接触应力极小化外形设计方法 *1)

徐 君 开

(福州大学计算机科学与技术系)

CONTOUR DESIGN METHOD FOR CONTACT STRESS MINIMIZATION

Xu Jun-kai

(*Department of Computer Science and Technology, Fuzhou University*)

Abstract

A method is proposed to contour design for contact stress minimization. It is indicated by computation of large-scale structural instances that the amount of computation will be reduced and the machine time can be saved. This method is a useful and significant quick algorithm.

§1. 引　　言

许多机械结构是由部件用机械联接方式 (如螺纹、齿轮和轴承等) 组合而成的大型结构，并通过联接处的局部接触表面来实现力的传递. 在这类弹性接触问题中，由于接触面某些部位可能出现过高的接触峰值应力而引起塑性变形，导致结构疲劳损坏. 因此，结构疲劳的危险部位一般都在联接处，所以在设计结构时，工程设计人员十分关心如何计算接触应力和如何进行峰值应力的极小化设计. 本文利用有限元方法产生接触物体的弹性性能数据，并把弹性接触问题用二次规划理论进行描述，然后采用电子计算机上用的数学方法进行接触应力分析计算和峰值应力极小化设计. 本课题是以直升机主桨毂轴颈和螺母联接处发生断裂损坏造成机毁人亡这一严重飞行事故为背景进行分析和研究.

§2. 接触应力极小化外形设计的数学模型

假设直升机主桨毂轴颈与螺母在轴向剖面有 17 扣，轴对称半剖面每扣单侧有 3 个可能接触点对，这样共有 51 个可能接触点对. 若螺距误差为 a, 则由于螺纹加工条件所限使得扣与扣之间的接触点对的外形修正量存在如下关系:

$$a_i = e_i a, \quad i = 1, 2, \cdots, 51$$

* 1996 年 10 月 18 日收到.

1) 部资助研究课题.

式中，a_i— 第 i 个接触点对的外形修正量，a— 螺距误差，e_i— 第 i 个接触点对的比率系数．易知，比率向量 $E=(e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{49},e_{50},e_{51})^T=(1,1,1,2,2,2,\cdots,17,17,17)^T$．

对于螺纹联接件这类结构，接触峰值应力极小化外形设计的数学模型可归结为如下的最大最小问题：

$$\begin{cases} \min \max\limits_{1\le i\le n} \{W_i R_i(a)\}, \\ \text{s.t. } R(a)\in\Omega, \\ \qquad a^l\le a\le a^u. \end{cases} \tag{1}$$

该规划问题是寻求一个最优的接触面外形修正量 (即最优的螺距修正量)，使得在外载荷作用下接触区的峰值应力达到最小．(1) 式中

a— 设计变量即螺距修正量，

a^u, a^l— 螺距修正量的上下限，

$R_i(a)$— 第 i 个接触点对上的接触力，与 a 有关，

$R(a)$— 接触力向量，$R(a)=(R_1(a),R_2(a),\cdots,R_n(a))^T$，

W_i— 接触力 $R_i(a)$ 分布的面积或长度的倒数，

$W_iR_i(a)$— 第 i 个接触点对上的接触应力．

$$\Omega=\left\{ R(a) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \min & f(R)=\frac{1}{2}R^T HR+(c+aE)^T R, \\ \text{s.t.} & AR=B, \\ & R\ge 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

其中

Ω— 相应于所有外形修正量 a 的接触力向量集合，

H—$n\times n$ 对称正定柔度矩阵，

A—$m\times n$ 仿射矩阵且 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，

n— 可能接触的点对数目，

m— 自由度，

c— 合成位移向量，

$(c+aE)$— 外形修正后的合成位移向量，

B— 合成力向量．

令 $\sigma(a)=\max\limits_{1\le i\le n}\{W_iR_i(a)|R(a)\in\Omega\}$, 则问题式 (1) 可改写为

$$\begin{cases}\min & \sigma(a),\\ \text{s.t.} & a^l\le a\le a^u.\end{cases} \tag{3}$$

