

有限元大型二次规划解的一种新算法^{*1)}

孙秦 范建华

(西北工业大学飞机系)

徐晓飞

(南昌650飞机设计研究所)

A NEW ALGORITHM OF LARGE-SCALE QUADRATIC PROGRAMMING SOLUTION FOR FINITE ELEMENT METHOD

Sun Qin Fan Jian-hua

(The Department of Aircraft Engineering Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

Xu Xiao-fei

(Nan Chang Aircraft Design Institute No.650)

Abstract

In order to efficiently solve large-scale linear and complementary equation system deduced by quadratic programming solution of elastoplastic finite element analysis, this present paper works out a new algorithm which can obviate insignificant data store and computation, and so make the solution procedure much more efficient and practical for microcomputers. The key point of this proposed algorithm lies in elastoplastic nature only existing some local area in a studied domain. So characteristic and non-characteristic areas should be estimated in advance, then routine computational nodes and net is designed and numbered according to the area division. This algorithm also presents consecutive detailed procedure for storage and run-time saving strategies of large-scale sparse systematic matrices, which are linear store and triangular decomposition techniques. This algorithm is checked by two test examples for its high efficiency, good numerical stability and advisability.

* 1997年9月30日收到.

1) 本文获得航空基础科学基金资助.

§ 1. 引 言

工程中许多优化问题可导致求解一个标准或非标准的二次规划问题. 经典的 Lemke 图表算法对中、小型规模的问题, 具有稳定性及收敛性好的特点, 被广泛应用. 对于大型规模的题目, 一方面由于矩阵本身的问题难于保证有较好的数值稳定性, 另一方面大型矩阵的消元换基运算要导致较大的计算工作量, 因此, 针对具体大类问题提供高效的算法是必要的.

参变量变分原理较好地解决了塑性力学、接触力学等经典变分法难于适应的问题. 运用线性化手段削弱了约束方程的非线性程度, 将问题转化为一个有线性互补显式条件的二次凸泛函极值求解, 并利用离散化手段最终导致一个大型的二次非标准规划问题. 按照自变量的标准变换方法将导致更大阶数的矩阵计算, 因此, 文 [1-3] 提出了若干改进算法, 在一定程度上, 提高了数值计算的稳定性及管理计算效率. 但由于未能在存储量上大幅度削减, 仍显计算工作量偏大. 本文依据有限元问题的特征以及对变量本身物理含义的理解与划分, 从规划算法本身进行了若干改造, 提出一种新的算法思路, 并通过算例见证了算法存储量少及高效的计算特点.

§ 2. 算法描述

弹塑性有限元问题的参变量最小势能原理的增量格式可归结为求解如下带参数向量的二次规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - (\phi \lambda_p + t)^T \delta, \\ \text{s.t.} \quad & C \delta \leq M \lambda_p + d, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\delta \in R^{Nd}$ 为设计变量列阵, 即对应力学的位移增量, 是一自由变量列, $K \in R^{Nd \times Nd}$ 为大型稀疏弹性刚度阵, $\phi \in R^{Nd \times N_{ep}}$ 为与单元塑性势相关的势矩阵, $C \in R^{N_{ep} \times Nd}$ 为与单元的屈服约束相关的约束矩阵, $M \in R^{N_{ep} \times N_{ep}}$ 为与单元塑性势、加载面相关的矩阵 (对角阵), $t \in R^{Nd}$ 为与载荷增量相关的载荷列阵, $d \in R^{N_{ep}}$ 为与单元塑性势相关的势函数列阵, $\lambda_p \in R^{N_{ep}}$ 为与塑性流动因子列阵.

N_d 为研究域离散化的总节点自由度, N_{ep} 为研究域离散化的总单元数. 以上各矩阵的计算见文献 [4].

由非线性规划的 Kuhn-tucker 条件及细致分析, 不等式约束的二次凸极值问题 (1) 式转换为如下的线性互补问题求解方程组:

$$\begin{cases} K \delta - \phi \lambda_p = t, & (2-a) \\ V - M \lambda_p + C \delta = d, & (2-b) \\ V^T \lambda_p = 0, V^T \geq 0, \lambda_p \geq 0, & (2-c) \end{cases}$$

式中 $V \in R^{N_{ep}}$ 为一组人工引入变量列.

