中立型泛微分方程的一类混合方法*

蒋 绶 权　　马 瑞 霞

(桂林软件公司)(深圳软件公司)

HYBRID METHODS OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE

Jiang Shou-quan

(Software Company, Guilin)

Ma Rui-xia

(Software Company, Shenzhen)

Abstract

In this paper a class of Hybrid methods of functional differential equations of neutral type are investigated. A convergence theorem is presented and numerical examples are given.

考虑 Volterra 中立型泛函微分方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(\cdot), y'(\cdot)), & t \in I = [a, b], \\ y(t) = g(t), & t \in [\alpha, a] = I_1, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha < a$, $g(t) \in C_n^0(I_1)$ 为已知的初值函数, $f: I \times C_n^0(I) \times C_n^1(I) \to R^n$, 满足下列条件:

H_1: 对于固定的 $x \in C_n^1(I)$, 映射 $t \to f(t, x(\cdot), x'(\cdot))$ 在 I 上连续.

H_2: 算子 f 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, x_1(\cdot), y_1(\cdot)) - f(t, x_2(\cdot), y_2(\cdot))\| \leqslant L_1\|x_1 - x_2\|^{[\alpha,t]} + L_2\|y_1 - y_2\|^{[\alpha,t-\delta]},$$

其中 L_1, $L_2 \geqslant 0$ 为常数, $\delta > 0, t \in I, x_1, x_2 \in C_n^0(I), y_1, y_2 \in C_n^1(I)$.

[1] 较早的提出了常微分方程的混合方法, [2] 又把这一方法推广于积分——微分方程. 但是他们提出的方法都需要用预报——校正公式计算. 本文将根据所讨论方程的特点,给出显式混合算法.

对于中立型泛函微分方程,很多方法都在 Lipschitz 常数 $L_2 < 1$ 的条件下提出的,使得这些方法的局限性很大. 例如, Castleton 和 Grimm[3], Jackiewicz[4,5] 及关仕荣和苏德富[6] 等. Jackiewicz[7] 对 Adams 公式取消了 L_2 的限制. 本文在不限制 L_2 的条件下给出了混合算法的收敛性定理. 显然,这个结果将以 Jackiewicz[7] 的结果为特例.

* 1983 年 7 月 23 日收到.

首先我们定义 $\mathscr{F}$ 为 f_n 的集合，其中 $f_n: I \times C_n^0(I) \times C_n^1(I) \to R^n$，且当 $h \to 0$ 时 $\|f(t, y(\cdot), y'(\cdot)) - f_n(t, y(\cdot), y'(\cdot))\| \to 0$.

定义方程 (1) 的一般显示公式如下：

$$\begin{cases} a_k y_n(t_{i+k-1} + rh) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(r) y(t_{i-j}) \\ \qquad = h\sum_{j=0}^{k-1} b_j(r) z_n(t_{i+j}) + h \sum_{j=0}^{V} c_j(r) f_{nj+k-1-\theta_j}, \\ z_n(t_{i+k-1} + rh) = y'(t_{i+k-1} + rh),\ r \in (0,1), \\ z_n(t_{i+k}) = f_n(t_{i+k}, y_n(\cdot), z_n(\cdot)), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $r \in [0,1]$，$0 < \theta_j < 1, j = 0(1)V$，$f_{m-Q_j} = f(t_m - \theta_j h, y_n(\cdot), z_n(\cdot))$. 定义多项式 $\sigma[z]$、$\rho[z]$ 如下：

$$\begin{cases} \rho(z) = a_k z^k + a_{k-1}(1) z^{k-1} + \cdots + a_0(1), \\ \sigma(z) = b_{k-1}(1) z^{k-1} + b_{k-2}(1) z^{k-2} + \cdots + b_0(1), \end{cases} \tag{3}$$

其中 z 为复数. 同时引入下列记号：

$$\eta(t,r,h) = a_k y(t + (k-1+r)h) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(r) y(t+jh)$$
$$- h\sum_{j=0}^{k-1} b_j(r) y'(t+jh) + h\sum_{j=0}^{V} c_j(r) y'(t + (k-1-\theta_j)h),$$

$$\eta(h) = \sup\{\|\eta(t,r,h)\| : t \in [\alpha, b-(k-1)h], r \in [0,1]\},$$

$$\mu(h) = \sup\{\|\eta(t,1,h)\| : t \in [\alpha, b-(k-1)h]\},$$

$$v(h) = \sup\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial r}\eta(t,r,h)\right\| : t \in [\alpha, b-(k-1)h], r \in [0,1]\right\},$$

$$\xi(h) = \sup\{\|(t,h)\| : t \in I\},$$

其中 $\xi(t,h) = f(t, y(\cdot), y'(\cdot)) - f_n(t, y(\cdot), y'(\cdot))$.

