逐段单调三次样条插值*

张 宝 琳

PIECEWISE MONOTONE CUBIC SPLINE INTERPOLATION

Zhang Bao-lin

Abstract

In this article a kind of cubic interpolating splines is constructed. Let $(x_i, y_i)(i=0, 1, \cdots, k)$ be a set points such that $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$; $y_i(i=0,1,\cdots,k)$ are arbitrary; the cubic spline $s_\Delta(y, x)(x\in[a, b])$ satisfies $s_\Delta(y, x_i)=y_i$, $s'_\Delta(y, x_i)=m_i$, $i=0, 1, \cdots, k$, in which the sequence $\{m_i\}_{i=0}^k$ is as follows: $m_0=s_1$, $m_k=s_k$, and

$$\underset{(1\leqslant i\leqslant k-1)}{m_i}=\begin{cases}0 \text{ for} s_i\cdot s_{i+1}<0 \text{ or } s_i\cdot s_{i+1}=0,\\ \min(s_i, s_{i+1}) \quad \text{for } s_i\cdot s_{i+1}>0 \text{ and } s_i>0,\\ \max(s_i, s_{i+1}) \quad \text{for } s_i\cdot s_{i+1}>0 \text{ and } s_i<0,\ s_i=(y_i-y_{i-1})/(x_i-x_{i-1}).\end{cases}$$

It is proved that such a cubic spline $s_\Delta(y, x)$ not only preserves monotonicity of the points $(x_i, y_i)(i=0, 1, \cdots, k)$, but also has better approximation property which was not investigated in passow's paper (1974). A mistake in passow's theorem is pointed out as well.

§1. 引　言

设 $(x_i, y_i)(i=0, 1, \cdots, k)$ 为平面上的一组点，$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$. Wolibner[1] 和 Young[2] 各自独立地证明了如果 $y_{i-1}\neq y_i(i=1, 2, \cdots, k)$，则存在多项式 $p(x)$ 满足 $p(x_i)=y_i(i=0, 1, \cdots, k)$，并且在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i](i=1, 2, \cdots, k)$ 上 $p(x)$ 是单调的. E. Passow[3] 首先把这个逐段单调多项式插值的结果拓广到逐段单调样条插值的情形，得到如下定理:

定理 A[1)] 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$，$y_i(i=0, 1, \cdots, k)$ 任意，则对于每一个 n 存在 $f\in S_{2n+1}^n$ 使得 $f(x_i)=y_i(i=0, 1, \cdots, k)$，并且 $f(x)$ 在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ 上单调.

---

* 1982 年 1 月 14 日收到.

1) 参阅 [3, Theorem]. 从原定理证明及本文结果不难看出，原定理中关于唯一性的结论是错的，这里引述时删除了.

定理中符号 $S_m^j(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ 表示这样的函数类：任取 $s \in S_m^j$，则 $s(x) \in C^j[a, b]$，$s(x)$ 在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i](i=1, 2, \cdots, k)$ 上为 m 次多项式.

E. Passow 对定理 A 给出了一个构造性证明. 本文将集中研究逐段单调三次样条插值问题，构造了一类三次 Hermite 样条插值函数 $s_\Delta(y; x) \in S_3^1$. 当用这种插值样条函数逼近逐段单调函数 $f(x)$ $(f \in C^2[a, b])$ 时，我们得到插值样条函数及其导函数的逼近误差估计. 用 Passow 方法给出的三次 Hermite 样条函数虽然具有逐段单调性质，但其一阶导函数在分割无限加密时却不可能收敛到 $f'(x)$，因而其逼近性质较差.

不久前，文涛[4]曾给出一种单调三次 Hermite 样条插值方法，其节点处的导数值取为过 (x_{i-1}, y_{i-1})，(x_i, y_i)，(x_{i+1}, y_{i+1}) 的三点抛物线插值函数 $L(x)$ 在 (x_i, y_i) 处的导数值 $L'(x_i)$. 但这样给出的三次 Hermite 样条插值函数不能保证在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都是单调的，而对非单调区间还需要给予特殊处理，比较麻烦. 本文给出的插值方法极为简单，具有保单调性，便于使用.

