

有限元线法的无穷单元 ——无穷线的映射^{*1)}

袁 驹 石绍春 崔京浩

(清华大学土木系)

AN INFINITE FEMOL ELEMENT— INFINITE LINE MAPPING TECHNIQUE

Yuan Si Shi Shao-chun Cui Jing-hao

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University)

Abstract

This paper presents an infinite element in the finite element method of lines (FEMOL). The line mapping technique is used to map infinite lines to a standard local interval. The gain from this mapping is twofold: on the one hand, it standardizes the definition intervals; on the other hand, it changes the solution property in the local space so that the solution can be sought in a polynomial space with the conditions at the infinity automatically satisfied. The proposed approach is simple and efficient. With the solutions on infinite lines are obtained by solving governing ordinary differential equations, the overall solution is highly analytic and accurate. Some typical numerical examples are given in the paper to demonstrate the remarkable performance of the proposed method.

§ 1. 引 言

有限元线法(简称 FEMOL)^[1-3]作为一种新型、通用的半解析数值方法,已得到了迅速的发展,特别是在线弹性领域,已逐步趋于成熟.专著 [3] 的问世标志着该法已初步形成了独特的理论体系,通用程序 [4] 的推出展示了该法良好的发展应用前景.本文充分利用 FEMOL 的半解析性质,成功地构造了线法的映射型无穷单元,使 FEMOL 可方便有效地用于求解无穷区域上的问题.

无穷域上的问题是工程中非常常见的问题,也是各种数值方法用于展示对这类特殊问题的效力而争相求解的一类问题.在有限元法中,对无穷域问题已提出了多

* 1996 年 3 月 7 日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目.

种处理方案,如:截取有限边界法、带有衰减函数^[7,8](如 $1/(1+z)$, $e^{(x_0-x)/L}$) 的无穷元、映射型无穷元^[9]等等.常规有限元法中无穷元的一个很大局限性是:用了一个固定不变的、人为选定的位移模式去描述一个无穷单元区域上的位移变化.因此,与其说有限元中的无穷元可准确地分析无穷域问题本身,不如说是为近域分析提供了一个比刚性支撑较“柔”的远端边界.在边界元法中,由于该法中常常用到的基本解本身就是无穷域上单位力作用下的解,因此是一个天然的求解无限域问题的方法.但常规边界元法对于工程中常见的多介质等情况就显得无能为力,至少是力不从心.

本文将新近发展起来的有限元线法(FEMOL)应用于求解无限域上的问题,构造了线法的无穷单元,其中关键技术是引进了既简单又通用的无穷长结线的映射.这种映射一举两得,一方面将无穷长结线映射为标准结线,使定解区间得到了标准化,另一方面改变了无穷线上解的性态,使之可在多项式空间中寻求并能自动地满足无穷远处的条件.又由于所有结线上的解是由FEMOL的控制常微分方程解出的,因此能自动地适应整个结线上解答的变化.这一高度解析性和自适应性是方法本身的、内在的半解析性质所决定的,也是优于常规有限元法中无穷单元的一个主要方面.值得一提的是文[6]工作(特别是退化边的成功处理)的重要性,没有这一工作的成功,即使构造了本文中的无穷单元,很多无穷域和半无穷域上的线法网格划分也是不可能的.

本文的方法在程序中极易实现,已增添到FEMOL的通用程序^[4]中,并经历了大量数值算例的检验,对各类问题均有出色的表现.限于篇幅,文中仅给出几个有代表性的算例,用以展示本法的出色的效能.

§ 2. 无穷结线的映射

用FEMOL求解无限域问题时,很自然地希望结线能够延伸至无穷远处.这样便提出了两个问题:1)如何处理无穷结线.2)如何求解无穷线上的解:对于大多数工程中无穷域的问题,其解答将在无穷远处趋于消失,即可展成 $1/(a+r)$ 的幂级数(这里常数 $a \geq 0$, 变量 $r \geq 0$),用 $1/(a+r)$ 的多项式对其做良好的逼近.