二、方法的相容性、稳定性和收敛性

定义 1. 如果 $\eta(h) = O(h^p), \mu(h) = O(h^{p+1}), v(h) = O(h^{p+1}), \xi(h) = O(h^p)$，则称方法(2)是 p 阶相容的.

定义 2. (根条件定义) 如果方程 $\rho(z) = 0$ 的 k 个根全在单位圆 $|z| = 1$ 内或在 $|z| = 1$ 上只有单根，则称多项式 $\rho(z)$ 满足根条件.

定义 3. 如果 $\rho(z)$ 满足根条件，则称方法(2)是稳定的.

引理 1 ([8]). 假定 $\rho(z)$ 满足根条件，$v_l (l = 0,1,2\cdots)$ 由

$$\frac{1}{a_k + a_{k-1}(1)z + \cdots + a_0(1)z^k} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots$$

确定，则 $\Gamma = \sup_{\rho=0,1,2,\cdots} |v_l| < \infty$ 及

$$a_k \gamma_l + a_{k-1}(1)\gamma_{l-1} + \cdots + a_0(1)\gamma_{l-k} = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases}$$

记 $$\varepsilon_h = y - y_h, \varepsilon'_h = y' - z_h.$$

定理 1. 假定

i. H_1、H_2 满足 $f_h \in \mathscr{F}$;

ii. 方法是稳定的;

iii. 方法是 p 阶相容的，且 $\|\varepsilon_h\|^{[a,t_{k-1}]} \leqslant O(h^p)$, $\|\varepsilon'_h\|^{[a,t_{k-1}]} \leqslant O(h^p)$,

则

$$\|\varepsilon_h\|^I \leqslant A_2 O(h^p),$$

其中 A_2 为不依赖于 h 的常数.

证明. 考虑误差方程

$$a_k y_h(t_{i+k-1} + rh) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(r)\varepsilon_h(t_{i+i})$$
$$= h\sum_{j=0}^{k-1} b_j(r)\varepsilon'_h(t_{i+j}) + h\sum_{j=0}^{V} c_j(r)G(t_{i+k-1} - Q_j h) + \eta(t_i, r, h), \tag{4}$$

其中 $G(t_{i+k-1} - \theta_j h) = y'(t_{i+k-1} - \theta_j h) - f_h(t_{i+k-1} - \theta_j h)$. 当 $r = 1$ 时，对 $i = m - k - l, l = 0, 1, \cdots, m - k$, 用 γ_l 乘以(4)式的两端，并对 l 求和，然后利用引理 1, 则有

$$\varepsilon(t_m) + (a_{k-1}(1)\nu_{m-k} + \cdots + a_0(1)\gamma_{m-2k+1})\varepsilon_h(t_{k-1}) + \cdots + a_0(1)\gamma_{m-k}\varepsilon_h(t_0)$$
$$= h\sum_{l=0}^{m-k}\gamma_l\sum_{j=0}^{k-1} b_j(1)\varepsilon'_h(t_{m+j-l-k})$$
$$+ h\sum_{l=0}^{m-k}\gamma_l\sum_{j=0}^{V} c_j(1)G(t_{m-l-1} - \theta_j h) + \sum_{l=0}^{m-k}\gamma_l\eta(t_{m-k-l}, 1, h). \tag{5}$$

(5)式两端取范数，则有

$$\|\varepsilon_h(t_m)\| \leqslant \Gamma(Ak\|\varepsilon_h\|^{[a,t_{k-1}]} + hc\Gamma L_1\sum_{i=0}^{m-1}\|\varepsilon_h\|^{[a,t_i]}$$
$$+ h\Gamma(B + cL_2)\sum_{i=0}^{m-1}\|\varepsilon'_h\|^{[a,t_i]} + m\mu(h) + \Gamma chm\xi(h), \tag{6}$$

其中 $A = \max(1, A_1)$, $B = \max\limits_{\substack{0\leqslant 1\leqslant k-1\\ 0\leqslant r\leqslant 1}}(k' b_i(r))$,

$$C = \max_{\substack{0\leqslant i\leqslant V\\ 0\leqslant r\leqslant 1}}(k' b_i(r)),\ k' = \max(k, V+1),$$
$$A_1 = \max_{0\leqslant r\leqslant 1}(|a_k| + |a_{k-1}(r)| + \cdots + |a_0(r)|).$$

记(6)式的右端为 p_m.

