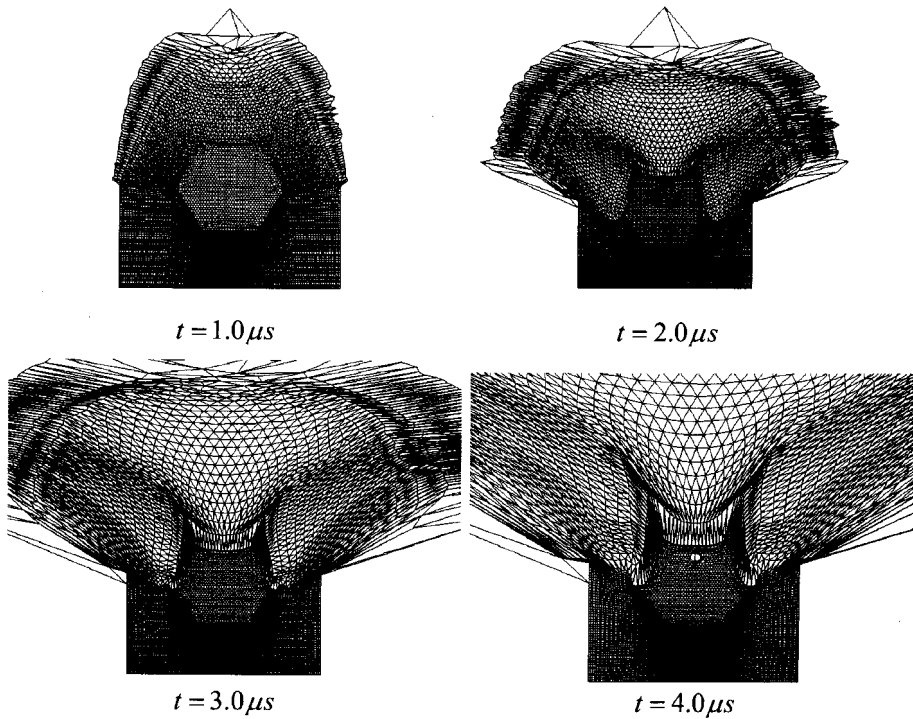


图 7 $t = 1.0\mu s, 2.0\mu s, 3.0\mu s, 4.0\mu s$ 的网格变形

算例 2. 应用于爆轰的计算. 在图 5 中, 三角形网格覆盖的区域为 PBX-9404 炸药, 炸药使用多方状态方程, 参数为 $K = 2.996$, $D_J = 8.88 \text{ km/s}$, $\rho_0 = 1.84 \text{ g/cm}^3$, 六边形网格覆盖的区域为钨 ($\rho_0 = 19.237 \text{ g/cm}^3$, $\gamma_{\text{钨}} = 3.0$), 四边形网格覆盖的区域为铝 (金属采用理想气体状态方程), 初始结构与条件如图 5. 图 6 给出了不同时刻压力流场变化情况.

图 7 给出网格变化情况. 从图可以看出本文格式对复杂流场的模拟能力.

6. 结 论

本文基于结构与非结构拉氏网格联合使用的网格策略, 研究了三角形网格、四边形网格和六边形网格的构造方法, 采用了邻域关系、线性表和指针的数据结构, 研制并实现了基于任意多边形拉氏网格的有限体积方法及程序, 并应用于碰撞问题和爆轰问题的数值模拟. 数值实验显示了其很强的模拟实力.

参 考 文 献

- [1] G. H. Miller, P. Colella. A high-order Eulerian Godunov method for Elastic-Plastic flow in solids. *J. Comput. Phys.* 167(2001) 131-176.
- [2] B. P. Howell, G. J. Ball. A free-Lagrange augmented Godunov method for the simulation of Elastic-Plastic solids. *J. Comput. Phys.* 175(2002) 128-167.
- [3] Gordon R. Johnson, William H. Cook, A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures, Seventh Int. Symp. on Ballotice, the Hague Nethelank, 1983.
- [4] Joe F. Thompson, Z.U.A.Warsi, C.Wayne Mastin, Numerical Grid Generation Foundations and Applications, North-Holland, New York, Amsterdam, Oxford, 1985.
- [5] 李荫藩, 谈庆明, 梁珍璇, 数值模拟二维高速碰撞问题的拉格朗日任意三角形网格有限体积法, *计算物理*, 12:4(1995) 433-441.
- [6] 张来平, 张涵信, 无粘流数值模拟的结构与非结构混合网格技术, 全国第八届计算流体力学会议论文集, 1996.