取无穷元的第 i 条结线 L_i .图1出示了典型的无穷结线的映射,这里将无穷线限制为直线以防止在延伸过程中与其他结

线相交.为了对无穷线定位,映射中用了两个结点,近端结点 (x_{i1}, y_{i1}) 和一个内部结点 (x_{i2}, y_{i2}) .映射关系选用了一种简单的关系如下:

$$\begin{cases} x_i(\eta) = \frac{x_{i2} + (x_{i2} - 2x_{i1})\bar{\eta}_j\eta}{1 - \bar{\eta}_j\eta}, \\ y_i(\eta) = \frac{y_{i2} + (y_{i2} - 2y_{i1})\bar{\eta}_j\eta}{1 - \bar{\eta}_j\eta}, \end{cases} \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (1)$$

其中引入了无穷远处的局部坐标值 $\bar{\eta}_j = (-1)^j$, $j = 1, 2$, 从而将图1中的两种映射统一表示出来.映射关系式(1)将无穷区间映射为标准区间 $[-1, 1]$, 使定解区间得到了

标准化. 但这只是功效的一个方面, 另一方面是该映射可改变解答在局部坐标中的性质.

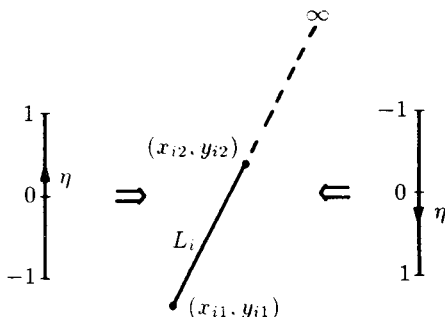


图 1 无穷长结线的映射

为了揭示这一映射对解答性质的影响, 首先将式 (1) 改写为

$$\begin{aligned} x_i(\eta) - x_{i1} &= (x_{i2} - x_{i1}) \left(\frac{1 + \bar{\eta}_j \eta}{1 - \bar{\eta}_j \eta} \right), \\ y_i(\eta) - y_{i1} &= (y_{i2} - y_{i1}) \left(\frac{1 + \bar{\eta}_j \eta}{1 - \bar{\eta}_j \eta} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

记

$$\begin{aligned} r &= [(x_i - x_{i1})^2 + (y_i - y_{i1})^2]^{1/2}, \\ a &= [(x_{i2} - x_{i1})^2 + (y_{i2} - y_{i1})^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 r 为结线上任一点到近端点的距离, a 为近端点到内部结点的距离. 组合式 (2) 中的两个式子, 可得

$$r = a \frac{1 + \bar{\eta}_j \eta}{1 - \bar{\eta}_j \eta}. \quad (4)$$

由上式解出 η , 即

$$\eta = \bar{\eta}_j \frac{r - a}{r + a} = \bar{\eta}_j \left(1 - \frac{2a}{r + a} \right). \quad (5)$$

注意到 FEMOL 是针对局部坐标 η 进行求解的, 从上式可见 FEMOL 中一个关于 η 的多项式相当于原整体坐标中一个关于 $1/(a+r)$ 的多项式. 因此 η 的多项式便可以对无穷域上的解答做很好的逼近与模拟.

对于上述的无穷线映射应说明以下两点:

(1) 内部结点的位置. 内部结点所取的位置不同, 会使 FEMOL 的求解相对地变得或难或容易一些. 但是该点的最优位置一般是不知道的, 故该点位置的确定很难有一定之规. 在 FEMOL 中, 由于结线上的解答是由常微分方程解出来的, 因此这一不确定性只影响解的过程而不影响解的结果. 这一优点是常规有限元法所不具备的.

不过，内部结点的位置的确会增加常微分方程求解器的自适应求解过程，但所附加的计算量通常是很小的。经验表明，只要长度 a 不取得过大或过小，并无明显的差别。

(2) 其他映射关系。式 (1) 的映射关系不是唯一的。例如 (仅以坐标 x 的变换为例)，也可采用如下的映射关系：

$$x_i(\eta) = x_{i2} - (x_{i2} - x_{i1}) \frac{\ln(1 - \bar{\eta}_j \eta)}{\ln 2}, \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (6)$$

