解约束优化问题的进化策略与混合进化策略的比较 *1)

彭宏　冯正柱　杨立洪
（华南理工大学应用数学系）

A COMPARISON OF EVOLUTIONARY STRATEGIES AND HYBRID EVOLUTIONARY STRATEGIES FOR CONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEMS

Peng Hong　Feng Zheng-zhu　Yan Li-hong
(Dept. of Applied Mathematics, South China Univ. of Tech.)

Abstract

In this paper, we construct a hybrid evolutionary strategies (HES) for constrained optimization problems. Evolutionary strategies (ES) and hybrid evolutionary strategies (HES) are comparied on two constrained problems. Theoretical analysis and experimental data show that the HES has high converge speed and stability. It can be applied in many constrained optimization problems in engineering practically.

§1. 引　言

模拟进化计算是近年来信息科学，计算机科学的“热点”研究领域，由此派生的求解优化问题的进化策略是一种崭新的优化方法．它的基本思想来源于六十年代末 Rechenberg[1] 模拟生物进化提出的一种随机算法． H.-P. Schwefel 在 [2] 中系统地推广了 [1] 的原始策略，建立了进化策略 (ES). 最近该方法的研究从理论到应用都取得了一些成果，显示了非常广泛的应用前景．

对非线性约束优化问题有效算法的设计是一件吸引人的工作．最近 Hamaifar 等人 [3] 研究了用遗传算法求解约束优化问题，得到一些结果，但存在选罚因子难和收敛速度慢等问题．针对上述问题，本文用进化策略与非光滑罚函数相结合，提出了一种求解该问题的混合进化策略 (HES)，并且把 HES 与原 ES 进行了比较．理论分析和大量计算结果表明， HES 具有收敛速度快和稳定性好等特点，可以用于各种实际工程优化计算．

* 1996 年 8 月 9 日收到．
1) 国家和广东省自然科学基金资助项目．

§2. 进行策略的概念与方法

生物在进化过程中，逐渐从简单的低级生物发展成为复杂的高级生物．在这个优化过程中，主要经过选择、变异等作用，依照“物竞天演，适者生存”这一规则演变．进化策略通过模拟生物的进化过程来求解优化问题，其特点是：将最优化问题的解空间视为若干个种群，每一个可行解视为种群中的一个个体，根据目标函数构造个体的适应函数，让种群模仿进化过程不断进化直至满足算法的终止准则．

考虑非线性约束最优化问题

$$\begin{cases} \min f(x), & \\ \text{s.t.} \qquad C_i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,m_e, & \\ \qquad\qquad L_i \le C_i(x) \le H_i, \quad i=m_e+1,\cdots,m, & \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f(x)$ 及 $C_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 都是定义在 R^n 上的函数，至少有一个是非线性函数， L_i, $H_i \in R$.

对问题 (1)，定义 L_1 非光滑精确罚函数 $P(x,\rho)$ 如下：

$$P(x,\rho)=\rho\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|, \tag{2}$$

$$g_i(x)=\begin{cases} 0, & x\in E, \\ C_i(x), & x\notin E, \quad i=1,2,\cdots,m_e, \\ \max(L_i-C_i(x),C_i(x)-H_i), & x\notin E,\ i=m_e+1,\cdots m, \end{cases}$$

其中 E 为可行解的集合， ρ 为罚因子．记

$$G(x)=\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|. \tag{3}$$

称 $G(x)$ 为问题 (1) 的违反度．求解 (1) 等价求解

$$\min F(x)=\min(f(x)+P(x,\rho)). \tag{4}$$

下面给出求解 (4) 的进化策略．

(1) 构造个体适应性质函数 $S(x)$，即 $S(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极值点．

(2) 随机选取 $x_i\in R^n$, $i=1,2,\cdots,N$，构成初始种群．

(3) 父本 x_i 的相应分量 x_{ij} 按公式

$$x'_{ij}=x_{ij}+N(0,\sigma)$$

产生后代． x'_i 的各分量 x'_{ij}, $N(0,\sigma)$ 是方差为 σ 和均值为零的正态随机变量．

(4) 比较 $S(x_i)$ 和 $S(x'_i)$．依据选择原则，从 $2N$ 个个体中选择 N 个适应性好的个体进入下一代．

(5) 重复上述进化过程直至某一终止准则被满足.