§2. 插值方法

设已知分割 $\triangle$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$, $y = \{y_i\}(i = 0, 1, \cdots, k)$ 任意，令 $s_i = y_i - y_{i-1}/x_i - x_{i-1}(i = 1, 2, \cdots, k)$. 现在我们定义 $\{m_i\}_{i=0}^k$ 如下:

$$m_0 = s_1 \tag{2.1}$$

$$\underset{(1\leqslant i\leqslant k-1)}{m_i} = \begin{cases} 0 & \text{当 } s_i \cdot s_{i+1} < 0 \text{ 或者 } s_i \cdot s_{i+1} = 0 \text{ 时}, \\ \min(s_i, s_{i+1}), & \text{当 } s_i \cdot s_{i+1} > 0 \text{ 且 } s_i > 0 \text{ 时}, \\ \max(s_i, s_{i+1}), & \text{当 } s_i \cdot s_{i+1} > 0 \text{ 且 } s_i < 0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$m_k = s_k. \tag{2.3}$$

本文所研究的三次 Hermite 样条插值函数 $s_\Delta(y; x)$ 由下式给出[5;p.12].

$$\begin{aligned} s_\Delta(y;x) = {} & m_{i-1} \frac{(x_i - x)^2(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} - m_i \frac{(x - x_{i-1})^2(x_i - x)}{(x_i - x_{i-1})^2} \\ & + y_{i-1} \frac{(x_i - x)^2[2(x - x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})^3} \\ & + y_i \frac{(x - x_{i-1})^2[2(x_i - x) + (x_i - x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})^3}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $m_i(i = 0, 1, \cdots, k)$ 满足 (2.1)—(2.3), $x \in [x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, k)$.

§3. 关于三次多项式单调性的一个引理

为下文需要，我们这里给出关于三次多项式单调性质的一个引理.

引理. 设 $p(x)$ 为非常数三次实多项式，若 $p(\alpha) < p(\beta)(\alpha < \beta)$，$p'(\alpha)$ 与 $p'(\beta)$ 均非负，且

$$p'(\alpha) + p'(\beta) \leqslant 2\,\frac{p(\beta) - p(\alpha)}{\beta - \alpha}, \tag{3.1}$$

则对任何 $x \in (\alpha, \beta)$ 均有 $p'(x) > 0$. 若 $p(\alpha) > p(\beta)(\alpha < \beta)$, $p'(\alpha)$ 与 $p'(\beta)$ 均非正,且

$$p'(\alpha) + p'(\beta) \geqslant 2\,\frac{p(\beta) - p(\alpha)}{\beta - \alpha}, \tag{3.2}$$

则对任何 $x \in (\alpha, \beta)$ 均有 $p'(x) < 0$.

证明. 设 $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, 则易知

$$A = \frac{p'(\alpha) + p'(\beta)}{(\beta - \alpha)^2} - \frac{2[p(\beta) - p(\alpha)]}{(\beta - \alpha)^3}. \tag{3.3}$$

当 $p(\alpha) < p(\beta)$, $p'(\alpha)$ 与 $p'(\beta)$ 均非负并且 (3.1) 成立时,由 (3.3) 可见 $A \leqslant 0$. 当 $A < 0$ 时,不难看出 $p'(x) > 0$ (当 $x \in (\alpha, \beta)$). 当 $A = 0$ 时, $p(x)$ 蜕化为二次多项式或线性函数,结论亦真. 在 $p(\alpha) > p(\beta)$ 情况下引理后半部分可以类似地得到证明. 引理证毕.