因为 $AP \geqslant |a_k| \cdot |\gamma_0| \geqslant 1$, 因此 $p_m \geqslant \|\varepsilon_h\|^{[a,t_{k-1}]}$, 由序列 p_m 的非减性，则有

$$\|\varepsilon_h(t_i)\| \leqslant p_m,\quad i \leqslant m = k, \cdots, N. \tag{7}$$

由 (4) 式我们又有

$$\|\varepsilon_h(t_m + rh)\| \leqslant [Ap_m + h(B + cL_2)\|\varepsilon_h\|^{[a,t_m]} + hcL_1\|\varepsilon_h\|^{[a,t_m]}$$
$$+ \|\eta(t_{m-k}, r, h)\| + CI\xi(h)]/|a_k|. \tag{8}$$

由于不等式(8)对 r 一致成立，因此有

$$\|\varepsilon_k\|^{[t_m,t_{m+1}]} \leqslant S_{m+1},$$

其中

$$S_{m+1}=\Big[A\Gamma(Ak\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]}+hc\Gamma L_1\sum_{i=0}^{m-1}\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_i]}$$

$$+h\Gamma(B+cL_2)\sum_{i=0}^{m-1}\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_i]}+m\mu(h)+\Gamma chm\xi(h))$$

$$+h(B+cL_2)\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_m]}+hcL_1\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_m]}+\eta(h)+CI\xi(h)\Big]\Big/|a_k|.$$

令 $A'=A\Gamma Ak/|a_k|$, $B'=\max(A\Gamma\Gamma,1)CL_1/|a_k|$, $C'=\max(A\Gamma\Gamma,1)(B+cL_2)/|a_k|$, $D'=A\Gamma I$, $E'=(A\Gamma\Gamma CI+CI)/|a_k|$, $F'=Y|a_k|$，则有

$$S_{m+1}\leqslant A'\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]}+hB'\sum_{i=0}^{m}\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_i]}$$

$$+hC'\sum_{i=0}^{m}\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_i]}+D'\mu(h)/h+E'\xi(h)+F'\eta(h). \tag{9}$$

由于 $A'\geqslant 1$，则 $S_{m+1}\geqslant\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]}$，又由序列 S_m 的非减性，则有

$$\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{m+1}]}\leqslant A'\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]}+hB'\sum_{i=0}^{m}\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_i]}$$

$$+hC'\sum_{i=0}^{m}\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_i]}+D'\mu(h)/h+E'\xi(h)+F'\eta(h). \tag{10}$$

下面我们来估计 $\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_i]}$.

由 ε_h' 的定义：$\varepsilon_h'=y'-z_h$，我们有

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_h'(t_i+rh)\|&\leqslant\|f(t_i+rh,y(\cdot),y'(\cdot))-f_n(t_i+rh,y(\cdot),y'(\cdot))\|\\&\quad+\|f_n(t_i+rh,y(\cdot),y'(\cdot))-f_n(t_i+rh,y_n(\cdot),z_n(\cdot))\|\\&\quad+\|f_n(t_i+rh,y_n(\cdot),z_n(\cdot))-z_n\|\\&\leqslant\xi(h)+\frac{1}{h}v(h)+L_1\|\varepsilon_n\|^{[\alpha,t_{i+1}]}+L_2\|\varepsilon_n'\|^{[\alpha,t_{i+1}-\delta]}\\&\quad+\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}.\end{aligned}$$

由于上述不等式对 r 一致成立，因此有

$$\|\varepsilon_h'\|^{[t_i,t_{i+1}]}\leqslant\xi(h)+\frac{1}{h}v(h)+L_1\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{i+1}]}+L_2\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{i+1}-\delta]}+\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}. \tag{11}$$

令(11)式右端为 Q_{i+1}，则有 $Q_{i+1}\geqslant\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}$，又由 Q_i 的非减性，则有

$$\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{i+1}]}\leqslant\xi(h)+\frac{1}{h}v(h)+L_1\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{i+1}]}+L_2\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{i+1}-\delta]}+\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}. \tag{12}$$

k_1 为一满足 $k_1\delta>b-a$ 的最小常数，令 $h<\delta$，对不等式(12)递推 k_1 次，则有

$$\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{i+1}]}\leqslant[\xi(h)+\frac{1}{h}v(h)+L_1\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{i+1}]}$$

$$+\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}]E+L_2^{k_1}\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}, \tag{13}$$

