

# 油藏模拟线性解法包的并行实现<sup>\*1)</sup>

徐向明 孙家昶

(中国科学院软件所并行软件研究开发中心)

## PARALLEL IMPLEMENTATION OF LINEAR SOLVER FOR PETROLEUM RESERVOIR SIMULATION

Xu Xiangming Sun Jiachang

(Institute of Software, R & D Center for Parallel Software)

### Abstract

This paper describes a parallel linear solver of preconditioned ORTHOMIN(K) on parallel computers such as Transputers and Power Challenge. The solver shows a high degree of parallel efficiency on such machines. Today, most existing reservoir simulators are based on sequential computers and cannot make full use of the capability of parallel computers. The major difficulty is to develop an efficient and robust parallel linear equations solver.

### 引 言

石油工业是计算机技术应用得最早的领域之一，也是应用得最深入、最普及的领域。油藏模拟是当今石油工业中分析油藏中复杂流体流动的最有效的工具之一。工程师们经常利用油藏模拟了解掌握整个油气田的开采开发生态，科学地选择多种开发方案。

分布式计算机已成为当今并行计算机发展的主流方向。如何充分利用这类并行机解决需要大规模计算的实际问题已越来越受到各方面的重视。数值油藏模拟需要大规模的数值计算，具有相对较高的并行度及适度的 I/O 要求，适于在这类分布式多处理机系统上进行运算。但是，现有的大部分油藏模拟软件是建立在串行机的基础上的，必须加以改造以充分发挥并行机的潜力，并行化主要瓶颈之一是大型稀疏线性方程组的求解。

本文讨论黑油模拟器中的预条件 ORTHOMIN(K) 在分布式的 Transputer 并行机及共享式的 SGI Power Challenge 并行机（采用 PVM 可移植并行环境）上的并行试验。解法采用适于并行的数据结构，将串行解法中的不完全分解法预条件子改造为适

\* 1995年5月30日收到。

1) 本工作得到国家攀登计划与国家自然科学基金会的资助。

于分布式并行系统的区域分解法.

## §1. 黑油模型分析

### 1.1 黑油流动方程

$$\nabla \cdot (K_l \nabla \Phi_l) + Q_l + \lambda \{ \nabla \cdot ((K_o R_s) \nabla \Phi_o) + Q_o R_s \} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi b_l S_l + \lambda (\phi b_o S_o R_s) \},$$

$$l = w, o, g,$$

其中

$$\lambda = \begin{cases} 1, & l = g, \\ 0, & l = w, o, g, \end{cases}$$

$$K_l = \frac{k k_{rl} b_l}{\mu_l}, \quad b_l = 1 / B_l,$$

$$\Phi_l = P_l + \gamma d, \quad Q_l = \text{井流动项}.$$

未知数是  $P_l$  和  $S_l$ ,  $l = w, o, g$  分别表示水、油与气三相.

上述流动方程组总体上是非线性抛物型方程组的初边值问题, 对于饱和度来说是一阶非线性双曲型方程组.

### 1.2 附属关系式

和上面三个守恒方程构成定解方程组的另外三个关系式是

$$S_o + S_w + S_g = 1,$$

$$P_w = P_o - P_{cwo}(S_w),$$

$$P_g = P_o + P_{cgo}(S_g).$$

未知数是油的压力  $P_o$ , 水的饱和度  $S_w$ , 另外的一个未知数是  $S_g$  或  $R_s$ . 当游离气存在的情况下, 为三相状态, 此时油处于饱和状态,  $S_g$  是未知数; 否则, 为两相状态, 这时  $S_g$  是零,  $R_s$  (或  $P_g$ ) 是未知数.

### 1.3 初边值条件

在油藏未开发前油藏的初始状态与周围环境的相互关系是已知的. 通常有三种边界条件:

- Dirichlet 边界条件;
- Neuman 边界条件;
- 第三类边界条件.

在空间上利用二阶精度的差分算子, 在时间上利用一阶逼近格式离散化微分方程和边界条件后, 在没有隐式井的情况下, 表示成矩阵形式为

$$A \cdot X = b,$$

其中  $A$  是一个块带状矩阵. 若有隐式井, 则是加边的块带状矩阵.