与不同的内部结点位置类似，不同的映射关系一般也只影响解的过程而不影响解的结果，所以本文首选简单方便的映射关系式 (1)。

§ 3. 无穷单元的构造

有了无穷结线的映射关系，无穷单元的构造便同常规的线法单元的构造没有太大的区别了。本节只对个别不同之处加以讨论，略去大部分公式推导而直接给出结果。

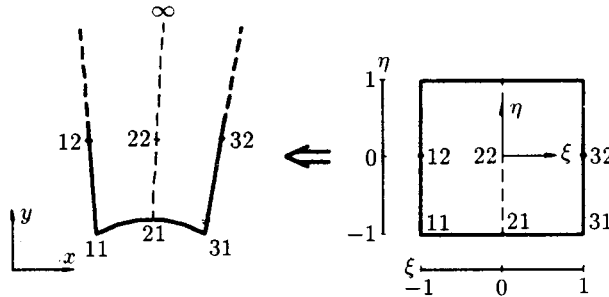


图 2 无穷单元的映射

图 2 所示为一典型的二次无穷单元的映射，其映射关系可用局部坐标中的 Lagrange 插值而得

$$x = \sum_{i=1}^{\bar{p}+1} N_i(\xi) x_i(\eta), \quad y = \sum_{i=1}^{\bar{p}+1} N_i(\xi) y_i(\eta), \quad (7)$$

其中 $N_i(\xi)$ 为标准区间 $[-1, 1]$ 上的 \bar{p} 次 Lagrange 多项式^[1,3]。 $(x_i(\eta), y_i(\eta))$ 定义了单元的第 i 条无穷结线，由式 (1) 定义。单元区域、结线方向和端边方向的 Jacobi 行列式分别为

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \quad J_L = \sqrt{(x_\eta)^2 + (y_\eta)^2}, \quad J_S = \sqrt{(x_\xi)^2 + (y_\xi)^2}, \quad (8)$$

式中 $()_\xi = \partial() / \partial \xi$, $()_\eta = \partial() / \partial \eta$ 。虽然它们在无穷远处奇异，但根据位移消失条件，在无穷远处直接对各位移赋零值，因此不会对式 (8) 中的任何一式进行计算，所以不必做任何处理。

以上定义的无穷单元的映射具有很好的通用性, 只要某类问题的解答在无穷远趋于消失, 便可直接用于该类问题, 而且所有后续的公式推导几乎全部是标准的. 本文中的算例涉及到 Poisson 方程、弹性力学平面问题、轴对称应力几类问题. 对这几类问题, 单元上的位移可统一地表示为

$$\{u\} = [N]\{d\}^e \quad (9)$$

其中 $\{u\}$ 是单元的位移向量, $[N]$ 是单元形函数矩阵, $\{d\}^e$ 是单元结线位移向量. 以平面问题为例, 它们分别为

$$\{u\} = \{u \ v\}^T, \quad (10a)$$

$$[N] = [[N_1], [N]_2, \dots, [N]_{p+1}], \quad (10b)$$

$$[N]_i = N_i(\xi)[I]_{2 \times 2}, \quad i = 1, 2, \dots, p+1, \quad (10c)$$

$$\{d\}^e = \{\{d\}_1^T \ \{d\}_2^T \ \dots \ \{d\}_{p+1}^T\}^T, \quad (10d)$$

$$\{d\}_i^T = \{u_i(\eta) \ v_i(\eta)\}^T, \quad i = 1, 2, \dots, p+1. \quad (10e)$$

此处 $N_i(\xi)$ 可取传统的 Lagrange 插值形函数, 也可取 Hierarchic 型形函数. 注意, 单元位移的次数 p 可与单元映射的次数 \bar{p} 不同, 其位移的次数在程序实施中可高达 11 次.

定义了单元上的位移试探函数, 便可写出与该类问题相应的单元势能泛函, 标准的单元集成过程可进一步给出结构的总势能泛函, 再借助于变分运算由能量泛函的驻值条件可导出如下形式的一组二阶常微分方程 (ODEs) 和相应的边界条件 (BCs):

$$\text{ODEs: } -1 < \eta < 1,$$

$$[A]\{d''\} + [G]\{d'\} + [H]\{d\} + \{F\} = \{0\}, \quad (11)$$

$$\text{BCs: } \eta = \eta_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\text{固定端点自由度} \quad d_m = \bar{d}_m, \quad (12a)$$

$$\text{荷载端点自由度} \quad Q_{jm} = \eta_j P_{jm}, \quad (12b)$$

$$\text{交接端点自由度} \quad d_m = d_n, \quad Q_{jm} + Q_{jn} = \eta_j (P_{jm} + P_{jn}). \quad (12c)$$

