

# 具有固定面积约束的光顺 $B$ 样条曲线\*

蒋大为

(西北工业大学)

李安平

(空军导弹学院)

蔡元虎

(西北工业大学)

## FAIRING $B$ -SPLINE CURVES WITH FIXED AREA CONSTRAINTS

Jiang Da-wei

(Northwestern Polytechnical University)

Li An-ping

(Air Force Missile Institute)

Cai Yuan-hu

(Northwestern Polytechnical University)

### Abstract

In this paper, a new method is presented for fairing  $B$ -spline curves with fixed area constraints. Authors use Lagrange's method of multipliers solved the variational problem with constraints.

### § 1. 引言

在计算机辅助几何设计与计算机图形学中, 光顺曲线的构造往往是带有约束条件的最优化问题. 在实际工程应用中, 外形曲线除需满足一定的插值条件、逼近条件、端点条件、以及连续性条件外, 还要满足一定形状特征的要求. 在曲线的光顺研究中, 有多种光顺度量方法被采用, 其中曲线能量积分的极小化方法被采用的较多, 因为它有明确的力学背景. 由于曲线光顺性的改进常要求曲线整体修正, 因此, 在实际应用中, 常用曲线的逼近代替曲线的插值. 在飞机设计与制造中, 由于容积

\* 1996年7月16日收到.

或面积的要求, 飞机的机身和机翼的横截面的闭曲线所围成的面积必须保持一定的面积率. 因此, 平面闭曲线所围的面积为定量的约束条件是某些实际应用中不可忽视的. 作者对具有固定面积约束的平面曲线构造方法进行了研究. Nowacki. H. 等人用 Bézier 曲线和 Hermiter 曲线进行了类似的研究. 由于光顺性的要求, 必须采用五次以上的复合曲线, 才能达到  $C^2$  连续. 另一方面, 在实际工程中常采用的三次样条曲线已达到  $C^2$  连续, 不仅在计算中, 线性方程组的带宽较小, 而且曲线的波动变化也比五次曲线的变化少些. 因此本文采用三次  $B$  样条曲线作为逼近曲线. 三次  $B$  样条曲线不仅能够达到光顺需要的  $C^2$  连续, 而且具有局部修正的性质, 计算时比较稳定, 在应用时可以省去边界条件的要求. 因此, 用  $B$  样条曲线进行外形曲线设计将更为有效.

本文采用均匀三次  $B$  样条曲线光顺逼近具有固定面积约束的平面闭曲线, 并采用 Lagrange 乘数法解决带有约束的变分问题.

## § 2. 具有约束条件的三次 $B$ 样条曲线

平面三次均匀  $B$  样条曲线  $C$  的第  $i$  段的表达式为

$$\mathbf{r}_i(u) = [1 \ u \ u^2 \ u^3] \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \\ \mathbf{V}_{i+3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

( $0 \leq u \leq 1; i = 0, 1, 2, \dots, n-3$ ), 其中  $\mathbf{V}_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为三次  $B$  样条曲线的控制点.

对于平面上已知的数据点  $\mathbf{q}_i = (q_{x_i}, q_{y_i}), i = 0, 1, \dots, m$ , 三次  $B$  样条曲线  $C$  将逼近这些数据点, 其中参数采用累加弦长计算, 即

$$t_0 = 0, \\ t_k = \frac{\sum_{i=0}^k |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}|}{\sum_{i=0}^m |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}|} \quad (K = 1, 2, \dots, m),$$

并且  $t_{i-1} \leq t \leq t_i, u = (t - t_{i-1}) / (t_i - t_{i-1});$  以及  $0 \leq u \leq 1.$

曲线段  $\mathbf{r}_i(u)$  的两个端点  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1} (i = 0, 1, \dots, n-3. \text{ 且 } n = m+2)$  分别为

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i(0) = \frac{1}{6}(\mathbf{V}_i + 4\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2}), \\ \mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{r}_i(1) = \frac{1}{6}(\mathbf{V}_{i+1} + 4\mathbf{V}_{i+2} + \mathbf{V}_{i+3}).$$

由曲线段  $r_i(u)$  与原点构成的曲边扇形的面积 (图 1) 为

$$S_i = \frac{1}{2} \int_0^1 r_i(u) \wedge \frac{dr_i(u)}{du} du \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-3). \quad (2)$$

其中符号  $\wedge$  表示向量的楔积. 设向量  $a_1 = (x_1, y_1)$ ,  $a_2 = (x_2, y_2)$ , 有

$$a_1 \wedge a_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

整条三次 B 样条曲线构成的面积为

$$S = \sum_{i=0}^{n-3} S_i.$$

对于固定的面积  $S_A$ , 则约束条件为

$$S = S_A.$$

若要求曲线  $C$  是光滑曲线, 则要求积分

$$E = \sum_{i=0}^{n-3} E_i = \sum_{i=0}^{n-3} (E_{2i} + E_{3i}) = \sum_{i=0}^{n-3} \left[ \beta \int_0^1 \left( \frac{d^2 r_i(u)}{du^2} \right)^2 du + \gamma \int_0^1 \left( \frac{d^3 r_i(u)}{du^3} \right)^2 du \right], \quad (3)$$

取得极小值, 其中  $0 \leq \beta, \gamma \leq 1$ , 且  $\beta + \gamma = 1$ .