§3. 混合进化策略的设计与实现

进化策略只需要函数的适应值信息，无需用梯度等其它辅助信息. 利用这些特点，把进化策略与 L_1 非光滑罚函数相结合，提出了一种求解约束优化问题的混合进化策略. 本文法在求解无约束优化问题时，数值计算罚因子比较容易，并且把混合进化策略 (HES) 与 Schwefel 进化策略 (SES) 进行了比较.

在进化过程中，方差 σ 的选取是至关重要的，它直接影响进化策略的收敛速度. 对这一问题，Schwefel[2] 提出了一种方差方案，定义的个体包含两个方面的信息. 除了解向量 x 外，个体还包含一个方差向量 σ, 它控制 x 的变化. (x,σ) 的后代 (x',σ') 为

$$\sigma_i' = \sigma_i \exp(\tau' \cdot N(0,1) + \tau \cdot N_i(0,1)), \tag{5}$$

$$x_i' = x_i + N(0, \sigma_i'). \tag{6}$$

其中

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n}}}.$$

$N(0,1)$ 和 $N_i(0,1)$ 是相互独立的标准正态随机变量，则 $\xi = \tau' N(0,1) + \tau N_i(0,1)$ 服从正态分布 $N(0, \sqrt{\tau'^2 + \tau^2})$. 因此 σ' 在 σ 的附近波动. 对 σ 引入波动使得部分个体的方差有可能随着解向量向最优点的靠近而减小，但这一事件发生的概率很小. 另外，SES 对方差的调整完全独立于问题的求解过程，通过算法验证不同问题，发现此方案用处不大.

我们的方差调整方案如下：

(1) 在第 k 代中，适应性最好的个体记为 $x_{opt,k}$, 它代表这一代的适应性水平.

(2) 如果从第 k 代到第 $k+m$ 代，$X_{opt,k+m}$ 的第 i 个分量没有改进，则令其相应的方差 σ_i 减小，即

$$\sigma_i \longleftarrow \delta \cdot \sigma_i, \quad \delta \in [0.7, 0.9].$$

(3) 如果某一次进化后，x_{opt} 的第 i 个分量改变 η_i, 则这一改变可能最优，希望下一次进化能以概率 p 保持这种速度. 令

$$\sigma_i \longleftarrow \psi \cdot \eta_i,$$

其中 ψ 满足

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi\eta_i} \int_{-\eta_i}^{\eta_i} e^{-\frac{x^2}{2(\psi\eta_i)^2}} dx = 1 - p, \quad p \in [0.4, 0.5].$$

在进化过程中，引入杂交机制. 设杂交概率为 p_c, 每一代进化时产生一随机数 r. 当 $r < p_c$ 时，执行 N 步产生 N 个新个体 (N 为种群规模).

基于上述分析，构造求解约束优化问题的混合进化策略 (HES) 如下：

步 1. 根据问题 (1) 构造 L_1 罚函数 $P(x,\rho)$;

步 2. 输入种群规模为 N, 进化代数 $k_{\max}$, 初始罚因子 ρ, 置 $k=0$;

步 3. 随机产生 N 个初始父本 $x_1,\cdots,x_N$, 设定方差向量 σ 的初值为 $(1,1,\cdots,1)\in R^n$;

步 4. 构造个体适应性函数为 $S(x)$;

步 5. 根据进化的情况设置方差向量，让第 k 代父本变异与选择个体进入第 $k+1$ 代;

步 6. $k=k+1$, 如果 $k>k_{\max}$, 则算法终止，输出结果；如果连续 50 代，x_{opt} 无改进，则令 $\rho\longleftarrow 10\cdot\rho$, 转步 4, 否则转步 5.

§4. 计算结果

为了验证本文算法的有效性，在计算机上计算了大量算例，并与 SES 进行了比较. 选择种群规模 $N=400$, 杂交概率 $p_c=0.75$, 初始罚因子 $\rho=100$, 进化代数 $k_{\max}=200$, 误差精度 10^{-3}.