本文的构造算法如下: 由 2-a 式解出

$$\delta = K^{-1}(t + \phi\lambda_p), \quad (3)$$

(3) 式代入 (2-b) 式得

$$V + (CK^{-1}\phi - M)\lambda_p = d - CK^{-1}t. \quad (4)$$

以下说明 (3), (4) 两式的求解与存贮策略.

弹性刚阵 K 为一大型稀疏矩阵, 且对称、正定及对角占优, 因此与之相关的逆运算可完全按照高效的稀疏矩阵存贮及相应的三角分解算法求解. 举例分析 (4) 式子项 CK^{-1} 的计算与存贮问题, 利用 K 的性质取转置运算得

$$KQ = C^T. \quad (5)$$

这样, C^T 阵可按离散化单元逐列形成, 由三角分解算法逐列计算即得 Q , 于是 C 阵仅在运算中用到, 而不必存贮下来.

矩阵 ϕ 具有规则的稀疏特性, 可线性存贮, 而且可仅存贮与塑性单元相关部分 (见后说明). 通过运用 Lemke 算法对 (4) 式进行计算获得结果, 代入 (3) 式, 即可得自由变量列阵 δ .

现在分析 (4) 式的高效计算方法. 联立 (2-c) 及 (4) 式, 归结为下列标准线性互补问题:

$$\begin{cases} V + L\lambda_p = d', \\ V^T\lambda_p = 0, \\ V \geq 0 \quad \lambda_p \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

式中, $L \in R^{N_{ep} \times N_{ep}}$ 一般为满阵, 但维数已由 (2) 式的节点自由度规模降至单元级规模 (有限元问题中, $N_d \gg N_{ep}$).

在一般常应变单元中, (6) 式计算规模不大, 但若扩大到高精单元中, 上述计算规模要大大增加, 表现为矩阵 L 要大大扩阶, 甚至要扩大到节点自由度的量级. 对这样阶数的满阵进行消元换基运算 (Lemke 算法规则), 计算工作量是巨大的, 现代普通微机难于满足此计算量.

本文第二步算法思路是利用力学的物理概念, 在 Lemke 算法中减少无谓运算, 达到缩减存贮量和高效计算的目的.

对于一个弹塑性问题或接触力学问题, 其特征区域是可以大致判明的. 例如, 弹塑性区域仅可能发生在孔边或几何不连续的一个局域, 该局域一般要比非特征区小得多. 这样, 将研究域大致划分为特征区和非特征区实际是可行的, 并将特征区域的离散化单元编号排在总单元序列的后半部分. 于是, (6) 式中的第一方程式可重记为

$$\begin{Bmatrix} V_e \\ V_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ee} & L_{ep} \\ L_{pe} & L_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_p^2 \\ \lambda_p^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_e \\ d'_p \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

式中亚标 e 代表非特征区, p 代表特征区.

从力学问题的物理概念可知, 相对于非特征区, $\lambda_p^e = 0$ (对弹塑性问题, 非特征区即对应弹性区) 以及 $V_e > 0$. 从 Lemke 的换基运算角度而言, 即 V_e 始终位于基底变量中. 人工变量列 V 在换基消元运算过程中始终为出基运算, 这就证明了 V_e 子列不会发生出基运算, 也就对应着 λ_p^e 子列不存在进基、出基的循环反复运算而导致计算不收敛.

上面的理论分析意味着子块 $[L_{ee}^T \ L_{pe}^T]^T$ 在消元换基运算过程中为无谓运算, 即不需要运算. 这样, 对应 (6) 式的增广矩阵仅为

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I & 0 & L_{ep} & -1 & d'_e \\ \hline 0 & I & L_{pp} & -1 & d_p \end{array} \right] \quad (8)$$

式中 $\{-1\}$ 子列为必要情况下, Lemke 算法引入的初始人工变量列. 计算的初态是将该列引入基底, 计算的终态是将该列赶出基底.

实际计算中无需关心人工变量 V 的数值, 故 (8) 式中的单位阵子块亦可不必存贮, 仅需在计算过程中记录换基运算顺序即可.