为了使得曲线  $C$  逼近给定的数据点  $\{q_i\}$ , 我们控制曲线  $C$  上的点  $p_i$  和对应点  $q_i$  之间的距离. 为此, 设

$$D = \sum_{i=0}^m \alpha_i (P_i - q_i)^2, \quad (4)$$

其中权因子  $\alpha_i$  为事先选定的数.

曲线  $C$  就是泛函  $J = E + D$  在约束条件  $S = S_A$  下取得的极小值曲线.

### § 3. 算 法

#### 3.1 矩阵表达式

利用矩阵记号可以表示光滑度量泛函和面积约束量. 为此先将 (1) 式写为

$$r_i(u) = BV_i,$$

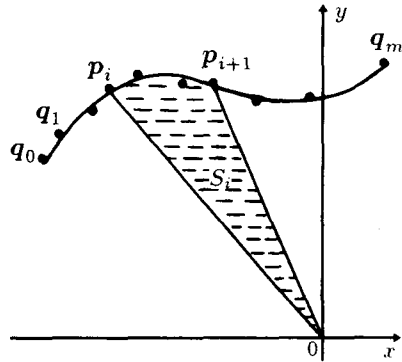


图 1

其中

$$V_i = \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{6} [1 \ u \ u^2 \ u^3] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

并且可以推导出导函数

$$r_i^{(p)}(u) = \frac{d^p B}{du^p} V_i = B_p V_i \quad (p = 1, 2, 3). \quad (5)$$

然后由 (5) 式可以推导出

$$E_{2i} = \beta \int_0^1 V_i^T B_2^T B_2 V_i du = \beta V_i^T M_2 V_i, \quad (6)$$

$$E_{3i} = \gamma \int_0^1 V_i^T B_3^T B_3 V_i du = \gamma V_i^T M_3 V_i, \quad (7)$$

$$S_i = \frac{1}{2} \int_0^1 V_i^T B^T \wedge B_1 V_i du = -\frac{1}{2} V_i^T M_s V_i^*, \quad (8)$$

其中

$$M_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \\ 3 & -9 & 9 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_s = \frac{1}{1440} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad V_i^* = V_i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.2 变分问题

根据 Lagrange 乘法法, 我们可以将具有固定面积约束  $S = S_A$  的泛函表示为

$$J = D + E + \lambda(S - S_A). \quad (9)$$

通过确定  $V_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ , 使泛函  $J$  取得极小. 根据变分原理有

$$\frac{\partial J}{\partial V_i} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