其中

$$E=\begin{cases}(1-L_2^{k_1})/(1-L_2) & L_2\neq 1,\\ k_1, & L_2=1.\end{cases}$$

将(13)式代入(10)式得

$$\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{m+1}]} \leqslant A'\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]} + hB'\sum_{i=0}^{m}\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_i]}$$
$$+ hC'\sum_{i=0}^{m}\Big[\Big(\xi(h) + \frac{1}{h}v(h) + L_1\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{i+1}]}$$
$$+ \|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}\Big)E + L_2^{k_1}\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]}\Big]$$
$$+ D'\mu(h)/h + E'\xi(h) + F'\eta(h). \qquad (14)$$

记 $B_1' = B' + C'L_1E$，$E_1' = E' + C'EI$，$G_1' = (L_2^{k_1} + E)C'I, H_1 = C'EI$，则有

$$\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{m+1}]} \leqslant A'\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]} + E_1'\xi(h) + D'\mu(h)/h + F'\eta(h)$$
$$+ G_1'\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]} + H_1v(h)/h + hB_1'\sum_{i=0}^{m}\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_i]}.$$

由归纳法不难证明下面的结果:

$$\|\varepsilon_h\|^I \leqslant [A'\|\varepsilon_h\|^{[\alpha,t_{k-1}]} + E_1'\xi(h) + D'\mu(h)/h$$
$$+ F'\eta(h) + G_1'\|\varepsilon_h'\|^{[\alpha,t_{k-1}]} + H_1v(h)/h]\rho^{B_1'I}.$$

再由定理 1 的假定 iii，则

$$\|\varepsilon_h\|^I \leqslant A_2O(h^p).$$

定理得证。

三、算　　例

我们给出一个三阶公式

$$y_h(t_i + rh) = y_h(t_i) + rh\Big(11 + \frac{3}{2}r + \frac{2}{3}r^2\Big)f_i$$
$$+ \Big(\frac{1}{2}r + \frac{2}{3}r^2\Big)f_{i-1} - \Big(2r + \frac{4}{3}r^2\Big)f_{i-\frac{1}{2}},$$
$$z_h(t_i + rh) = (1 + 2r + 3r^2)f_i + r(1 + 2r)f_{i-1}$$
$$- 2r(1 + 2r)f_{i-\frac{1}{2}}, r \in (0,1),$$
$$z_h(t_{i+1}) = f_h(t_{i+1}, y_2(\cdot), z_h(\cdot)).$$

表 1

T	Y(T)	$h = 2^{-4}$ YH	$h = 2^{-6}$ YH	$h = 2^{-8}$ YH	$h = 2^{-10}$ YH
0.25	1.2840254167	1.2840142641	1.2840252347	1.2840254138	1.2840254167
0.50	1.6487212707	1.6486938651	1.6487208275	1.6487212637	1.6487212706
0.75	2.1170000166	2.1169757910	2.1169985079	2.1169999988	2.1170000164
1.00	2.7182818285	2.718135338	2.7182781398	2.7182817841	2.7182818278

计算方程

$$y(t)=\left[y'\left(t-\frac{1}{1+t}\right)\right]^{1+t}y(t^2)e^{1-2t^2},\quad t\in[0,1],$$

$$y(t)=g(t),\quad t\in[-1,0]$$

(其精确解为 $y(t)=e^t$) 的数值解,其结果见表 1 (其中 YH 表示近似值，$Y(T)$ 表示精确值).

本文是在广西大学苏德富老师指导下完成的,谨致谢意.

参 考 文 献

[1] C. W. Gear, Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations, SINUM 2. 1964, 69—86.

[2] Makroglou, A. Hybrid methods in the numerical solution of volterra integro-differential equations IMA Journal of Numerical Analysis 2, (1982), 21—35.

[3] R. N. Castleton, L. J. Grimm, A first order method for differential equations of neutral type. Math. Comp. 27 (1973), pp. 571—577.

[4] Z. Jackiewicz, one-step methods for the numerical sdution of volterra functional differential equations of neutral type Applicable Anal, Vol 12. (1981) pp. 1—11.

[5] Z. Jackiewicz, The numerical Solution of Volterra functional differential equations of neutral type SIAMJ. NUMER. ANAL, Vol. 18. No. 4. August 1981.

[6] 关仕荣，苏德富，中立型方程组的单步法，计算数学，5: 3，1983.

[7] Jackiewicz, Z. Adams methods for neutral functional differential equations. Numer, Math. Vol. 39. 1982 221—230.

[8] P. Henrici, Discrete vakiable Methods in ordinaky Differential equations Joho wiley and sons, 1962. 中译本，科学出版社，1985. p. 290—291.