例 1.

$$\begin{aligned} \min\ & f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2, \\ \text{s.t.}\ & x_1-2x_2+1=0, \\ & -x_1^2/4-x_2^2+1\geq 0. \end{aligned}$$

表 1 SES 计算结果

	参考解	最好结果	最坏结果	均值	方差
$F(x)$	1.39300	1.39347	3.53365	1.67517	0.52989
$X1$	0.823	0.8229	0.1669	0.719658	0.04681
$X2$	0.911	0.9114	0.5834	0.764259	0.08268
约束违反度	1.00E−03	0.00E+00	3.61E−05	1.018E−05	1.93E−10
代数		74	240	136.56	7465.39

表 2 HES 计算结果

	参考解	最好结果	最坏结果	均值	方差
$F(x)$	1.39300	1.39347	1.40077	1.39456	0.032702
$X1$	0.823	0.8229	0.8199	0.83128	0.000794
$X2$	0.911	0.9114	0.9099	0.82007	0.083027
约束违反度	1.00E−03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
代数		19	146	57.049	1857.152

例 2.

$$
\min f(x) = f_1(x) + f_2(x),
$$

$$
f_1(x) = \begin{cases} 30x_1, & 0 < x_1 < 300, \\ 31x_1, & 300 \le x_1 \le 400, \end{cases}
$$

$$
f_2(x) = \begin{cases} 28x_2, & 0 < x_2 \le 100, \\ 29x_2, & 100 < x_2 \le 200, \\ 30x_2, & 200 < x_2 < 1000, \end{cases}
$$

其中

$$
x_1 = 300 + (-x_3x_4\cos(1.48477 - x_6) + 0.90798x_3^2\cos(1.47588))/131.078,
$$

$$
x_2 = (-x_3x_4\cos(1.48477 + x_6) + 0.90798x_4^2\cos(1.47588))/131.078,
$$

$$
x_5 = (-x_3x_4\sin(1.48477 + x_6) + 0.90798x_4^2\sin(1.47588))/131.079,
$$

$$
\text{s.t.}\quad 0 \le x_1 \le 400,\ 0 \le x_2 \le 100,
$$

$$
340 \le x_3, x_4 \le 420,\ -1000 \le x_5 \le 1000,
$$

$$
0 \le x_6 \le 0.5236,
$$

$$
200 - (x_3x_4\sin(1.48477 - x_6) - 0.90788x_4^2\sin(1.47588))/131.078 = 0.
$$

表 3 SES 计算结果

	参考解	最好结果	最坏结果	均值	方差
$F(x)$	8953.4400	8863.8780	8960.0530	8927.9642	1231.58
X1	201.7800	206.8802	153.8125	8927.9642	1231.58
X2	100.0000	94.9097	149.8509	186.5328	2368.719
X3	383.0700	377.4520	342.1373	116.16484	2471.671
X4	420.0000	415.7146	395.2261	358.55683	172.6105
X5	−10.9070	−5.2177	46.6289	404.24299	72.56917
X6	0.0731	7.05E−02	1.32E−01	21.859513	404.3352
约束违反度	3.69E−03	3.71E−04	2.53E−04	0.0947546	0.002022
代数		36	185	92.2	2447.067

表 4 HES 计算结果

	参考解	最好结果	最坏结果	均值	方差
$F(x)$	8953.4400	8853.6110	8858.7180	8854.4469	2.514109
X1	201.7800	201.8226	201.9584	201.92478	0.023361
X2	100.0000	99.9619	99.9988	99.88226	0.024893
X3	383.0700	383.0410	371.5699	381.43615	13.01437
X4	420.0000	419.9761	411.8275	418.82968	6.563978
X5	−10.9070	−10.8797	2.1854	−9.061379	16.90973
X6	0.0731	0.0731	0.0763	0.0735008	1.05E−06
约束违反度	3.69E−03	1.06E−03	1.15E−04	0.00026	1.02E−07
代数		14	121	64.2	1304.667

从 SES 和 HES 的结果，可以看出， HES 的性能比 SES 的性能好. 从结果的方差可以看出， HES 求得的方差并比 SES 的方差要小得多，即 HES 的解比 SES 的解要集中得多. 这说明 SES 的方差方案不稳定，而本文方差方案，对不同的问题总能构造出适应性好的方差.

感谢王兴华教授的指导.

参 考 文 献

[1] I. Rechenberg, Evolutionsstrategie: Optimiering Technischer Systeme Nach Prinzipien Der Biolgischen Evolution, Stuttgart: Formmann-Holzboog Verlag, 1973.

[2] D.B. Fogel, An introduction to simulated evolutionary optimization, *IEEE Trans. NN*, **5**:1 (1994), 3-14.

[3] A. Homaifar, et al., Constrained optimization via genetic algorithms, *Simulation*, **62**:4 (1994), 242-245.