和

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0. \quad (11)$$

(10) 式的左端可以表示为

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{V}_i} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{V}_i} + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_i} + \lambda \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_i},$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial \mathbf{V}_i} = 2\alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_i) \cdot \frac{1}{6} + 2\alpha_{i-1}(\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{q}_{i-1}) \frac{4}{6} + 2\alpha_{i-2}(\mathbf{p}_{i-2} - \mathbf{q}_{i-2}) \frac{1}{6} \\ \quad (i = 2, 3, \dots, n-2), \\ \frac{\partial D}{\partial \mathbf{V}_0} = 2\alpha_0(\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0) \frac{1}{6}, \\ \frac{\partial D}{\partial \mathbf{V}_1} = 2\alpha_0(\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0) \frac{4}{6} + 2\alpha_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \frac{1}{6}, \\ \frac{\partial D}{\partial \mathbf{V}_{n-1}} = 2\alpha_{n-2}(\mathbf{p}_{n-2} - \mathbf{q}_{n-2}) \frac{1}{6} + 2\alpha_{n-3}(\mathbf{p}_{n-3} - \mathbf{q}_{n-3}) \frac{4}{6}, \\ \frac{\partial D}{\partial \mathbf{V}_n} = 2\alpha_{n-2}(\mathbf{p}_{n-2} - \mathbf{q}_{n-2}) \frac{1}{6}, \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_i} = \frac{\partial(E_i + E_{i-1} + E_{i-2} + E_{i-3})}{\partial \mathbf{V}_i} \quad (i = 3, 4, \dots, n-3), \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_0} = \frac{\partial E_0}{\partial \mathbf{V}_0}, \quad \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_1} = \frac{\partial(E_1 + E_2)}{\partial \mathbf{V}_1}, \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_2} = \frac{\partial(E_1 + E_2 + E_3)}{\partial \mathbf{V}_2}, \quad \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_{n-1}} = \frac{\partial(E_{n-3} + E_{n-4})}{\partial \mathbf{V}_{n-1}}, \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_{n-2}} = \frac{\partial(E_{n-3} + E_{n-4} + E_{n-5})}{\partial \mathbf{V}_{n-2}}, \quad \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}_n} = \frac{\partial E_{n-3}}{\partial \mathbf{V}_n}, \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_i} = \frac{\partial(S_i + S_{i-1} + S_{i-2} + S_{i-3})}{\partial \mathbf{V}_i} \quad (i = 3, 4, \dots, n-3), \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_0} = \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{V}_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_n} = \frac{\partial S_{n-3}}{\partial \mathbf{V}_n}, \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_1} = \frac{\partial(S_0 + S_1)}{\partial \mathbf{V}_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_{n-1}} = \frac{\partial(S_{n-3} + S_{n-4})}{\partial \mathbf{V}_{n-1}}, \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_2} = \frac{\partial(S_0 + S_1 + S_2)}{\partial \mathbf{V}_2}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}_{n-2}} = \frac{\partial(S_{n-3} + S_{n-4} + S_{n-5})}{\partial \mathbf{V}_{n-2}}. \end{array} \right.$$

通过上述的每一项矩阵表达式, 经过计算可以得到线性方程组

$$NV = Q, \tag{12}$$



性较差的数据点应作必要的修正或删除, 否则应该降低这些点处逼近度上的要求, 以保证整体光顺性的要求.

下面我们用本文给出的方法对某型飞机进气道横截面的闭曲线进行光顺拟合, 并使其满足给定的面积约束条件. 用  $E$  值来度量光顺程度, 并且给出了逼近程度的结果. 从图中可以看出, 光顺效果较好.

采集数据点  $q_i$  如下表所示 (共 15 个点).

$q_{x_i}$	0.5000	0.5500	0.4800	0.3500	0.0000	-0.3500	-0.4800	
$q_{y_i}$	0.0000	0.3000	0.6000	0.8000	0.9500	0.8000	0.6000	
$q_{x_i}$	-0.5500	-0.5000	-0.4000	-0.2000	0.0000	0.2000	0.4000	0.5000
$q_{y_i}$	0.3000	0.0000	-0.2000	-0.4000	-0.4500	-0.4000	-0.2000	0.0000

取  $S_A = 1.1800$ .

1° 对进气道的横截面闭曲线进行不带面积约束的光顺逼近 (如图 2 所示).

当取  $\lambda = 0, \beta = \gamma = 0.5, \alpha_i \equiv 10^6$  时,  $E = 10.1366$ , 曲线所围的面积为  $A_{rea} = 1.2291$ , 此时曲线为插值曲线 (图 2 中实曲线). 虚线所示闭曲线是  $\alpha_i \equiv 1$  时的不带面积约束的  $B$  样条曲线.

2° 对进气道的横截面闭曲线进行带面积约束的光顺修正 (如图 3 所示).

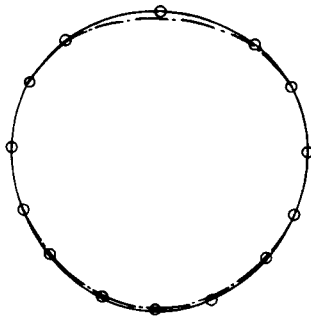


图 2 对某型飞机进气道的横截面闭曲线进行不带面积约束的光顺逼近. 虚线为光顺曲线.

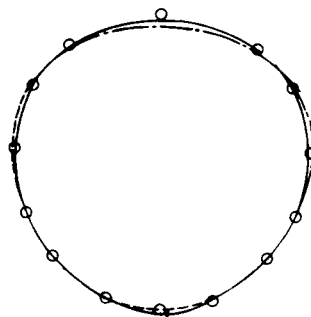


图 3 对某型飞机进气道的横截面闭曲线进行带面积约束的光顺修正. 虚线为光顺曲线.

当取  $\beta = \gamma = 0.5, \alpha_i \equiv 100, \lambda_0 = 0$  时, 在面积约束  $S = S_A$  下对  $B$  样条曲线进行光顺 ( $\epsilon = 0.01$ ), 则有

	$E$	$A_{rea}$
$\lambda = 0$	10.0593	1.1702
$\lambda = -3$	10.0434	1.1802

光顺后的曲线如图 3 所示 (虚线), 实线为不带面积约束的光顺曲线.