§4. 逐段单调性质

关于 §2 所定义的三次 Hermite 样条插值函数 $s_\Delta(y; x)$ 的保单调性,我们有如下定理:

定理 1. 设已知分割 $\triangle$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$, $y = \{y_i\}(i = 0, 1, \cdots, k)$ 任意,则由(2.1)—(2.4)所确定的 $s = s_\Delta(y; x) \in S_3^1$ 满足 $s(x_i) = y_i(i = 0, 1, \cdots, k)$, 并且在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, k)$ 上单调.

证明　由(2.4)易见 $s_\Delta(y; x) \in S_3^1$ 且 $s_\Delta(y; x_i) = y_i(i = 0, 1, \cdots, k)$. 今证逐段单调性质. 先设 $y_{i-1} < y_i(1 < i < k)$, 此时显然 $s_i > 0$. 当 $s_{i-1} \leqslant 0$ 时由 (2.2) 得 $m_{i-1} = 0$. 当 $s_{i-1} > 0$ 时,由(2.2) $m_{i-1} = \min(s_{i-1}, s_i)$, 因此恒有 $m_{i-1} \leqslant s_i$. 当 $s_{i+1} \leqslant 0$ 时由(2.2)得 $m_i = 0$. 当 $s_{i+1} > 0$ 时由(2.2) $m_i = \min(s_i, s_{i+1})$, 同样恒有 $m_i \leqslant s_i$, 于是 $m_{i-1} + m_i \leqslant 2s_i$. 根据引理的前半部分,我们有 $s'_\Delta(y; x) > 0$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$. 这时 $s_\Delta(y; x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上严格单调增加. 当 $y_{i-1} > y_i(1 < i < k)$ 时,类似可证 $s_\Delta(y; x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上严格单调减少. 当 $y_{i-1} = y_i$ 时 $s_i = 0(1 < i < k)$, 此时由(2.2)得 $m_{i-1} = m_i = 0$, 可知 $s_\Delta(y; x) \equiv y_i$, 定理结论亦真. 关于 $s_\Delta(y; x)$ 在子区间 $[x_0, x_1]$ 及 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的单调性同样容易根据(2.1)—(2.3)及引理证明之. 定理 1 证毕.

§5. 逼 近 性 质

现在假设 $f(x) \in C^2[a, b]$ 为逐段单调函数, 即其局部极值点(峰)在 (a, b) 内只有有限个. 设有一分割 $\triangle$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$, 并记 $h_{\max} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(x_i - x_{i-1})$, $h_{\min} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(x_i - x_{i-1})$ 及 $H = h_{\max}/h_{\min}$. 令 $y = \{y_i\}$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, k$. 则有如下定理:

定理 2. 由 §2(2.1)—(2.4) 所确定的 $s_{\Delta,f}(x) = s_\Delta(y; x)$ 除具有定理 1 所列性质外

还具有如下逼近性质:

$$|f'(x)-s'_{\Delta,f}(x)|\leqslant 25H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}h_{\max}, \tag{5.1}$$

$$|f(x)-s_{\Delta,f}(x)|\leqslant 25H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}h^2_{\max}, \tag{5.2}$$

其中 $h_{\max}\ll d$, d 为相邻局部极值点间的最小距离, $\|f''\|_{L\infty[a,b]}=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

证明 首先证明对任何 $x\in[a, b]$ 均有

$$|s''_{\Delta,f}(x)|\leqslant 24H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}. \tag{5.3}$$

由(2.4)可得

$$s''_{\Delta,f}(x)=\frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}\Big[\frac{6(y_i-y_{i-1})(x_i+x_{i-1}-2x)}{x_i-x_{i-1}}-2(x_{i-1}+2x_i-3x)m_{i-1}$$
$$-2(2x_{i-1}+x_i-3x)m_i\Big]. \tag{5.4}$$

由 §2 的(2.1)—(2.3)可以看出 m_{i-1}, m_i 取值各有三种可能,即 $m_{i-1}=s_{i-1}$, s_i 或者 0, $m_i=s_i$, s_{i+1} 或者 0. 当 $m_{i-1}=m_i=0$ 时,由 $h_{\max}\ll d$ 这个条件及(2.2)不难看出必有 $y_{i-1}=y_i$, 因此在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有

$$s_{\Delta,f}(x)\equiv y_i. \tag{5.5}$$

(5.3)显然成立. 因此后面只讨论 m_{i-1} 与 m_i 不同时为 0 的情形,并分五种情况证明 (5.3) 式.