规划问题式 (3) 是寻求一个最小的接触峰值应力，它是一个单变量约束极小化问题. 求解这类问题的方法很多，通常是采用不用导数值的经典二次插值法来求解 [1]. 该方法存在的缺点是，对于某些特殊的三插值基点，算法会出现除零或出现退化情况，另外该方法采用值收敛或点收敛条件作为收敛准则，故可能出现所求的解不满足精度要求. 针对上述缺点，本文介绍一种带摄动技术的改进的二次插值法，其特点是引进除零点和退化点的控制技术，并将收敛准则改用包含极小点的区间长度的收敛为准则，从而保证所求的解绝对满足精度要求. 下面将介绍该改进的方法及其计算步骤.

§3. 接触应力极小化外形设计的计算方法和计算步骤

步 0. 选取 $\delta>0$, $\eta>0$, $\alpha\in(0,1)$, $p\in(\alpha,1]$, $q\in[0,1)$, a_0, x_0, b_0; 令 $k=0$. $a_k=a_0$. $x_k=x_0$, $b_k=b_0$.

步 1. 令 $\sigma_a=\sigma(a_k)$, $\sigma_x=\sigma(x_k)$, $\sigma_b=\sigma(b_k)$.

步 2. 令

$$\alpha_1=\frac{(x_k^2-b_k^2)\sigma_a+(b_k^2-a_k^2)\sigma_x+(a_k^2-x_k^2)\sigma_b}{(a_k-x_k)(x_k-b_k)(b_k-a_k)},$$

$$\alpha_2=-\frac{(x_k-b_k)\sigma_a+(b_k-a_k)\sigma_x+(a_k-x_k)\sigma_b}{(a_k-x_k)(x_k-b_k)(b_k-a_k)}.$$

步 3. 若 $|\alpha_2|\le\eta$, 则出现除零点，转步 4; 否则令 $x=-\dfrac{\alpha_1}{2\alpha_2}$, 转步 5.

步 4. 由摄动技术产生一个非退化点 x 作为新的极小点近似，令

$$x=\begin{cases}\max\{x_k+\delta p,x_k+(b_k-x_k)q\}, & \text{当 } x_k\le\dfrac{a_k+b_k}{2},\\ \min\{x_k-\delta p,x_k-(x_k-a_k)q\}, & \text{其他},\end{cases}$$

转步 6.

步 5. 若 $|x-x_k|<\alpha\delta$ 则出现退化点，转步 4, 否则转步 6.

步 6. 令 $\sigma=\sigma(x)$, 并对不同的 4 点 (a_k,σ_a), (x_k,σ_x), (b_k,σ_b) 和 (x,σ) 确定出包含极小点的新的插值三基点 a_{k+1},x_{k+1},b_{k+1} 及相应的 $\sigma_a,\sigma_x,\sigma_b$ 值，使区间 $[a_{k+1},b_{k+1}]\subset[a_k,b_k]$.

步 7. 若 $(b_{k+1}-a_{k+1})\le2\delta$, 则取 $\dfrac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$ 作为满足精度要求的解，输出结果，迭代到此结束；否则令 $k=k+1$, 转步 2 继续迭代.

有关符号说明如下：δ— 解的精度，η— 除零控制量，α— 退化控制参数，p, q— 摄动参数，a_0, x_0, b_0— 螺距修正量初值，构成包含极小点的下单峰插值三基点．它可由接触问题本身特点容易选取，也可由搜索算法自动寻求．

从上述介绍可以看出，解决接触应力极小化外形设计的前提是先计算出接触力，然后求出相应的接触应力及峰值应力．由于在外形优化设计中，必须对结构反复进行接触应力分析计算，因此计算接触力的计算量是非常大的．本文将介绍一种具有计算量少、节省机时的快速计算接触力的方法．下面先介绍弹性接触问题的数学模型．