## §2. 并行预条件 ORTHOMIN(K) 算法及数值试验

### 2.1 并行算法

求解线性代数方程组的预条件 ORTHOMIN(K) 方法 (ORTHOgonalize and MINimize), 算法步骤如下:

$$\begin{aligned}
 & r = b, \quad x = p^0 = 0, \quad \gamma^0 = 0. \\
 & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \\
 & \quad l \leftarrow \text{mod}(n+1, k) \\
 & \quad m \leftarrow \min(n, k) \\
 & \quad v \leftarrow M^{-1}r \\
 & \quad u \leftarrow Av \\
 & \quad a_i \leftarrow \gamma^i(p^i, u), \quad (i < l \text{ 或 } l < i \leq m) \\
 & \quad q^i \leftarrow v - \sum_{i=0}^{l-1} a_i q^i - \sum_{i=l+1}^m a_i q^i \\
 & \quad p^i \leftarrow u - \sum_{i=0}^{l-1} a_i p^i - \sum_{i=l+1}^m a_i p^i \\
 & \quad \gamma^i \leftarrow \frac{1}{(p^i, p^i)} \\
 & \quad \omega \leftarrow \gamma^i(r, p^i) \\
 & \quad x \leftarrow x + \omega q^i \\
 & \quad r \leftarrow r - \omega p^i \\
 & \quad \text{if } \|r\| < \epsilon \text{ stop} \\
 & \text{endfor}
 \end{aligned}$$

其中,  $M$  是预条件阵. 解法组合了区域分解法, 不完全分解 (如 DKR 分解, DD 分解, AB 分解等), 约束剩余和 WATT 校正等几种预条件技术.

约束剩余的含义是指使得剩余  $r$  在某一子集 (比如线或面) 上的各分量总和为零 (文献[7]). WATT 校正是指在迭代过程中对剩余及系数矩阵在某一给定方向或平面求和, 获得一低维的子问题, 解此子问题, 并对迭代值进行校正, 使得剩余在某一给定方向或平面上的和为零, 以加速迭代法的收敛速度. WATT 校正可以消去在某一校正方向的低频特征值 (文献[1]).

算法的迭代过程分为两重迭代: 外迭代和内迭代.

1) 外迭代 设  $A \approx L \cdot U$  为  $A$  的不完全分解,  $A_p$  为  $A$  的压力部分的系数矩阵, 则外迭代步骤为: 将预条件 ORTHOMIN(K) 迭代过程中的

$$v = M^{-1}r,$$

$$u = Av.$$

替换为如下过程:

$$\begin{aligned}
 v^* &\approx A_p^{-1}r \\
 u^* &= r - Av^* \\
 v^{**} &= v^* + \text{WATT 校正量} \\
 u^{**} &= r - Av^{**} \\
 v^{***} &= N^{-1}u^{**} \\
 v &= v^* + v^{**} + v^{***} \\
 u &= Av
 \end{aligned}$$

其中  $v^*$  和  $v^{**}$  仅包含压力未知数

$$N = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & \dots & & \\ & & A_{ii} & \\ & & & \dots & \\ & & & & A_{ss} \end{pmatrix}$$

$A_{ii}$  表示第  $i$  个子区域的系数矩阵,  $s$  为子区域的个数.

2) 内迭代 指求解  $v^* \approx A_p^{-1}r$  的过程, 其步骤为: 将预条件 ORTHOMIN(K) 迭代过程中的

$$\begin{aligned}
 v &= M^{-1}r \\
 u &= Av
 \end{aligned}$$

替换为如下过程

$$\begin{aligned}
 v^* &= N_p^{-1}r \\
 u^* &= r - Av^* \\
 v^{**} &= v^* + \text{WATT 校正量} \\
 u^{**} &= r - Av^{**} \\
 v &= v^* + v^{**} \\
 u &= Av
 \end{aligned}$$

其中,  $N_p$  为矩阵  $N$  的压力部分的系数矩阵. 子区域的求解也用 ORTHOMIN 方法, 一般只需迭代 1—2 次; 或者用不完全分解法, 实际试验表明后者效果较好.

寻找高效率的全局预条件子以及恰当选取子区域的不精确求解算法, 是区域分解方法并行求解效率的两项关键技术. 如果子区域求解太不精确, 会增大全局迭代次数; 反之, 若子区域求解过于精确, 虽然能减少全局迭代次数, 但同时也增加了计算时间.

## 2.2 数值试验

我们先后在 9 个 Transputer 的并行机及 9 个 CPU 的 SGI Power Challenge 上实现上面描述的并行算法, 对一些油藏模型 (见表 1) 做了数值试验. 迭代的收敛标准为满足下列三个条件之一:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \max_i \|p^i\|_2 \leq 10^{-10}$$

表 1 并行测试模型特征表

模型名	网格维数 (NX*NY*NZ)	节点数		地质特征	生产状况		
		总节点数	死节点数		注水井	生产井	注采状态
I	12* 12* 3	432	0	均质	1	4	注采平衡
II	20* 15* 10	3000	1020	层间非均质	1	4	注采平衡
III	24* 24* 5	2880	0	层间非均质	2	2	注采平衡
IV	30* 30* 3	2700	0	层间非均质	1	4	注采平衡
V	36* 36* 3	3888	0	均质	3	6	注采平衡
VI	50* 50* 4	10000	0	均质	3	6	注采平衡
VII	100* 100* 5	50000	0	均质	3	6	注采平衡