1° 当 $m_{i-1}=s_{i-1}$, $m_i=s_i$ 时(5.4)变为

$$s''_{\Delta,f}(x)=\frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}2(2x_i+x_{i-1}-3x)\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}-\frac{y_{i-1}-y_{i-2}}{x_{i-1}-x_{i-2}}\right). \tag{5.6}$$

应用 Lagrange 中值定理,有

$$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k, \tag{5.7}$$

(其中 $x_{i-1}<\xi_i<x_i$) 及

$$f'(\xi_i)-f'(\xi_{i-1})=f''(\eta_i)(\xi_i-\xi_{i-1}) \tag{5.8}$$

(其中 $\xi_{i-1}<\eta_i<\xi_i$, $i=2, 3, \cdots, k$). 将 (5.7)、(5.8) 代入 (5.6) 可以得到如下估计:

$$|s''_{\Delta,f}(x)|\leqslant\frac{2\cdot 2h_{\max}|f''(\eta_i)|2h_{\max}}{(x_i-x_{i-1})^2}\leqslant 8H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}. \tag{5.9}$$

2° 当 $m_{i-1}=s_{i-1}$, $m_i=s_{i+1}$ 时,(5.4)变为

$$s''_{\Delta,f}(x)=\frac{2}{(x_i-x_{i-1})^2}\{3f'(\xi_i)(x_i+x_{i-1}-2x)-f'(\xi_{i-1})(x_{i-1}+2x_i-3x)$$
$$-f'(\xi_{i+1})(2x_{i-1}+x_i-3x)\}$$
$$=\frac{2}{(x_i-x_{i-1})^2}\{[f'(\xi_i)-f'(\xi_{i-1})](x_{i-1}+2x_i-3x)-[f'(\xi_{i+1})$$
$$-f'(\xi_i)](2x_{i-1}+x_i-3x)\}$$
$$=\frac{2}{(x_i-x_{i-1})^2}\{f''(\eta_i)(x_{i-1}+2x_i-3x)(\xi_i-\xi_{i-1})-f''(\eta_{i+1})(2x_{i-1}$$
$$+x_i-3x)(\xi_{i+1}-\xi_i)\},$$

因此有估计式

$$|s''_{\Delta,f}(x)| \leqslant \frac{2}{h_{\min}^2}\|f''\|_{L\infty[a,b]}(2h_{\max}\cdot 2h_{\max}+2h_{\max}\cdot 2h_{\max})=16H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}. \quad (5.10)$$

3° 当 $m_{i-1}=s_i$, $m_i=s_i$ 时，易知

$$s''_{\Delta,f}(x)\equiv 0,\ x\in[x_{i-1},\ x_i]. \quad (5.11)$$

4° 当 $m_{i-1}=s_i$, $m_i=s_{i+1}$ 时，有

$$\begin{aligned} s''_{\Delta,f}(x) &= \frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}\{2(2x_{i-1}+x_i-3x)[f'(\xi_i)-f'(\xi_{i+1})]\} \\ &= \frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}\{2(2x_{i-1}+x_i-3x)f''(\eta_i)(\xi_i-\xi_{i+1})\}, \end{aligned}$$

故

$$|s''_{\Delta,f}(x)| \leqslant 8H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}. \quad (5.12)$$

5° m_{i-1} 与 m_i 之一为 0. 不妨先设 $m_{i-1}=0$. 此时分两种情形.