§4. 弹性接触问题的数学模型

在外载荷的作用下，由两物体接触点对的变形协调条件有

$$S = HR + A^T L + C,$$

式中

S— 变形后两物体之间的间隙向量，$S = (S_1, S_2, \cdots, S_n)^T$

L— 基准位移向量，$L = (L_1, L_2, \cdots L_m)^T$，

R— 接触力向量，$R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T$．

其他符号意义同式 (2)．又由平衡条件有

$$AR = B$$

再由间隙和接触力本身的非负性要求有

$$S_i \geq 0, \quad R_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

接触点对上的间隙和接触力之间必须满足的条件有

$$S_i R_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

将上述弹性接触问题的解析说明概括为条件 [2]

$$\begin{cases} HR + A^T L - S + C = 0, \\ AR = B, \\ S^T R = 0, \\ S \geq 0, \ R \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

不难看出，条件式 (4) 是如下凸二次规划问题的 Kuhn-Tucker 必要条件 [2]:

$$\begin{cases} \min & f(R)=\dfrac{1}{2}R^{T}HR+C^{T}R, \\ \text{s.t.} & AR=B, \\ & R\geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

规划问题式 (5) 的设计变量是接触力向量 R, 目标函数 $f(R)$ 正好是系统的总位能，故弹性接触问题是最小总位能原理的一个推广. 采用有限元方法产生接触物体的弹性性能数据，并把弹性接触问题用二次规划理论进行描述. 因此，求解弹性接触问题可转化为求解一个凸二次规划问题.

§5. 求解弹性接触问题的计算方法

假设问题式 (5) 的可行集为 $\mathcal{D}$, 求解该问题的方法很多，本文将介绍一种实用的快速的可行方向法. 现对某给定的摄动量 $\varepsilon_k\geq 0$, 求得第 k 次迭代近似解 $x^k\in\mathcal{D}$, 则第 $k+1$ 次迭代近似解 $x^{k+1}\in\mathcal{D}$ 可表示为

$$x^{k+1}=x^k+\lambda_k d^k,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

式中

x^0— 初始可行点，可事先估计或用辅助线性规划问题求得,

d^k— 点 x^k 处的一个可行下降方向,

λ_k— 从 x^k 处沿方向 d^k 的最优步长.

该方法的核心问题是可行下降方向 d^k 的构造问题. 本文的构造方法是，用 x^k 处的目标函数负梯度和 ε_k 有效约束向量所张成的锥来生成，其形式为

$$d^k=Wu, \tag{6}$$

式中

$$W=[-\nabla f(x^k),e^{i_1},e^{i_2},\cdots,e^{i_r},a^1,a^2,\cdots,a^m,-a^1,-a^2,\cdots,-a^m],$$

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_{2m+r+1})^T,$$

$$I(x^k,\varepsilon_k)=\{i|0\leq x_i^k\leq\varepsilon_k\quad i=1,2,\cdots,n\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_r\},$$

$$e^i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)^T,$$

$$a^j=(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn})^T.$$

这里求方向的待定乘子向量 u 可由 $2m+r+2$ 维的线性规划子问题

$$
\begin{cases}
\min & \xi \\
\text{s.t.} & \nabla f(x^k)^T W u \le \xi, \\
& -(e^p)^T W u \le 0, \qquad p \in I(x^k, \varepsilon_k), \\
& -(a^q)^T W u \le 0, \qquad q = 1, 2, \cdots, m, \\
& (a^q)^T W u \le 0, \qquad q = 1, 2, \cdots, m, \\
& \sum_{i=1}^{2m+r+1} u_i \le 1, \\
& u_i \ge 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, 2m+r+1, \\
& \xi \le 0
\end{cases}
\tag{7}
$$

的最优解 $(u^k, \xi_k)^T$ 来确定. 下面将证明由式 (6) 定义的方向 d^k 是 x^k 处的一个可行下降方向.

定理 1. 设对于某给定的 $\varepsilon_k \ge 0$, 若 $x^k \in \mathcal{D}$ 处求乘子向量子问题式 (7) 的最优解 $(u^k, \xi_k)^T$ 满足 $\xi_k < 0$, 则由式 (6) 定义的方向 d^k 是 x^k 处的一个可行下降方向.