其中, $\{d\}$ 为整体结线位移向量, d_m 为 $\{d\}$ 的第 m 个分量, (\prime) 表示对自变量 η 取导. 其余均为 FEMOL 标准的表示. 对这一常微分方程体系, 可直接调用求解器 COLSYS^[5] 求解. 有关推导的细节可参考文 [3] 的第七章或文 [6], 这里不再一一赘述.

§ 4. 数值算例

例 1. 圆柱绕流问题 (图 3)

本例是一个有解析解的 Laplace 方程问题. 取速度势为基本未知量, 其精确解为

$$\phi = \tilde{\nu}_0 \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta, \quad (13)$$

可将其分解为两部分: $\phi = u_0 + u$. 第一部分 $u_0 = \nu_0 r \cos \theta$ 对应于常速度场的解答, 极易得到. 只需求第二部分的解答, 其定解方程与条件为

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, \quad r > r_0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= -\nu_0 \cos \theta, \quad r = r_0, \\ u &= 0, \quad r = \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

利用对称性, 取 1/4 区域计算, 仅取一个三次单元, 如图 3(b) 所示. 计算时取 $r_0 = 1$. $\nu_0 = 1$. 为 COLSYS^[5] 设置的误差限为 TOLER=0.0001%. 这一苛刻的误差限可以排除用求解器求解常微分方程的误差. 计算结果如表 1, 从中可以看出, 无穷元的表现是出色的, 其误差主要来源于对圆弧边界和环向位移的近似. 本例在无穷结线上, 内部结点的最佳位置是离原点 $2r_0$ 处. 此时, 径向的解答映射到局部坐标中恰好是 η 的线性函数, 求解极为容易. 当采用这一最佳中点位置时, COLSYS 用了两个区间便完成了求解. 用其它中点位置, 计算量略有增加, 但结果几乎是一样的.

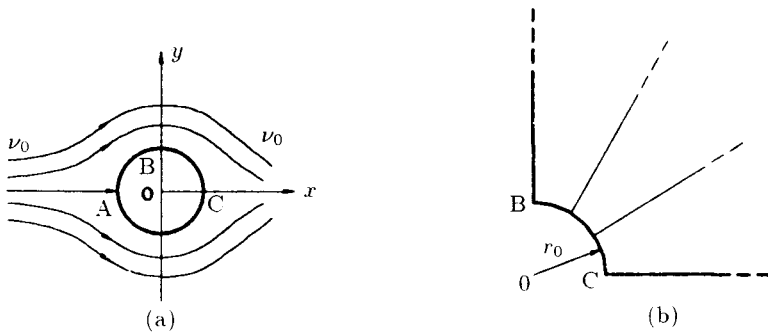


图 3 圆柱绕流问题

表 1 圆柱绕流问题的计算结果

| (r, θ) | ϕ | | $\partial\phi/\partial r$ | | $\partial\phi/\partial\theta$ | |
|---------------|---------|--------|---------------------------|--------|-------------------------------|--------|
| | FEMOL | Theory | FEMOL | Theory | FEMOL | Theory |
| (1, 0) | 2.00004 | 2.0 | -0.00009 | 0.0 | 0.00219 | 0.0 |
| (1, $\pi/2$) | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 2.00059 | 2.0 |

例 2. 含圆孔的无限大板 (图 4)

本例是有解析解的平面应力问题. 利用对称性, 取 1/4 板计算. 同样将解答分解为两部分: 一部分是无孔时简单拉伸解; 另一部分是开孔后将简单拉伸应力反方向沿孔边作用的解. 本例计算第二分解, 与第一分解叠加后得原问题的全解. 为了尽量减少几何区域上的误差, 几何映射上采用了 4 个 4 次单元, 以期能较好地逼近圆

弧. 又为了较好地捕捉孔边的应力集中, 采用图 4 所示的射线式的网格. 计算时采用 p 型收敛策略, 即单元网格不动, 逐次提高各单元位移形函数的次数 p . 为 COLSYS 设置的误差限为 $TOLER=0.0005\%$. 计算结果示于表 2, 从中可见, 随着位移形函数次数的提高, 应力值迅速地收敛, 5 次单元的结果便与理论解在前 5 至 6 位数字上完全相同了.