小结以下本文算法. 从 (3), (4) 式的引入, 将一个规划问题分为两步求解. 第一步 (即 (4) 式的计算) 又通过大致人为划定的特征区域, 在系数矩阵的形成及后续的互补问题求解中, 可大大降低存贮量和无谓计算, 从而提高计算效率. 关于 (8) 式按 Lemke 算法的消元换基运算, 许多文献已早有叙述 [5].

§ 3. 算 例

按以上算法思路编制了算法程序, 在普通 486 微机上检验了以下二算例.

3.1

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \frac{1}{2} X^T a X + b X, \\ \text{s.t.} \quad & C X \leq d, \quad X \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} -2 \\ -6 \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

对应互补问题的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & & & & & & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ & \ddots & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & \ddots & & & & -1 & 2 & -2 & 2 & -1 & -2 \\ & & & 1 & 2 & & 1 & 2 & -4 & -1 & -6 \end{array} \right], \quad (10)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_W$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_Z$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{Z_0}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_q$

$W = \{v_1, v_2, \mu_1, \mu_2\}^T$ 为不等式约束引入的松弛变量, $Z = \{\lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2\}^T$ 为 Lagrange 乘子及设计变量.

可验证原题 $\lambda_1 = 0, v_1 > 0$. 于是按本文算法仅存贮实线框以下的元素, 获得解为

v_1	v_2	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	x_1	x_2
0.4	0	0	0	0	2.8	0.8	1.2

3.2 1/4 方孔平面应力薄板, 在端部静态拉伸载荷作用下导致孔边塑性. 本文算法的计算结果如图 1.1-1.3 所示 (与常规理论分析结论一致).

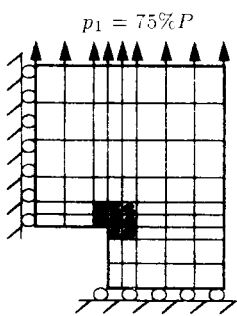


图 1.1 p_1 对应塑区大小

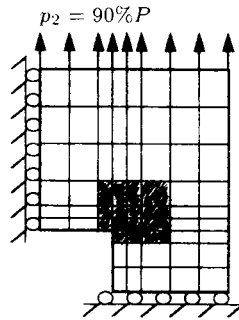


图 1.2 p_2 对应塑区大小

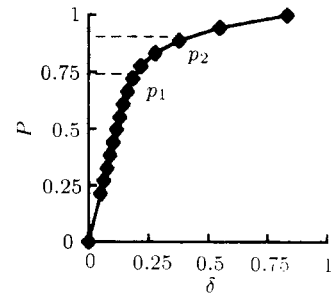


图 1.3 端部载荷位移曲线

§4. 结 论

本文依据弹塑性力学问题中参变量有限元理论导致的线性互补约束下二次规划计算问题, 提出了高效存贮高效计算且数值稳定好的新算法. 该算法分为两步, 在第一步的互补性方程求解中, 利用力学概念划分特征区域, 从而使存贮量大大降低, 并减少了无谓计算工作量, 提高了算法效率. 第二步即利用刚度系数矩阵的良好特性及稀疏矩阵的三角分解法求解最终自由变量. 该算法规模的关键在于事先恰当地估计特征区域, 估计区域过大则导致后续计算量增大, 过小导致计算有误 (结果的正确与否可从力学概念上判明). 对于后者则可重新扩大估计的特征区域并重新进行计算, 在程序中实现估计区域的变化是非常容易的. 因此, 本文不失为有限元大型二次规划求解提供了一个实际可行的算法, 算例验证了本文算法高效、可靠及正确.

参 考 文 献

- [1] 张柔雷, 二次规划问题的两步算法, 计算结构力学及其应, 4:4 (1987), 11-15.
- [2] Zeng P, A direct algorithm for linear complementary problem of quadratic programming, in: Approximation Optimization and Computing Theory and Application (eds: Law, A G and Wang, C L) Elsevier Publishers, North-Holland, (1990), 361-365.
- [3] 钟万勰, 孙苏明, 二次规划的参数加载算法, 计算结构力学及其应, 5:4 (1988), 83-88.
- [4] 张柔雷, 钟万勰, 参变量最小势能原理的有限元二次规划解, 计算结构力学及其应, 4:1 (1987), 1-11.
- [5] 程耿东, 工程结构优化设计基础, 水利电力出版社, 北京, 1984.