证明. 只须注意子问题式 (7), 即可推得如下结果:

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(x^k)^T d^k \le \xi_k < 0, \\
&(e^p)^T d^k \ge 0, \qquad p \in I(x^k, \varepsilon_k), \\
&(a^q)^T d^k = 0, \qquad q = 1, 2, \cdots, m, \\
&d^k \ne 0.
\end{aligned}
$$

此即表明方向 d^k 是问题式 (5) 在 x^k 处的一个可行下降方向. 证毕.

在求解迭代过程中, 如果 $\varepsilon_k > 0$ 且子问题式 (7) 的最优解 $(u^k, \xi_k)^T$ 满足 $\xi_k = 0$, 则必须缩小 ε_k, 然后继续迭代直至 ε_k 消失或满足给定的 ε_k 控制精度为止. 如果 $\varepsilon_k = 0$ 且子问题式 (7) 的最优解 $(u^k, \xi_k)^T$ 满足 $\xi_k = 0$, 则 $x^k \in \mathcal{D}$ 是问题式 (5) 的最优解. 下面将证明这一结果.

定理 2. 设 $\varepsilon_k = 0$ 且 $I(x^k, 0) = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$, 则 $x^k \in \mathcal{D}$ 处求乘子向量子问题式 (7) 的最优解 $(u^k, \xi_k)^T$ 满足 $\xi_k = 0$ 的充要条件为 x^k 是凸规划问题式 (5) 的最优解.

证明．为方便起见，将子问题式 (7) 改写为

$$\begin{cases} \min & \xi \\ \text{s.t.} & -W^TWu \le \xi V, \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{2m+r+1} u_i \le 1, \\ & u_i \ge 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, 2m+r+1, \\ & \xi \le 0 \end{cases} \tag{8}$$

式中 $V = (1, 0, \cdots, 0)^T \in R^{2m+r+1}$. 易知，子问题式 (8) 的最优解 $(u^k, \xi_k)^T$ 满足 $\xi_k = 0$ 的充要条件是对所有满足

$$-W^TWu \le \omega V, \quad u \ge 0$$

的向量 $(\omega, u)^T$, 成立 $w \ge 0$.

令

$$y = (w, u)^T \in R^{2m+r+2}, \quad Z = (1, 0, \cdots, 0)^T \in R^{2m+r+2},$$

$$G = \begin{bmatrix} V & W^TW \\ 0 & I \end{bmatrix}_{(4m+2r+2)\times(2m+r+2)},$$

式中 I 是 $(2m+r+1)\times(2m+r+1)$ 单位矩阵.

因此, 等价地满足 $\xi_k = 0$ 的充要条件是对所有满足 $Gy \ge 0$ 的向量 y 成立 $y^TZ \ge 0$. 故由 Farkas 定理知 [3], 存在 $4m+2r+2$ 维向量 $(\mu^*, \lambda^*)^T = (\mu_1^*, \mu_2^*, \cdots, \mu_{2m+r+1}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_{2m+r+1}^*)^T \ge 0$ 满足

$$G^T \begin{bmatrix} \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = Z,$$

即成立 $W^TW\mu^* \le 0$, $\mu^* \ge 0$, $\mu_1^* = 1$, 故有

$$(\mu^*)^TW^TW\mu^* = \|W\mu^*\|^2 \le 0. \tag{9}$$

显然，式 (9) 成立的充要条件是 $W\mu^* = 0$.

综上所述，子问题式 (7) 的最优解 $(u^k, \xi_k)^T$ 满足 $\xi_k = 0$ 的充要条件是存在 $2m+r$ 维向量 $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_{2m+r}^*)^T \ge 0$ 满足

$$\nabla f(x^k) - \sum_{j=1}^{r} \theta_j^* e^{i_j} - \sum_{j=1}^{m} (\theta_{r+j}^* - \theta_{r+m+j}^*) a^j = 0$$

或

$$\nabla f(x^k) - \sum_{j=1}^{r} \theta_j^* e^{i_j} - \sum_{j=1}^{m} t_j^* a^j = 0, \ \theta_j^* \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, r, \tag{10}$$

式中 $t_j^* = \theta_{r+j}^* - \theta_{r+m+j}^*$, $j = 1, 2, \cdots, m$. 式 (10) 说明 $x^k \in \mathcal{D}$ 是问题式 (5) 的 Kuhn-Tucker 点. 再由凸规划最优性的充分条件知, x^k 就是问题式 (5) 的最优解. 证毕.