表 2 σ_y/σ_0 计算结果 ($y=0, v=0.3$)

| p | No. of ODEs | $r=a$ | Error (%) | $r=2a$ | Error (%) |
|------------------------|-------------|---------|-----------|---------|-----------|
| 2 | 16 | 3.01743 | 0.581 | 1.18533 | 2.74 |
| 3 | 24 | 3.00208 | 0.069 | 1.21649 | 0.185 |
| 4 | 32 | 3.00010 | 0.003 | 1.21914 | 0.032 |
| 5 | 40 | 3.00000 | 0.000 | 1.21876 | 0.0008 |
| Theory ^[10] | | 3.00000 | | 1.21875 | |

例 3. 半空间体受圆形均布荷载 (图 5)

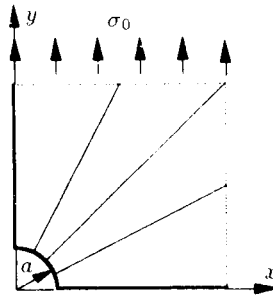


图 4 含圆孔的无限大板

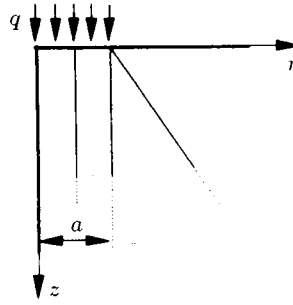


图 5 半空间体受局部荷载

表 3 \hat{w} 的计算结果 ($z=0, v=0.3$)

| p | No. of ODEs | $r=0$ | Error (%) | $r=a$ | Error (%) |
|------------------------|-------------|---------|-----------|---------|-----------|
| 2 | 17 | 1.81056 | 0.519 | 1.16928 | 0.922 |
| 3 | 25 | 1.81936 | 0.035 | 1.16708 | 0.732 |
| 4 | 33 | 1.81979 | 0.012 | 1.16479 | 0.534 |
| 5 | 41 | 1.81994 | 0.003 | 1.16312 | 0.390 |
| 6 | 49 | 1.81996 | 0.002 | 1.16211 | 0.303 |
| Theory ^[10] | | 1.82 | | 1.1586 | |

本例是有解析解的轴对称应力问题. 这里计算其无量纲的沉降量: $\hat{w} = wE/qa$. 几何上取四个线性单元, 如图 5 所示, 注意其中两个单元为退化型单元. 对于本例, 若不用退化单元, 则无穷元的网格是难以划分的. 所有无穷线上内部结点位于近端点的 $0.3a$ 处. 为 COLSYS 设置的误差限为 $TOLER=0.0005\%$. 计算结果示于表 3. 从中可见, 本法的表现是相当令人满意的.

- [2] 袁驷, 计算力学的有限元线法, 力学进展, **22**:2 (1992), 208-216.
- [3] Yuan Si, The Finite Element Method of Lines -Theory and applications, Science Press, Beijing-New York, 1993.
- [4] 袁驷, 有限元线法通用程序 —FEMOL92, 计算结构力学及其应用, **10**:1 (1993), 118-122.
- [5] 袁驷, 介绍一个常微分方程边值问题求解通用程序 —COLSYS, 计算结构力学及其应用, **7**:2, (1990), 104-105.
- [6] 袁驷, 有限元线法的“三角形”单元 — 边与线的退化, 中国科学 (A 辑), **23**:5 (1993), 552-560.
- [7] Ungless R F. An infinite finite element, M.A. Sc. Thesis, University of Columbia, 1973.
- [8] Bettess P. Infinite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **11** (1977), 1613-1626.
- [9] Zienkenwicz O. C., Emoson C, Bettess P. A novel boundary infinite element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **19** (1983), 393-404.
- [10] Timoshenko S, Goodier J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [11] Lamb H. 理论流体动力学. 游镇雄, 牛家玉译. 北京, 科学出版社, 1990.