## § 5. 结 论

在具有约束条件下的光顺逼近中, 三次  $B$  样条曲线不仅省去了连续条件和端点条件的讨论, 而且线性方程组的带宽也比较小. 因此, 三次  $B$  样条曲线比其它类型的多项式曲线有更多的优越性.

## 附 录

$$\text{令 } \alpha_i \equiv \alpha (i = 0, 1, 2, \dots, n), \mu = -\frac{\lambda}{1440}$$

线性方程组 (12) 中的矩阵  $A_i, B_i, C_i$  和  $D_i (i = 1, 2, 3)$  的具体表达式如下:

$$A_1(\mu) = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{3} - 2\gamma - \mu & \mu \\ -\mu & \frac{\beta}{3} - 2\gamma + \mu \end{bmatrix}$$

$$A_2(\mu) = \begin{bmatrix} -56\mu + \frac{\alpha}{18} + 12\gamma & 56\mu \\ -56\mu & 56\mu + \frac{\alpha}{18} + 12\gamma \end{bmatrix}$$

$$A_3(\mu) = \begin{bmatrix} -3\beta - 30\gamma - 245\mu + \frac{4}{9}\alpha & 245\mu \\ -245\mu & -3\beta - 30\gamma + 245\mu + \frac{4}{9}\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \frac{16}{3}\beta + \alpha + 40\gamma & 0 \\ 0 & \frac{16}{3}\beta + \alpha + 40\gamma \end{bmatrix}$$

$$B_1(\mu) = \begin{bmatrix} 6\gamma - 18\mu + \frac{\alpha}{18} & 38\mu \\ -38\mu & 6\gamma + 18\mu + \frac{\alpha}{18} \end{bmatrix}$$

$$B_2(\mu) = \begin{bmatrix} -174\mu - 2\beta - 24\gamma + \frac{4}{9}\alpha & 254\mu \\ -254\mu & 174\mu - 2\beta - 24\gamma + \frac{4}{9}\alpha \end{bmatrix}$$

$$B_3(\mu) = \begin{bmatrix} 10\mu + \frac{14}{3}\beta + \alpha + 38\gamma & 10\mu \\ -10\mu & -10\mu + \frac{14}{3}\beta + \alpha + 38\gamma \end{bmatrix}$$

$$C_1(\mu) = \begin{bmatrix} 9\mu - \beta - 6\gamma + \frac{2}{9}\alpha & 71\mu \\ -71\mu & -9\mu - \beta - 6\gamma + \frac{2}{9}\alpha \end{bmatrix}$$

$$C_2(\mu) = \begin{bmatrix} 160\mu + \frac{8}{3}\beta + 20\gamma + \frac{17}{18}\alpha & 160\mu \\ -160\mu & -160\mu + \frac{8}{3}\beta + 20\gamma + \frac{17}{18}\alpha \end{bmatrix}$$

$$C_3(\mu) = \begin{bmatrix} 254\mu - 2\beta - 24\gamma + \frac{4}{9}\alpha & -174\mu \\ 174\mu & -254\mu - 2\beta - 24\gamma + \frac{4}{9}\alpha \end{bmatrix}$$



$$D_1(\mu) = \begin{bmatrix} 10\mu + \frac{2}{3}\beta + 2\gamma + \frac{\alpha}{18} & 10\mu \\ -10\mu & -10\mu + \frac{2}{3}\beta + 2\gamma + \frac{\alpha}{18} \end{bmatrix}$$

$$D_2(\mu) = \begin{bmatrix} 71\mu - \beta - 6\gamma + \frac{2}{9}\alpha & 9\mu \\ -9\mu & -71\mu - \beta - 6\gamma + \frac{2}{9}\alpha \end{bmatrix}$$

$$D_3(\mu) = \begin{bmatrix} 38\mu + \frac{\alpha}{18} + 6\gamma & -18\mu \\ 18\mu & -38\mu + \frac{\alpha}{18} + 6\gamma \end{bmatrix}$$

## 参 考 文 献

- [1] Nowacki. H., Xinmin L., Fairing composite polynomial curves with constraints, *CAGD*, **11** (1994), 1-15.
- [2] Nowacki. H., Dingyuan L., Xinmin. L., Fairing Bézier curves with constraints, *CAGD*, **7** (1990), 43-55.
- [3] Farin. G., Sapidis. N., Fairing curves curvature and the fairness of curves and surfaces, *IEEE Computer Graphics Appl.*, **3** (1989), 52-57.
- [4] Farin. G., Rein. G., Sapidis. N., Worsey. A.J., Fairing cubic B-spline curves, *CAGD*, **4** (1987), 91-103.