需要说明一点, 在实际计算中, 式 (6) 定义的方向 $d^K = Wu$ 可被简化, 只须令

$$W = [-\nabla f(x^k), e^{i_1}, e^{i_2}, \cdots, e^{i_r}, -\sum_{j=1}^{m} a^j, a^1, a^2, \cdots, a^m],$$

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_{m+r+2})^T.$$

这样求方向的待定乘子向量 u 的子问题式 (7) 的维数将从 $2m + r + 2$ 维被简化为 $m + r + 3$ 维. 该维数与问题式 (5) 的维数 n 无关. 又由于 m 和 r 均是很小的数目, 故求解这样一个低维数的小规划问题当然计算量很小, 速度很快. 特别在接触问题中, 接触点对的数目一般都很大, 所以问题式 (5) 的维数 n 通常是高维的情况. 因此, 本文求方向的方法与其他需用 n 维子问题求方向的方法相比速度很快.

关于最优步长 λ_k 的选取问题, 根本无须作精确的一维搜索, 只要根据问题式 (5) 是一个严格凸二次规划的特性, 容易推得从 x^K 处沿可行下降方向 $d^K = (d_1^K, d_2^K, \cdots, d_n^K)^T$ 的最优步长应取为

$$\lambda_K = \min\{\lambda_K^1, \lambda_K^2\},$$

式中

$$\lambda_K^1 = -\frac{(2Hx^K + c)^T d^K}{2(d^K)^T H d^K}, \quad \lambda_K^2 = \min\Big\{-\frac{x_j^K}{d_j^K}\Big| d_j^K < 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n\Big\}.$$

§6. 求解弹性接触问题的计算步骤

步 0. 选取 $\varepsilon_0 > 0$, $r_0 > 0$, $t > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $\eta > \delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $x^0 \in \mathcal{D}$; 令 $K = 0$, $\varepsilon_K = \varepsilon_0$, $x^K = x^0$.

步 1. 确定 ε_K 的有效约束集 $I(x^K, \varepsilon_k)$ 和有效约束数 r.

步 2. 若 $r > r_0$ 则转步 3, 否则转步 4.

步 3. 若 $\varepsilon_K > \delta_2$ 则令 $\varepsilon_K = \alpha\varepsilon_K$ 转步 1, 否则转步 4.

步 4. 求子问题式 (7) 的最优解 $(u^K, \xi_K)^T$.

步 5. 若 $\xi_K > -t\varepsilon_K - \delta_1$ 则转步 6, 否则转步 7.

步 6. 若 $\varepsilon_K > \delta_2$ 则令 $\varepsilon_K = \alpha\varepsilon_K$ 转步 1, 否则 x^K 就是所求的接触力向量, 输出结果, 迭代到此结束.

步 7. 令 $d^K = \dfrac{Wu^K}{\|Wu^K\|}$

步 8. 选取最优步长 λ_K.

步 9. 令 $x^{K+1} = x^K + \lambda_K d^K$,

$$\varepsilon_{K+1} = \begin{cases} \beta\varepsilon_K, & \text{当 } \xi_K \le -t\varepsilon_K - \eta \text{时}, \\ \varepsilon_K, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$K = K + 1$$

并转步 1 继续迭代.

有关符号说明如下：

ε_0—— 摄动量初值,

r_0—— 有效约束控制数,

t—— 控制 ξ_k 的一个控制参数,

α—— 摄动量缩小率,

β—— 摄动量放大率,

δ_1—— 控制 ξ_k 的一个固定控制精度,

δ_2—— 控制 ε_K 的控制精度,

η—— 放大摄动量的一个固定控制精度.