i) $m_{i-1}=0$, $m_i=s_i\neq 0$. 由 $m_{i-1}=0$ 可推知或者 $s_{i-1}=0$，或者 s_i 与 s_{i-1} 符号相反，无论在哪种情况之下都易知，必有 $\bar{\xi}_i\in(x_{i-2},\ x_i)$ 使得 $f'(\bar{\xi}_i)=0$. 因此我们有

$$\begin{aligned} s''_{\Delta,f}(x) &= \frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}\left[2\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(2x_i+x_{i-1}-3x)\right] \\ &= \frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}[2f'(\xi_i)(2x_i+x_{i-1}-3x)-2f'(\bar{\xi}_i)(2x_i+x_{i-1}-3x)] \\ &= \frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}[2(2x_i+x_{i-1}-3x)f''(\xi_i^*)(\xi_i-\bar{\xi}_i)], \end{aligned}$$

其中 ξ_i^* 在 ξ_i 与 $\bar{\xi}_i$ 之间，所以

$$|s''_{\Delta,f}(x)| \leqslant 8H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]},$$

即(5.12)成立.

ii) $m_{i-1}=0$, $m_i=s_{i+1}\neq 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned} s''_{\Delta,f}(x) = \frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}\{&6(x_i+x_{i-1}-2x)[f'(\xi_i)-f'(\bar{\xi}_i)] \\ &-2(2x_{i-1}+x_i-3x)[f'(\xi_{i+1})-f'(\bar{\xi}_i)]\}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |s''_{\Delta,f}(x)| &\leqslant \frac{1}{h_{\min}^2}\|f''\|_{L\infty[a,b]}(6\cdot h_{\max}\cdot 2h_{\max}+2\cdot 2h_{\max}\cdot 3h_{\max}) \\ &= 24H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

当 $m_i=0$ 而 $m_{i-1}\neq 0$ 时，可得到与 i)、ii) 中估计式完全相同的结果.

综上 1°—5° 中(5.9)—(5.13)各式可知(5.3)式成立.

现任取 $x\in[a,\ b]$，必有 i 使 $x\in[x_{i-1},\ x_i]$. 因 $s_{\Delta,f}(x_i)=f(x_i)$, $s_{\Delta,f}(x_{i-1})=f(x_{i-1})$，故由罗尔定理知，存在 $z_i\in(x_{i-1},\ x_i)$ 使 $s'_{\Delta,f}(z_i)=f'(z_i)$. 于是我们有

$$f'(x)-s'_{\Delta,f}(x)=\int_{z_i}^{x}\{f''(x)-s''_{\Delta,f}(x)\}dx, \quad (5.14)$$

所以应用(5.3)得到

$$|f'(x)-s'_{\Delta,f}(x)| \leqslant \{\|f''\|_{L\infty[a,b]}+24H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}\}|x-z_i| \leqslant 25H^2\|f''\|_{L\infty[a,b]}h_{\max}. \quad (5.15)$$

又

$$f(x)-s_{\Delta,f}(x)=\int_{x_{i-1}}^{x}\{f'(x)-s'_{\Delta,f}(x)\}dx \tag{5.16}$$

所以

$$|f(x)-s_{\Delta,f}(x)|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x}|f'(x)-s'_{\Delta,f}(x)|dx\leqslant 25H^2\|f''\|_{L_\infty[a,b]}h^2_{\max}, \tag{5.17}$$

(5.1)、(5.2)成立. 定理 2 证毕.

本文承李德元同志审阅并提出宝贵意见,作者谨致深切谢意.

参 考 文 献

[1] W. Wolibner, Sur un polynôme d'interpolation, Couq. Math. 2 (1951), 136—137.
[2] S. W. Young, Piecewise monotone polynomial interpolation, Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 642—643.
[3] E. Passow, Piecewise monotone spline interpolation, J. Approximation Theory 12 (1974), 240—241.
[4] 文涛,单调光滑函数的样条插值,计算数学, 3:2(1981),143—151。
[5] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, Academic press, New York, 1967.
[6] 张宝琳,一个单调插值问题,北京计算数学学会 1981 年年会文献.