或

$$\|\delta x\|_1 = \omega \cdot \max_j \|q_j'\| \leq 3 \times 10^{-4}$$

或

$$\frac{\|r\|_2}{\|r^0\|_2} \leq 10^{-7},$$

式中变量的含义见前面预条件 ORTHOMIN(K) 的算法过程。

数值试验结果见表 2—4。从数值结果可以看出，本文描述的算法有很高的内在并

表 2 并行效率测试 (不同模型, Transputer 并行机上)

模型名	串行 (秒)	并行 (秒)	加速比	效率
I	54.15	14.16	3.82	42.5%
II	516.98	122.20	4.23	47.0%
III	288.73	63.63	4.54	50.4%
IV	757.13	155.49	4.87	54.1%
V	720.11	115.29	6.25	69.4%

表 3 并行效率测试 (不同模型, Power Challenge 并行机上)

模型名	串行 (秒)	并行 (秒)	加速比	效率
VI	117.58	28.67	4.10	45.5%
VII	655.90	104.40	6.28	69.8%

表 4 模型 V 并行效率测试 (不同模拟时间, Transputer 并行机上)

模型时间 (天)	串行 (秒)	并行 (秒)	加速比	效率
10	239.4	40.8	5.87	65.2%
30	460.4	72.0	6.39	71.0%
60	720.1	115.3	6.25	69.4%
183	1201.4	198.4	6.06	67.3%
365	1636.1	268.6	6.09	67.7%

行性, 并行效率随着问题规模的增大而提高. 在 Transputer 并行机上, 对于例 V 来说, 与串行解法相比, 九个处理器的加速比为 6.25, 效率为 69.4%. 在 Power Challenge 上, 例 VII 的加速比达 6.28, 效率为 69.8%. 当处理器增加时运行时间将大大减少, 因此, 有良好的应用前景.

## 结 论

我们对黑油模拟器中的线性解法: 预条件 ORTHOMIN(K) 在 Transputer 及 Power Challenge 并行机上进行了并行试验.

本文描述的算法有很高的内在并行性, 在这两类并行机上, 算法均达到了较高的并行效率, 且并行效率随着问题规模的增大而提高. 并行程序从 Transputer 很容易移植到 Power Challenge 上. 尽管解小的问题在 Power Challenge 上的并行效率还不如 Transputer 上高, 但是能解大问题, 并行效率也很高, 我们用 PVM 写的程序能在大部分并行机及工作站机群执行.

寻找高效率的全局预条件子以及恰当选取子区域的不精确求解算法, 是区域分解方法并行求解效率的两项关键技术.

本工作得到了海洋石油勘探开发研究中心的景凤江与马志元高级工程师的大力协助.

## 参 考 文 献

- [1] Alda Behie, Paul K. Vinsome, Block Iterative Methods for Fully Implicit Reservoir Simulation, SPE 9303, 1980.
- [2] Rao Bhogeswara, J. E. Killough, Parallel Linear Solvers for Reservoir Simulation: A Generic Approach for Existing and Emerging Computer Architectures, SPE 25240, 1993, 71—81.
- [3] J. L. Gustafson, G. R. Montry, R. E. Benner, Development of Parallel methods for a 1024-processor hypercube, SIAM. T. SCI. STAT. COMPT.9(1988), 609—649.
- [4] J. E. Killough, Bhogeswara, Simulation of Compositional Reservoir Phenomena on a Distribute Memory Parallel Computer, SPE 21208, 1991, 69—82.
- [5] J. A. Meijerink, D. T. Van Daalen, P. J. Hoogerbrugge, R. J. A. Zeestrater, Towards a More Effective Parallel Reservoir Simulator, SPE 21212, 1991, 107—115.
- [6] Jiachang Sun, A New Local Parallel Preconditioner for solving elliptic discrete equations, Chinese Journal of Numerical Mathematics and Applications 17(1995), 35—46.
- [7] J. R. Wallis, Incomplete Gaussian Elimination as a Preconditioning for Generalized Conjugate Gradient Acceleration, SPE 12265, 1983, 325—331.
- [8] P. K. W. Vinsome, Orthomin, an Iterative Method for Solving Sparse Sets of Simultaneous Linear Equations, SPE 5729, 1976.
- [9] Zhiyuan Ma, Fengjiang Jing, Xiangming Xu, Jiachang Sun, Simulation of Black Oil Reservoir on Distributed Memory Parallel Computers and Workstation Cluster, SPE 29937, 1995, 505—512.