§7. 数值算例

本算例是以直升机主桨毂轴颈和螺母联接件受力分析作为计算实体进行接触面外形优化设计计算. 联接件除承受桨叶工作载荷外, 还承受装配时施加的拧紧力矩对应的轴向预紧力. 轴颈与螺母间的连续螺纹在轴向剖面用三角形单元作单元离散, 轴颈划分 413 个单元, 273 个结点; 螺母划分 250 个单元, 187 个结点; 可能接触点对有 51 个. 经有限元计算提供各种性能数据 H 、A 、B 、C 、m 、n 等, 取解的精度为 0.05μm, 外形修正量上下限 $a^u = -a^l = 18.6\mu\text{m}$, 比率向量 $E = (1,1,1,2,2,2,\cdots,17,17,17)^T$. 对五种不同螺距误差的结构, 在相同的外载荷作用下进行接触应力分析和接触面外形优化设计, 其结果见表 1.

表 1　接触面外形优化设计结果

螺距误差 /μm	18.60	6.00	0.00	−2.00	−4.00
设计前峰值应力 /kg·cm^{-2}	8364.82	5986.60	5289.72	5648.16	6006.59
设计后峰值应力 /kg·cm^{-2}	5081.59	5078.62	5078.33	5078.26	5077.65
峰值应力下降率	39.25%	15.16%	3.98%	10.09%	15.46%
最优螺距修正量 /μm	−15.60	−4.17	1.03	2.75	4.48

§8. 结　　论

1. 从表 1 的计算结果可以看出, 在相同的外载荷作用下, 由于螺距误差的差别, 使得一个结构的接触峰值应力有很大的差异. 经过本文方法的优化设计之后, 原先差异很大的峰值应力都调整到一个极小峰值的附近 (彼此最大相对误差为万分之几), 这就说明建立在精确的弹性接触应力分析基础上的接触面外形优化设计是准确可靠的. 同时也说明外形优化设计与一般设计相比, 优化设计能最大限度地降低峰值应力, 达到最大限度地提高结构疲劳寿命的效果. 有资料表明, 峰值应力下降 10%, 将

使疲劳寿命提高一倍以上．这种接触面外形优化设计方法可为那些不满足疲劳寿命要求的结构提供一种结构改动小、修改周期短、效果好的修正结构的简便方法．

2．为说明本文介绍的求解弹性接触问题的计算方法是一个实用的快速的算法，现对 3 种不同维数 n 的凸二次规划问题，在相同的精度要求下，在王安 V-80 机上用 3 种著名方法 (Lemke 互补转轴法[4,5]、既约梯度法[3] 和 Wolfe 方法[1]) 分别进行计算．计算结果与本文方法的计算结果完全一致． 4 种方法解题所需机时 (min) 大致情况见表 2．

表 2 4 种方法解题所需机时 (min)

方法名称	维数 $n=51$	维数 $n=102$	维数 $n=153$
本文方法	1.3	7	15
Lemke 互补转轴法	2.7	14	45
既约梯度法	13.0	48	105
Wolfe 方法	14.0	51	147

从表 2 可以看出，当维数 n 越大时，本文方法的解题速度大大快于其他 3 种著名方法．特别在进行接触面外形优化设计时，必须对结构反复进行接触应力分析计算，因此需要反复求解凸二次规划问题．采用一般方法解题需花费大量机时，而采用本文方法求解，则具有计算量少、节省机时的优点．该方法已成功地用于大型结构接触面外形优化设计计算．实践证明，它是一种有效而实用的快速算法．

最后说明一点，有关凸二次规划的近年研究成果可参阅有关文献[5]．

参 考 文 献

[1] 陈开明，非线性规划，上海复旦大学出版社， 1991.

[2] E.J. Haug, J.S. Arora, Applied optimal design: mechanical and structural systems, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

[3] M. Avriel, Nonlinear programming: analysis and methods. New Jeysey, Prentice-Hall, Inc., 1976.

[4] M.S. Bazaraa, C.M. Shetty, Nonlinear programming: theory and algorithms. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

[5] 袁亚湘，非线性规划数值方法，上海科学技术出版社， 1993.